Anjos e demônios

José Carlos Fontanesi Kling

ICMC - USP

Anjos e demônios

José Carlos Fontanesi Kling

ICMC - USP

O jogo

Regras

O jogo

Regras

- Jogado sobre um tabuleiro de xadrez infinito

O jogo

Regras

- Jogado sobre um tabuleiro de xadrez infinito
- São dois jogadores, o anjo e o demônio, jogando alternadamente

O jogo

Regras

- Jogado sobre um tabuleiro de xadrez infinito
- São dois jogadores, o anjo e o demônio, jogando alternadamente
- A cada turno o demônio destrói uma das casas do tabuleiro

O jogo

Regras

- Jogado sobre um tabuleiro de xadrez infinito
- São dois jogadores, o anjo e o demônio, jogando alternadamente
- A cada turno o demônio destrói uma das casas do tabuleiro
- O 1-anjo se move como um rei de xadrez. O k-anjo se move para qualquer casa que um rei de xadrez poderia alcançar em até k jogadas

Regras

- Jogado sobre um tabuleiro de xadrez infinito
- São dois jogadores, o anjo e o demônio, jogando alternadamente
- A cada turno o demônio destrói uma das casas do tabuleiro
- O 1-anjo se move como um rei de xadrez. O k-anjo se move para qualquer casa que um rei de xadrez poderia alcançar em até k jogadas
- O demônio vence se conseguir prender o anjo, o anjo ganha se conseguir se mover indefinidamente

O jogo

O que é uma estratégia vencedora?

O jogo

O que é uma estratégia vencedora?

- Uma estratégia é uma maneira pré-definida de jogar, que prevê uma resposta para todas as situações possíveis

O jogo

O que é uma estratégia vencedora?

- Uma estratégia é uma maneira pré-definida de jogar, que prevê uma resposta para todas as situações possíveis
- Uma estratégia vencedora é aquela que, independente de como o adversário jogue, leva o jogador à vitória

O jogo

O que é uma estratégia vencedora?

- Uma estratégia é uma maneira pré-definida de jogar, que prevê uma resposta para todas as situações possíveis
- Uma estratégia vencedora é aquela que, independente de como o adversário jogue, leva o jogador à vitória
- Perceba que tendo uma estratégia, o jogador em si não é mais necessário

O jogo

O que é uma estratégia vencedora?

- Uma estratégia é uma maneira pré-definida de jogar, que prevê uma resposta para todas as situações possíveis
- Uma estratégia vencedora é aquela que, independente de como o adversário jogue, leva o jogador à vitória
- Perceba que tendo uma estratégia, o jogador em si não é mais necessário
- Mesmo que o adversário saiba exatamente qual é a estratégia vencedora, ele ainda perde

O que é uma estratégia vencedora?

- Uma estratégia é uma maneira pré-definida de jogar, que prevê uma resposta para todas as situações possíveis
- Uma estratégia vencedora é aquela que, independente de como o adversário jogue, leva o jogador à vitória
- Perceba que tendo uma estratégia, o jogador em si não é mais necessário
- Mesmo que o adversário saiba exatamente qual é a estratégia vencedora, ele ainda perde
- Um jogo pode não admitir estratégia vencedora para nenhum dos jogadores

O jogo

Este jogo é determinado

O jogo

Este jogo é determinado

- Neste jogo, ou o demônio ou o anjo tem estratégia vencedora

O jogo

Este jogo é determinado

- Neste jogo, ou o demônio ou o anjo tem estratégia vencedora
  - Suponha que o demônio não tenha estratégia vencedora, então a cada turno o anjo se move para uma casa em que o demônio não tem estratégia vencedora. Jogando assim, o anjo nunca será capturado, portanto vence.

O jogo

Este jogo é determinado

- Neste jogo, ou o demônio ou o anjo tem estratégia vencedora
  - Suponha que o demônio não tenha estratégia vencedora, então a cada turno o anjo se move para uma casa em que o demônio não tem estratégia vencedora. Jogando assim, o anjo nunca será capturado, portanto vence.
- Portanto para todo k, temos que ou o k-anjo vence ou o demônio vence

O jogo

Este jogo é determinado

- Neste jogo, ou o demônio ou o anjo tem estratégia vencedora
  - Suponha que o demônio não tenha estratégia vencedora, então a cada turno o anjo se move para uma casa em que o demônio não tem estratégia vencedora. Jogando assim, o anjo nunca será capturado, portanto vence.
- Portanto para todo k, temos que ou o k-anjo vence ou o demônio vence
- Também é fácil perceber que se o k-anjo tem estratégia vencedora, então o $(k+n)$-anjo também tem

O jogo

1^{o} Chute - Para qual k o k-anjo vence?

O jogo

1° Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?

O jogo

1^{o} Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?

O jogo

1º Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?

O jogo

1º Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?

O jogo

1º Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?
- $k = 2$?

O jogo

1º Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?
- $k = 2$?
- $k = 1$?

O jogo

1º Chute - Para qual k o k-anjo vence?

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?
- $k = 2$?
- $k = 1$?

No final, com mais resultados, tentaremos de novo...

