Permutações Caóticas e a Brincadeira do Amigo Secreto

Estudaremos neste artigo o problema proposto e resolvido por Euler no século XVIII, conhecido como "o problema das cartas mal endereçadas"ou "o problema do amigo secreto". Resolveremos o problema contextualizando-o com a "brincadeira do amigo secreto". Portanto, queremos chegar a uma resposta para o seguinte problema:

"Seja uma brincadeira de "amigo secreto", na qual n pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam em um recipiente, de onde cada um pega aleatoriamente um dos pedaços de papel. Qual a probabilidade de ninguém pegar seu próprio nome?"

Para facilitar o raciocínio é útil reescrever o problema em uma linguagem matemática. Assim, temos o enunciado equivalente:

"Se um conjunto ordenado de n elementos, $C = \{a_1, ..., a_n\}$, é permutado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que nenhum deles volte à sua posição original?"

Para resolver este problema, diremos que uma permutação do conjunto $C = \{a_1, ..., a_n\}$ é dita caótica ou um desarranjo quando nenhum elemento está no seu lugar primitivo. Denotaremos por $D(n)$ a quantidade de permutações caóticas do conjunto $C = \{a_1, ..., a_n\}$. Desta forma, a solução do problema do amigo secreto se expressa como:

$$P(n) = \frac{D(n)}{n!}$$

Logo, o problema se resume em calcular o número $D(n)$. Vamos então encontrar uma expressão para o número $D(n)$, quando $n = 1$, ou seja, C é unitário, não existe forma de "desaranjá-lo", de modo que $D(1) = 0$. Quando $n = 2$, os elementos a_1 e a_2 somente podem ser "desaranjados" de uma forma a_2a_1. Logo, $D(2) = 1$. Quando $n = 3$, os "desaranjos" de $a_1a_2a_3$ são $a_2a_3a_1$ e $a_3a_1a_2$ de modo que $D(3) = 2$. Continuando a análise de casos particulares, consegue-se verificar que $D(4) = 9$ e $D(5) = 44$, mas a partir daí as alternativas tornam-se tão numerosas que é preciso deduzir matematicamente qual a lei de formação de $D(n)$.

Considere o segunite raciocínio feito por Euler: seja $C = \{a_1, ..., a_n\}$ o arranjo inicial dos n elementos. Rearranjando-os de modo que nenhum retorne à posição de origem, existem $n-1$ opções para o primeiro elemento, já que ele não pode ser a_1. Podemos supor que o primeiro elemento será a_2 e então calcular o número de variações possíveis de desaranjos, bastando multiplicar o resultado por $n-1$ para se obter $D(n)$ (Princípio da contagem).

Sendo a_2 o primeiro elemento do "desarranjo", existem duas alternativas, para o segundo elemento:

- Alternativa 1: O segundo elemento é a_1. Nesse caso, precisamos rearranjar os $n-2$ elementos restantes de modo que nenhum volte à sua posição original,isto é, precisamos rearranjar os $n-2$ elementos $\{a_3, ..., a_n\}$ de modo que nenhum volte à sua posição incial. Mas esse é o mesmo problema do qual partimos, reduzido de dois elementos, havendo portanto, $D(n-2)$ formas de fazê-lo.

- Alternativa 2: O segundo elemento não é a_1. O problema é rearranjar os $n-1$ elementos restantes que ficaram à direita de a_2 de modo que nenhum volte à sua posição original. Assim fazendo, a_3 não será o terceiro elemento, a_4 não será o quarto, etc. Além disso, a_1 não será o segundo, isto é, a_1 fará "virtualmente" o papel do elemento a_2. Como são $n-1$ elementos a serem desarranjados, existem $D(n-1)$ formas de fazê-lo.

Considerando que os rearranjos das duas alternativas pertencem a conjuntos que não têm configuração comum, fica claro que, quando a_2 é o primeiro elemento, existem $D(n-1)+D(n-2)$ desarranjos possíveis. Uma vez que há $n-1$ opções para o primeiro elemento, então,

$$D(n) = (n-1)[D(n-1) + D(n-2)].$$

Essa fórmula de recorrência resolve o problema, mas tem o inconveniente de não fornecer $D(n)$ como uma função explícita do número n. Procurando simplificá-la, Euler observou que, para qualquer $n \geq 3$, tem-se:

$$\begin{aligned}
D(3) - 3D(2) &= -[D(2) - 2D(1)] \\
D(4) - 4D(3) &= -[D(3) - 3D(2)] \\
D(5) - 5D(4) &= -[D(4) - 4D(3)] \\
&\vdots \\
D(n) - nD(n-1) &= -[D(n-1) - (n-1)D(n-2)].
\end{aligned}$$