O 1-anjo

Bloqueando o anjo

O 1-anjo

Bloqueando o anjo

- Imagine que o demônio queira evitar que o anjo atravesse uma determinada linha

O 1-anjo

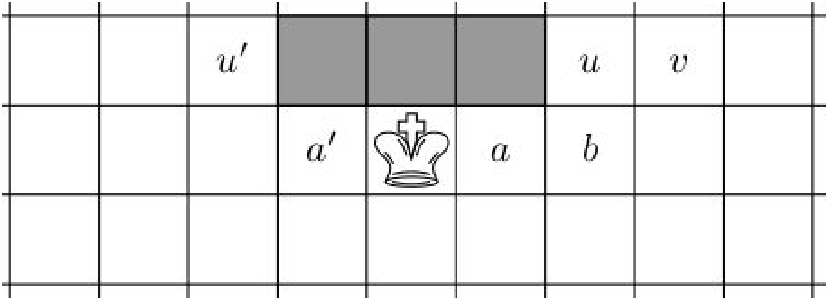
Bloqueando o anjo

- Imagine que o demônio queira evitar que o anjo atravesse uma determinada linha
- O que ele precisa é destruir as 3 casa na frente do anjo

O 1-anjo

Bloqueando o anjo

- Imagine que o demônio queira evitar que o anjo atravesse uma determinada linha
- O que ele precisa é destruir as 3 casa na frente do anjo

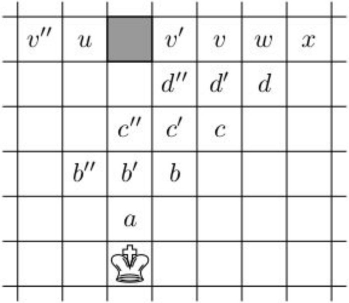


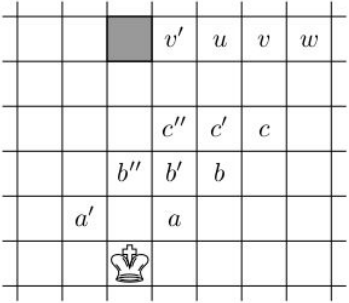
O 1-anjo

Como montar a barreira

O 1-anjo

Como montar a barreira





O 1-anjo

Encurralando o anjo

O 1-anjo

Encurralando o anjo

- Com a barreira o anjo ainda pode se movimentar indefinidamente para o lado

O 1-anjo

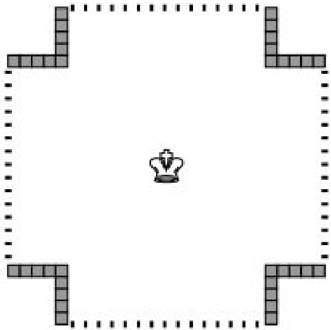
Encurralando o anjo

- Com a barreira o anjo ainda pode se movimentar indefinidamente para o lado
- Mas podemos usar essa ideia para cercar o anjo

O 1-anjo

Encurralando o anjo

- Com a barreira o anjo ainda pode se movimentar indefinidamente para o lado
- Mas podemos usar essa ideia para cercar o anjo



Problemas com possíveis estratégias

Os k-anjos

Problemas com possíveis estratégias

- O demônio nunca erra

Os k-anjos

Problemas com possíveis estratégias

- O demônio nunca erra
- Uma estratégia para o anjo leva em consideração a posição das casas destruídas em relação à sua posição

Os k-anjos

Problemas com possíveis estratégias

- O demônio nunca erra
- Uma estratégia para o anjo leva em consideração a posição das casas destruídas em relação à sua posição
- Por exemplo, se a estratégia do anjo tem muita ênfase nas casas perto dele, podemos construir uma armadilha a 1 megaparsec de distância para cima e depois atraí-lo para ela destruindo as casas abaixo dele.

Os k-anjos

Problemas com possíveis estratégias

- O demônio nunca erra
- Uma estratégia para o anjo leva em consideração a posição das casas destruídas em relação à sua posição
- Por exemplo, se a estratégia do anjo tem muita ênfase nas casas perto dele, podemos construir uma armadilha a 1 megaparsec de distância para cima e depois atraí-lo para ela destruindo as casas abaixo dele.
- Se for o contrário, construímos uma armadilha não muito longe e depois atraímos o anjo destruindo uma casa a 1 megaparsec de distância

Os k-anjos

Problemas com possíveis estratégias

- O demônio nunca erra
- Uma estratégia para o anjo leva em consideração a posição das casas destruídas em relação à sua posição
- Por exemplo, se a estratégia do anjo tem muita ênfase nas casas perto dele, podemos construir uma armadilha a 1 megaparsec de distância para cima e depois atraí-lo para ela destruindo as casas abaixo dele.
- Se for o contrário, construímos uma armadilha não muito longe e depois atraímos o anjo destruindo uma casa a 1 megaparsec de distância
- Uma estratégia vencedora leva à vitória mesmo que o adversário a conheça

O tolo

Definição

O tolo

Definição

- Vamos definir um jogo parecido com esse, mas no lugar do k-anjo, teremos o k-tolo

O tolo

Definição

- Vamos definir um jogo parecido com esse, mas no lugar do k-anjo, teremos o k-tolo
- Um k-tolo é um k-anjo que sempre aumenta sua coordenada y (sempre se move para cima)

O tolo

Definição

- Vamos definir um jogo parecido com esse, mas no lugar do k-anjo, teremos o k-tolo
- Um k-tolo é um k-anjo que sempre aumenta sua coordenada y (sempre se move para cima)
- Vamos provar que o demônio consegue parar o k-tolo

O tolo

Definição

- Vamos definir um jogo parecido com esse, mas no lugar do k-anjo, teremos o k-tolo
- Um k-tolo é um k-anjo que sempre aumenta sua coordenada y (sempre se move para cima)
- Vamos provar que o demônio consegue parar o k-tolo
- Esse resultado pode não parecer muita coisa, mas a partir dele chegaremos em outros bem interessantes

O tolo

Pegando o tolo

O tolo

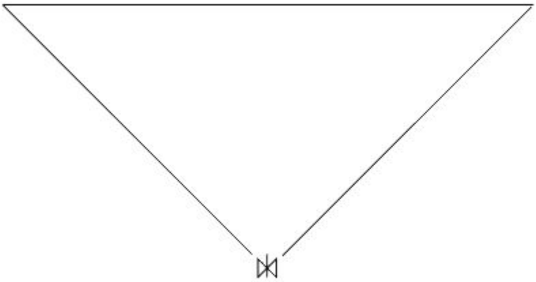
Pegando o tolo

- Primeiro devemos ver quais casas de uma linha qualquer a uma altura h da origem o tolo pode alcançar

O tolo

Pegando o tolo

- Primeiro devemos ver quais casas de uma linha qualquer a uma altura h da origem o tolo pode alcançar
- Os possíveis movimentos do tolo estão limitados a um triângulo cujos lados tem inclinação $1/k$



O tolo

Pegando o tolo

- Portanto as casas alcançadas pelo tolo são: $x_{min} = -hk$ e $x_{max} = hk \rightarrow (-hk, h)$ até (hk, h)

Pegando o tolo

- Portanto as casas alcançadas pelo tolo são: $x_{min} = -hk$ e $x_{max} = hk \rightarrow (-hk, h)$ até (hk, h)
- Temos, portanto, 2hk+1 casas possíveis

O tolo

Pegando o tolo

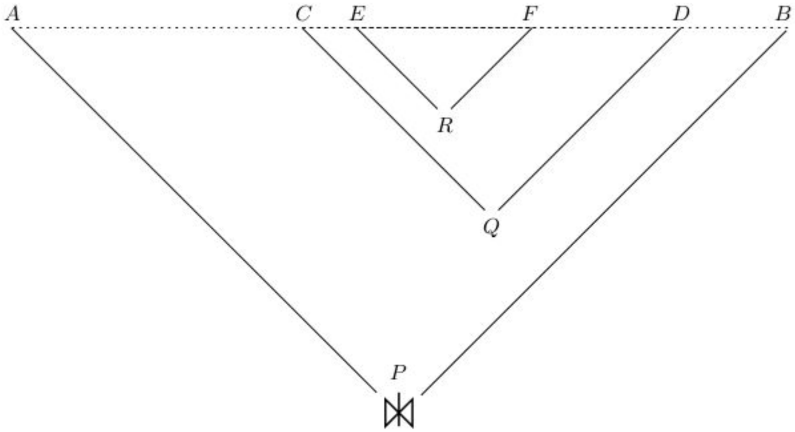
- Portanto as casas alcançadas pelo tolo são: $x_{min} = -hk$ e $x_{max} = hk \rightarrow (-hk, h)$ até (hk, h)
- Temos, portanto, 2hk+1 casas possíveis
- Imagine que queremos construir uma parede em que, independente de onde o tolo chegar, será bloqueado. Teríamos que construir uma parede de aproximadamente $2hk^2$ casas

O tolo

Pegando o tolo

- Portanto as casas alcançadas pelo tolo são: $x_{min} = -hk$ e $x_{max} = hk \rightarrow (-hk, h)$ até (hk, h)
- Temos, portanto, 2hk+1 casas possíveis
- Imagine que queremos construir uma parede em que, independente de onde o tolo chegar, será bloqueado. Teríamos que construir uma parede de aproximadamente $2hk^2$ casas
- Teremos ao menos $h/2k$ jogadas até o anjo chegar na metade da distância. Vamos então distribuir igualmente as casas a serem destruídas pela reta (no desenho vai ficar mais claro)

O tolo



O tolo

Pegando o tolo

- Portanto quando o tolo chegar na metade do caminho, já teremos completado $(h/2k)/2hk^2 = 1/4k^3$ da nossa parede

Pegando o tolo

- Portanto quando o tolo chegar na metade do caminho, já teremos completado $(h/2k)/2hk^2 = 1/4k^3$ da nossa parede
- Mas quando ele chegar na metade, ele só poderá alcançar metade da parede original, e essa metade já tem a mesma proporção da parede concluída

O tolo

Pegando o tolo

- Portanto quando o tolo chegar na metade do caminho, já teremos completado $(h/2k)/2hk^2 = 1/4k^3$ da nossa parede
- Mas quando ele chegar na metade, ele só poderá alcançar metade da parede original, e essa metade já tem a mesma proporção da parede concluída
- Note que agora temos metade das jogadas até o tolo chegar em $1/4$ do caminho (chegar na metade de novo), mas a parede que vamos construir agora tem metade das casas da original. Portanto nessas jogadas vamos completar $1/4k^3$ da parede novamente

Pegando o tolo

- Portanto quando o tolo chegar na metade do caminho, já teremos completado $(h/2k)/2hk^2 = 1/4k^3$ da nossa parede
- Mas quando ele chegar na metade, ele só poderá alcançar metade da parede original, e essa metade já tem a mesma proporção da parede concluída
- Note que agora temos metade das jogadas até o tolo chegar em $1/4$ do caminho (chegar na metade de novo), mas a parede que vamos construir agora tem metade das casas da original. Portanto nessas jogadas vamos completar $1/4k^3$ da parede novamente
- Portanto precisamos de uma h que nos permita repetir esse processo $4k^3$ vezes

O tolo

Um exemplo

O tolo

Um exemplo

- Vamos calcular a h necessária para pegarmos um 10-tolo

O tolo

Um exemplo

- Vamos calcular a h necessária para pegarmos um 10-tolo
- Precisamos repetir o processo $4k^3$ vezes, ou seja 4000 vezes

Um exemplo

- Vamos calcular a h necessária para pegarmos um 10-tolo
- Precisamos repetir o processo $4k^3$ vezes, ou seja 4000 vezes
- Contando de trás para frente, no último processo o tolo se move 10 casas, na penúltima 10 casas, no anterior 20 casas, antes 40 casas e assim por diante.