Multiplicando-se, membro a membro, essas $(n-2)$ igualdades tem-se:

$$\begin{aligned}
[D(n) - nD(n-1)][D(n-1) - (n-1)D(n-2)]\ldots[D(4) - 4D(3)][D(3) - 3D(2)] &= \\
(-1)^{n-2}[D(n-1) - (n-1)D(n-2)]\ldots[D(4) - 4D(3)][D(3) - 3D(2)][D(2) - 2D(1)].
\end{aligned}$$

Note que, com exceção da primeira parcela da esquerda e última parcela da direita, todos os elementos irão se cancelar. Logo, tem-se:

$$D(n) - nD(n-1) = (-1)^{n-2}[D(2) - 2D(1)].$$

Como

$$D(2) - 2D(1) = 1 - 2 \times 0 = 1 \ \text{ e } \ (-1)^{n-2} = (-1)^n,$$

tem-se, para todo $n \geq 3$

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n.$$

Embora a igualdade tenha sido obtida supondo-se $n \geq 3$, é fácil verificar que ela também é verdadeira para $n \geq 2$ (mas não para $n = 1$).

Procurando uma forma de exprimir diretamente $D(n)$ como função de n, Euler acabou constatando que:

$$\begin{aligned}
D(3) &= 3D(2)-1 = 3-1 = 3!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}),\\
D(4) &= 4D(3)+1 = 4[3!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})]+1 = 4!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+1 = 4!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}),\\
D(5) &= 5D(4)-1 = 5[4!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})]-1 = 5!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})-1\\
&= 5!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}),\\
D(6) &= 6D(5)+1 = 6[5!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})]+1 = 6!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!})+1\\
&= 6!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}).
\end{aligned}$$

E assim por diante. Pode-se mostrar, por indução que

$$D(n) = n![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}].$$

De fato, temos para $n=2$

$$D(2) = 2![\frac{1}{2!}] = 1$$

que é verdadeiro. Suponha que seja válido para $n=k$, isto é

$$D(k) = k![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}].$$

Mostremos que é válido para $n=k+1$. Sabemos que,

$$D(n) = nD(n-1)+(-1)^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D(k+1) &= (k+1)D(k)+(-1)^{k+1}\\
&= (k+1)(k![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}])+(-1)^{k+1}\\
&= (k+1)![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-...+\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}]).
\end{aligned}$$

Isso demonstra a afirmação. Lembrando que $D(1)=0$, tem-se:

$$D(n) = n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}], \quad n \geq 1.$$

Portanto, a probabilidade que propcuramos, $D_n/n!$, é:

$$P(n) = [\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}].$$

Um fato curioso, é que essa probabilidade praticamente se estabiliza a partir de valores relativamente baixos de n. Por exemplo, $P(12) \cong 0,36787944$, enquanto $P(24) \cong 0,3678794412$, que são valores muito próximos. Em outras palavras, isso significa que se desarrumarmos um conjunto com 12 ou com 12000000 elementos, por exemplo, a probabilidade que nenhum volte ao seu lugar de origem é virtualmente a mesma, em torno de $0,367879441$. Um resultado surpreendente e nada intuitivo.

Uma pergunta que deve ser imediata é: quem será este número $0,367879441\ldots$? Lembremos do cálculo que:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Assim, tem-se que

$$\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Em outras palavras, $P(n) \to \frac{1}{e}$, quando $n \to \infty$, rapidamente.

Referências

[1] Carneiro, José Paulo C.; [1995] *O problema do amigo oculto* Revista do professor de matemática, N 28. Sociedade Brasileira de Matemática.

[2] Garbi, Gilberto;[2005] *Uma pequena pérola de Euler* Revista do professor de matemática, N 50. Sociedade Brasileira de Matemática.

[3] Moreira, Carlos Gustavo T.A.;[1989] *Amigo oculto* Revista do professor de matemática, N 15. Sociedade Brasileira de Matemática.

[4] Morgado, A.C. e outros;[1991] *Análise Combinatória e Probabilidade* Coleção do Professor de Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática.

[5] Santos, J.P.O. e outros;[1995] *Introdução à Análise Combinatória* Editora da Unicamp - Campinas