Um exemplo

- Vamos calcular a h necessária para pegarmos um 10-tolo
- Precisamos repetir o processo $4k^3$ vezes, ou seja 4000 vezes
- Contando de trás para frente, no último processo o tolo se move 10 casas, na penúltima 10 casas, no anterior 20 casas, antes 40 casas e assim por diante.
- Portanto temos $h = \sum_{i=0}^{4000} 10 \times 2^i \approx 2 \times 10^{1.205}$

Um exemplo

- Vamos calcular a h necessária para pegarmos um 10-tolo
- Precisamos repetir o processo $4k^3$ vezes, ou seja 4000 vezes
- Contando de trás para frente, no último processo o tolo se move 10 casas, na penúltima 10 casas, no anterior 20 casas, antes 40 casas e assim por diante.
- Portanto temos $h = \sum_{i=0}^{4000} 10 \times 2^i \approx 2 \times 10^{1.205}$
- Para $k = 1000$ teríamos algo da ordem de $10^{1.200.000.000}$

O tolo

Um exemplo

- Vamos calcular a h necessária para pegarmos um 10-tolo
- Precisamos repetir o processo $4k^3$ vezes, ou seja 4000 vezes
- Contando de trás para frente, no último processo o tolo se move 10 casas, na penúltima 10 casas, no anterior 20 casas, antes 40 casas e assim por diante.
- Portanto temos $h = \sum_{i=0}^{4000} 10 \times 2^i \approx 2 \times 10^{1.205}$
- Para $k = 1000$ teríamos algo da ordem de $10^{1.200.000.000}$
- Estima-se que existam 10^{80} átomos no universo observável

O bobo

Definição

O bobo

Definição

- Novamente teremos uma variação do jogo, dessa vez o k-bobo toma o lugar do k-anjo

O bobo

Definição

- Novamente teremos uma variação do jogo, dessa vez o k-bobo toma o lugar do k-anjo
- O bobo é como o tolo, mas não precisa aumentar sua coordenada y, só não pode diminuí-la

O bobo

Pegando o bobo

Pegando o bobo

- Primeiro note que podemos pegar um k-tolo usando apenas os turnos pares (é só fingir que está jogando contra um $4k$-tolo

Pegando o bobo

- Primeiro note que podemos pegar um k-tolo usando apenas os turnos pares (é só fingir que está jogando contra um $4k$-tolo
- Agora vamos usar os turnos ímpares para transformar o k-bobo em um SuperBlaster-tolo (mas que podemos capturar)

Pegando o bobo

- Primeiro note que podemos pegar um k-tolo usando apenas os turnos pares (é só fingir que está jogando contra um $4k$-tolo
- Agora vamos usar os turnos ímpares para transformar o k-bobo em um SuperBlaster-tolo (mas que podemos capturar)
- Com os turnos ímpares podemos criar uma barreira na linha onde está o bobo, para evitar que ele ande para os lados indefinidamente

O bobo

Pegando o bobo

- Primeiro note que podemos pegar um k-tolo usando apenas os turnos pares (é só fingir que está jogando contra um $4k$-tolo
- Agora vamos usar os turnos ímpares para transformar o k-bobo em um SuperBlaster-tolo (mas que podemos capturar)
- Com os turnos ímpares podemos criar uma barreira na linha onde está o bobo, para evitar que ele ande para os lados indefinidamente
- Essa barreira precisa ter k casas então até a construirmos já teriam se passado $2k$ turnos, então ela deve começar a $2k^2$ casas de distância do bobo

O bobo

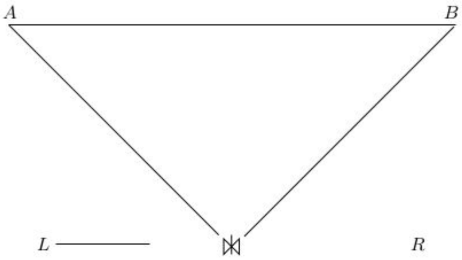
Pegando o bobo

- Mas note que a inclinação dos lado do triângulo onde o bobo está limitado não é mais $1/k$, e sim $1/2k^2$, portanto transformamos o k-bobo em um $2k^2$-tolo. Porém estamos usando apenas os turnos pares, então devemos considerá-lo um $8k^2$-tolo

O bobo

Pegando o bobo

- Mas note que a inclinação dos lado do triângulo onde o bobo está limitado não é mais $1/k$, e sim $1/2k^2$, portanto transformamos o k-bobo em um $2k^2$-tolo. Porém estamos usando apenas os turnos pares, então devemos considerá-lo um $8k^2$-tolo



O bocó

Definição

O bocó

Definição

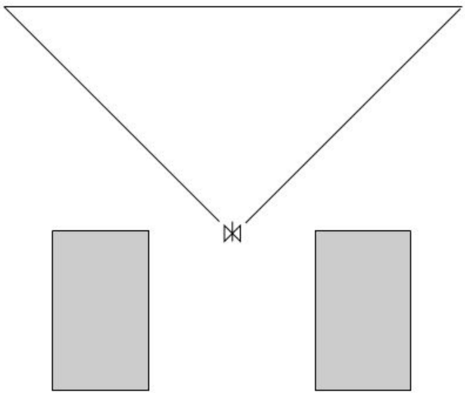
- Suponha que a coordenada y da casa mais para cima que o k-bocó já esteve seja y_{max}, então ele não pode ir para uma casa com coordenada $y < y_{max} - c$, c é uma constante qualquer

O bocó

Definição

- Suponha que a coordenada y da casa mais para cima que o k-bocó já esteve seja y_{max}, então ele não pode ir para uma casa com coordenada $y < y_{max} - c$, c é uma constante qualquer
- A ideia para pegar o bocó é exatamente igual a para pegar o bobo. Neste caso uma imagem vale mais que mil palavras

Pegando o bocó



O mané

Definição

O mané

Definição

- É um k-anjo que a cada turno aumenta estritamente sua distância da origem

O mané

Definição

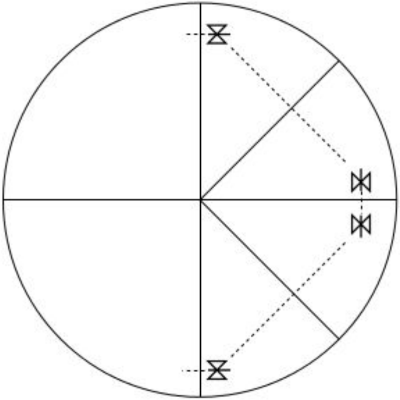
- É um k-anjo que a cada turno aumenta estritamente sua distância da origem
- É só notar que podemos pegar um tolo apenas usando os turnos múltiplos de um número qualquer

O mané

Definição

- É um k-anjo que a cada turno aumenta estritamente sua distância da origem
- É só notar que podemos pegar um tolo apenas usando os turnos múltiplos de um número qualquer
- Agora dividimos o tabuleiro em 4 setores (ou mais, quantos preferir), os quadrantes, por exemplo. Imagine que ao invés de 1 mané, agora temos mais 3, eles são as reflexões do mané original nos quadrantes, e alternamos os turnos para que em cada turno seja usada a estratégia para barrar o mané do quadrante correspondente

Pegando o mané



O mané

Variações do mané

O mané

Variações do mané

- Usando a mesma ideia podemos pegar o mané-bobo e o mané-bocó

O mané

Variações do mané

- Usando a mesma ideia podemos pegar o mané-bobo e o mané-bocó
- Pode-se provar que existe uma estratégia para o demônio tal que para toda casa P e distância D, haverão momentos t_1 e t_2 tal que $d(P_{t_1}, P) - d(P_{t_2}, P) > D$.

O anjo é seu próprio inimigo

O anjo não volta

O anjo é seu próprio inimigo

O anjo não volta

- Imagine que exista alguma casa que o anjo volte infinitas vezes. Então o demônio, sem mudar em nada sua estratégia, pode evitar que isso aconteça

O anjo é seu próprio inimigo

O anjo não volta

- Imagine que exista alguma casa que o anjo volte infinitas vezes. Então o demônio, sem mudar em nada sua estratégia, pode evitar que isso aconteça
- Note que toda vez que o anjo volta o demônio tem um movimento de graça (pois o movimento da sua estratégia previsto para quando o anjo estivesse naquela casa já foi feito)

O anjo é seu próprio inimigo

O anjo não volta

- Imagine que exista alguma casa que o anjo volte infinitas vezes. Então o demônio, sem mudar em nada sua estratégia, pode evitar que isso aconteça
- Note que toda vez que o anjo volta o demônio tem um movimento de graça (pois o movimento da sua estratégia previsto para quando o anjo estivesse naquela casa já foi feito)
- Então o demônio pode usar esses movimentos para fazer um "buraco"em volta daquela casa $(2k + 1 \times 2k + 1)$

O anjo é seu próprio inimigo

O anjo não volta

- Imagine que exista alguma casa que o anjo volte infinitas vezes. Então o demônio, sem mudar em nada sua estratégia, pode evitar que isso aconteça
- Note que toda vez que o anjo volta o demônio tem um movimento de graça (pois o movimento da sua estratégia previsto para quando o anjo estivesse naquela casa já foi feito)
- Então o demônio pode usar esses movimentos para fazer um "buraco"em volta daquela casa $(2k + 1 \times 2k + 1)$
- Portanto o anjo volta para um quadrado para onde ele poderia ter se movido antes uma quantidade finita de vezes

O anjo é seu próprio inimigo

Quem precisa do demônio?

O anjo é seu próprio inimigo

Quem precisa do demônio?

- Portanto não muda para o anjo se todas as casas em que ele poderia ter pousado e não o fez forem destruídas

O anjo é seu próprio inimigo

Quem precisa do demônio?

- Portanto não muda para o anjo se todas as casas em que ele poderia ter pousado e não o fez forem destruídas
- Imagine que o anjo está em alguma casa (que só passaria uma quantidade finita de vezes), então ele analisa todas as possibilidades de jogadas futuras e joga como se estivesse na última jogada em que faria isso. Dessa forma ele está melhor do que estaria se seguisse sua estratégia, pois o demônio destruiu menos casas

O anjo tem chance?

2^o Chute

O anjo tem chance?

2^o Chute

- $k = 1.000$?

O anjo tem chance?

2º Chute

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?

O anjo tem chance?

2^{o} Chute

- $k = 1.000?$
- $k = 100?$
- $k = 10?$

O anjo tem chance?

2^{o} Chute

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?

O anjo tem chance?

2º Chute

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?
- $k = 2$?

O anjo tem chance?

2^{o} Chute

- $k = 1.000$?
- $k = 100$?
- $k = 10$?
- $k = 5$?
- $k = 2$?
- O demônio vence qualquer anjo?

O problema

Um problema de ”quase”1 milhão de dólares

O problema

Um problema de ”quase”1 milhão de dólares

- O jogo foi descrito pela primeira vez no livro “Winning ways”, de Berlekamp, Conway e Guy

O problema

Um problema de ”quase”1 milhão de dólares

- O jogo foi descrito pela primeira vez no livro “Winning ways”, de Berlekamp, Conway e Guy
- Em 1996 John Conway publicou o artigo “The angel problem”, onde demonstrou os resultados expostos aqui e ofereceu uma recompensa pela solução do problema

O problema

Um problema de "quase"1 milhão de dólares

- O jogo foi descrito pela primeira vez no livro "Winning ways", de Berlekamp, Conway e Guy
- Em 1996 John Conway publicou o artigo "The angel problem", onde demonstrou os resultados expostos aqui e ofereceu uma recompensa pela solução do problema
- O prêmio era de $100,00 para quem mostrasse que algum anjo poderia vencer e $1.000,00 para quem mostrasse que o demônio vence qualquer anjo

O problema

Um problema de ”quase”1 milhão de dólares

- O jogo foi descrito pela primeira vez no livro “Winning ways”, de Berlekamp, Conway e Guy
- Em 1996 John Conway publicou o artigo “The angel problem”, onde demonstrou os resultados expostos aqui e ofereceu uma recompensa pela solução do problema
- O prêmio era de $100,00 para quem mostrasse que algum anjo poderia vencer e $1.000,00 para quem mostrasse que o demônio vence qualquer anjo
- Em 2006 o livro “Mathematical puzzles”ajudou a divulgar o problema; pouco tempo depois surgiram quatro provas distintas

O problema

Um problema de ”quase”1 milhão de dólares

- O jogo foi descrito pela primeira vez no livro “Winning ways”, de Berlekamp, Conway e Guy
- Em 1996 John Conway publicou o artigo “The angel problem”, onde demonstrou os resultados expostos aqui e ofereceu uma recompensa pela solução do problema
- O prêmio era de $100,00 para quem mostrasse que algum anjo poderia vencer e $1.000,00 para quem mostrasse que o demônio vence qualquer anjo
- Em 2006 o livro “Mathematical puzzles”ajudou a divulgar o problema; pouco tempo depois surgiram quatro provas distintas
- A prova que mostraremos aqui é a de András Mathé, publicada no artigo “The angel of power 2 wins”

A solução

O demônio bonzinho

A solução

O demônio bonzinho

- Em primeiro lugar definimos cada casa do tabuleiro como um par ordenado de números inteiros e usamos a distância do tabuleiro de xadrez, ou seja, a distância entre (a, b) e (c, d) é $max\{|a-c|, |b-d|\}$ (o mínimo de movimentos que um rei faz para ir de um ponto a outro).
- Nessa prova o anjo jogará contra o demônio bonzinho, que é o demônio que nunca come uma casa onde o anjo poderia ter pousado anteriormente (mesmo que não tenha pousado).

A solução

O demônio bonzinho

- Em primeiro lugar definimos cada casa do tabuleiro como um par ordenado de números inteiros e usamos a distância do tabuleiro de xadrez, ou seja, a distância entre (a, b) e (c, d) é $max\{|a - c|, |b - d|\}$ (o mínimo de movimentos que um rei faz para ir de um ponto a outro).
- Nessa prova o anjo jogará contra o demônio bonzinho, que é o demônio que nunca come uma casa onde o anjo poderia ter pousado anteriormente (mesmo que não tenha pousado).
- Obviamente temos que mudar o critério de vitória, que passa a ser se o demônio consegue confinar o anjo em uma “bola” $B(N) = \{c \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | d(c, 0) < N\}$.

A solução

Ferramentas

A solução

Ferramentas

- Se o demônio tem estratégia vencedora contra o k-anjo, então confina o anjo em uma bola $B(N)$ para algum N.

A solução

Ferramentas

- Se o demônio tem estratégia vencedora contra o k-anjo, então confina o anjo em uma bola $B(N)$ para algum N.
  - Se o demônio vence, então o jogo acaba em n jogadas, portanto o anjo fica confinado na bola $B(nk)$.

A solução

Ferramentas

- Se o demônio tem estratégia vencedora contra o k-anjo, então confina o anjo em uma bola $B(N)$ para algum N.
  - Se o demônio vence, então o jogo acaba em n jogadas, portanto o anjo fica confinado na bola $B(nk)$.
- Uma jornada do k-anjo é uma sequência de casas $(v_0, v_1, ..., v_n)$ em que $v_0 = 0$ e $d(v_i, v_{i+1}) \leq k$.

A solução

Ferramentas

- Se o demônio tem estratégia vencedora contra o k-anjo, então confina o anjo em uma bola $B(N)$ para algum N.
  - Se o demônio vence, então o jogo acaba em n jogadas, portanto o anjo fica confinado na bola $B(nk)$.
- Uma jornada do k-anjo é uma sequência de casas $(v_0, v_1, ..., v_n)$ em que $v_0 = 0$ e $d(v_i, v_{i+1}) \leq k$.
- Uma estratégia do demônio é uma função que, para cada jornada do anjo, devolve uma casa (ou o vazio). Deixamos o demônio passar sua jogada para que toda a informação do jogo esteja na jornada do anjo.

A solução

Ferramentas

- Uma jornada é válida se nela o anjo não passou por nenhuma casa que já havia sido destruída pelo demônio.

A solução

Ferramentas

- Uma jornada é válida se nela o anjo não passou por nenhuma casa que já havia sido destruída pelo demônio.
- Dada uma jornada $(v_0, ..., v_n)$ qualquer do k-anjo, podemos construir a jornada reduzida. A última casa da jornada reduzida é v_n, depois tomamos a anterior como sendo v_i tal que i é o menor número tal que $d(v_i, v_n) \leq k$. Procedemos assim até chegarmos em v_0. Teremos então uma jornada $(u_0, ..., u_m)$ com $u_0 = v_0$ e $u_m = v_n$, com $m \leq n$. A jornada reduzida é única.

A solução

Metade do caminho

A solução

Metade do caminho

- Se o demônio, com uma estratégia ϕ, confina o k-anjo em $B(N)$, então existe uma estratégia vencedora ψ para o demônio bonzinho.

Metade do caminho

- Se o demônio, com uma estratégia ϕ, confina o k-anjo em $B(N)$, então existe uma estratégia vencedora ψ para o demônio bonzinho.
  Seja $(v_0, ..., v_n)$ uma jornada e $(u_0, ..., u_m)$ a correspondente jornada reduzida. Definimos $z = \phi(u_0, .., u_m)$. Afirmamos que

$$\psi(v_0, ..., v_n) = \begin{cases} z & \text{se } d(z, v_i) \geq k, \forall 0 \leq i \leq n \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  é uma estratégia vencedora para o demônio bonzinho.

A solução

Metade do caminho

- Basta notar que se $(v_0, .., v_n)$ é jornada válida contra ϕ, então $(u_0, ..., u_m)$ é válida contra ψ.

A solução

Metade do caminho

- Basta notar que se $(v_0, .., v_n)$ é jornada válida contra ϕ, então $(u_0, ..., u_m)$ é válida contra ψ.
- Suponha que não, então existem s e t com $0 < s < t \leq m$ e $\phi(u_0, .., u_s) = u_t$. Definimos $u_s = v_{s'}$ e $u_t = u_{t'}$, note que $s' < t'$.

A solução

Metade do caminho

- Basta notar que se $(v_0, .., v_n)$ é jornada válida contra ϕ, então $(u_0, ..., u_m)$ é válida contra ψ.
- Suponha que não, então existem s e t com $0 < s < t \leq m$ e $\phi(u_0, .., u_s) = u_t$. Definimos $u_s = v_{s'}$ e $u_t = u_{t'}$, note que $s' < t'$.
- Note que $(u_0, ..., u_s)$ é jornada reduzida de $(v_0, ..., v_{s'})$, então temos: $\psi(v_0, .., v_s') = \phi(u_0, ..., u_s) = u_t = v_{t'}$ ou $\psi(v_0, .., v_s') = \emptyset$

Metade do caminho

- Como essa jornada é válida, temos que a resposta foi $\emptyset$, portanto existe algum $l < s'$ tal que $d(v_{t'}, v_l) \leq k$, o que contradiz o fato de $(u_0, ..., u_m)$ ser reduzida de $(v_0, ..., v_n)$, pois se $l < s < t$ e $d(v_{t'}, v_l) < k$, então u_s não pertence à reduzida.

A solução

Metade do caminho

- Como essa jornada é válida, temos que a resposta foi $\emptyset$, portanto existe algum $l < s'$ tal que $d(v_{t'}, v_l) \leq k$, o que contradiz o fato de $(u_0, ..., u_m)$ ser reduzida de $(v_0, ..., v_n)$, pois se $l < s < t$ e $d(v_{t'}, v_l) < k$, então u_s não pertence à reduzida.
- Como $u_m \in B(N)$ para qualquer jornada reduzida válida, temos que $v_n \in B(N)$ para toda jornada, ou seja, o demônio bonzinho confina o k-anjo.

A solução

A estratégia

A solução

A estratégia

- Agora tudo o que precisamos é mostrar que existe uma estratégia vencedora do 2-anjo contra o demônio bonzinho, e ela é surpreendentemente simples.

A solução

A estratégia

- Agora tudo o que precisamos é mostrar que existe uma estratégia vencedora do 2-anjo contra o demônio bonzinho, e ela é surpreendentemente simples.
- Vamos considerar o anjo como um corredor que corre o máximo possível mantendo a mão esquerda encostada na parede. As paredes são as casas destruídas.

A solução

A estratégia

- Agora tudo o que precisamos é mostrar que existe uma estratégia vencedora do 2-anjo contra o demônio bonzinho, e ela é surpreendentemente simples.
- Vamos considerar o anjo como um corredor que corre o máximo possível mantendo a mão esquerda encostada na parede. As paredes são as casas destruídas.
- Vamos considerar que todas as casas (x, y) com $x < 0$ já começam destruídas (o que beneficia o demônio).

A solução

A estratégia

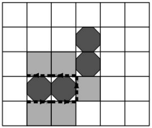
- Agora tudo o que precisamos é mostrar que existe uma estratégia vencedora do 2-anjo contra o demônio bonzinho, e ela é surpreendentemente simples.
- Vamos considerar o anjo como um corredor que corre o máximo possível mantendo a mão esquerda encostada na parede. As paredes são as casas destruídas.
- Vamos considerar que todas as casas (x, y) com $x < 0$ já começam destruídas (o que beneficia o demônio).
- Além disso, pedimos que o demônio apenas não destrua nenhuma casa que esteja no caminho por onde o anjo passou.

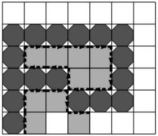
A solução

Exemplos

Exemplos

Para ficar mais fácil vamos considerar que o anjo pinta uma linha verde nas paredes (preto nas arestas) e pinta as casas por onde passa de azul (cinza claro).





A solução

Ferramentas

A solução

Ferramentas

- Para cada segmento verde, temos umas casa destruída à esquerda e uma casa azul à direita.

A solução

Ferramentas

- Para cada segmento verde, temos umas casa destruída à esquerda e uma casa azul à direita.
- Se o anjo pintar uma parede mais de uma vez, a pintará na mesma direção.

A solução

Ferramentas

- Para cada segmento verde, temos umas casa destruída à esquerda e uma casa azul à direita.
- Se o anjo pintar uma parede mais de uma vez, a pintará na mesma direção.
- Se o anjo pintar a mesma parede duas vezes, então a primeira em que isso ocorre será a primeira parede que o anjo pintou no jogo. Nesse caso a linha verde forma um círculo.

A solução

Ferramentas

- Para cada segmento verde, temos umas casa destruída à esquerda e uma casa azul à direita.
- Se o anjo pintar uma parede mais de uma vez, a pintará na mesma direção.
- Se o anjo pintar a mesma parede duas vezes, então a primeira em que isso ocorre será a primeira parede que o anjo pintou no jogo. Nesse caso a linha verde forma um círculo.
  As afirmações acima são simples, apenas devemos lembrar que o demônio não destrói nenhuma casa pintada de azul.

A solução

Ferramentas

- Um conjunto S de casas está conectado se $\forall a, b \in S$ existe um caminho $(c_0, ..., c_n)$ em que c_i e $c_i + 1$ são adjacentes $\forall 0 \leq i < n$ com $c_0 = a$ e $c_n = b$.

A solução

Ferramentas

- Um conjunto S de casas está conectado se $\forall a, b \in S$ existe um caminho $(c_0, ..., c_n)$ em que c_i e $c_i + 1$ são adjacentes $\forall 0 \leq i < n$ com $c_0 = a$ e $c_n = b$.
  Note que a fronteira de um conjunto de n casas conectadas tem no máximo $2n + 2$ paredes. (prova simples por indução)

A solução

Ferramentas

- Um conjunto S de casas está conectado se $\forall a, b \in S$ existe um caminho $(c_0, ..., c_n)$ em que c_i e $c_i + 1$ são adjacentes $\forall 0 \leq i < n$ com $c_0 = a$ e $c_n = b$.
  Note que a fronteira de um conjunto de n casas conectadas tem no máximo $2n + 2$ paredes. (prova simples por indução)
- Note também que o anjo pinta no mínimo 2 paredes por jogada.

A solução

Para os finalmentes

A solução

Para os finalmentes

- A linha verde nunca chegará no eixo x novamente.

A solução

Para os finalmentes

- A linha verde nunca chegará no eixo x novamente.
  Por absurdo, suponha que isso acontece no t-ésimo turno, e a casa em que isso acontece seja $(x_0, 0)$. O demônio destruiu no máximo t casas e o anjo pintou no mínimo $2(t-1)+1$ paredes.

A solução

Para os finalmentes

- A linha verde nunca chegará no eixo x novamente.
  Por absurdo, suponha que isso acontece no t-ésimo turno, e a casa em que isso acontece seja $(x_0, 0)$. O demônio destruiu no máximo t casas e o anjo pintou no mínimo $2(t-1)+1$ paredes.
  Seja d o número de casas que o demônio destruiu na área $\{(x, y) | x \geq 0$ e $y \geq 0\}$ e a o número de paredes pintadas pelo anjo, então: $d \leq t$ e $a \geq 2t - 1$.

A solução

Para os finalmentes

- A linha verde nunca chegará no eixo x novamente.
  Por absurdo, suponha que isso acontece no t-ésimo turno, e a casa em que isso acontece seja $(x_0, 0)$. O demônio destruiu no máximo t casas e o anjo pintou no mínimo $2(t-1)+1$ paredes.
  Seja d o número de casas que o demônio destruiu na área $\{(x, y)|x \geq 0$ e $y \geq 0\}$ e a o número de paredes pintadas pelo anjo, então: $d \leq t$ e $a \geq 2t - 1$.
  Vamos parar o jogo nesse momento. Vamos colocar de volta todas as casas destruídas nas áreas $\{(x, y)|y < 0\}$, $\{(x, y)|x < 0\}$ e $\{(x, y)|y > N\}$, com $N - 100$ (arbitrário) maior que a coordenada y de qualquer casa azul do jogo.

A solução

Para os finalmentes

Imagine que o anjo continua se movendo, sem o demônio jogar, até voltar à casa $(0, 0)$, formando um 'círculo', e seja l o comprimento dessa trajetória.

A solução

Para os finalmentes

Imagine que o anjo continua se movendo, sem o demônio jogar, até voltar à casa $(0, 0)$, formando um 'círculo', e seja l o comprimento dessa trajetória.
O anjo pintou a casas no jogo normal, depois pintará a parede sul da casa $(x_0, 0)$ (fazendo a volta). Para chegar na casa $(0, N)$ terá que pintar ao menos N casa para o norte e $x_0 + 1$ para o oeste e finalmente contornar a parede, pintando $N + 2$ casas, ou seja, $l \geq a + 2N + 5$.

Para os finalmentes

Imagine que o anjo continua se movendo, sem o demônio jogar, até voltar à casa $(0, 0)$, formando um 'círculo', e seja l o comprimento dessa trajetória.
O anjo pintou a casas no jogo normal, depois pintará a parede sul da casa $(x_0, 0)$ (fazendo a volta). Para chegar na casa $(0, N)$ terá que pintar ao menos N casa para o norte e $x_0 + 1$ para o oeste e finalmente contornar a parede, pintando $N + 2$ casas, ou seja, $l \geq a + 2N + 5$. É fácil ver que as casas que foram pintadas formam uma família conectada, e portanto tem no máximo $(l - 2)/2$ casas, por outro lado, essa família tem, no máximo, $N + d$ casas, portanto:

A solução

Finalmente

A solução

Finalmente

$$N + d \geq \frac{l-2}{2}$$

A solução

Finalmente

$$N + d \geq \frac{l-2}{2} \geq \frac{(a+2N+5)-2}{2} = N + \frac{a+3}{2}$$

A solução

Finalmente

$$N + d \geq \frac{l-2}{2} \geq \frac{(a+2N+5)-2}{2} = N + \frac{a+3}{2}$$
$$N + t \geq N + \frac{(2t-1)+3}{2} = N + t + 1$$

- Portanto o anjo pinta infinitas paredes diferentes, ou seja, não fica confinado em nenhuma área.

A solução

Finalmente

$$N + d \geq \frac{l-2}{2} \geq \frac{(a+2N+5)-2}{2} = N + \frac{a+3}{2}$$
$$N + t \geq N + \frac{(2t-1)+3}{2} = N + t + 1$$

- Portanto o anjo pinta infinitas paredes diferentes, ou seja, não fica confinado em nenhuma área.
- Então o demônio bonzinho não vence o anjo, portanto o demônio não vence o anjo.

A solução

O demônio não consegue pegar o anjo!

Obrigado!

Referências

- Winning Ways for your Mathematical Plays - Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy
- The angel problem - John H. Conway
- Games of no chance - Richard J. Nowakowski
- The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots - Martin Kutz, Attila Pór
- The angel of power 2 wins - Andras Mathé