Quanto um exército pode avançar em território inimigo?

(Complete a sequência: 2,4,8,20,?)

Érik Amorim

(ICMC - USP São Carlos)

Abril de 2013

Solitaire Army ou Conway's Soldiers

Solitaire Army ou Conway's Soldiers

Objetivo: avançar com alguma peça o máximo possível além da fronteira

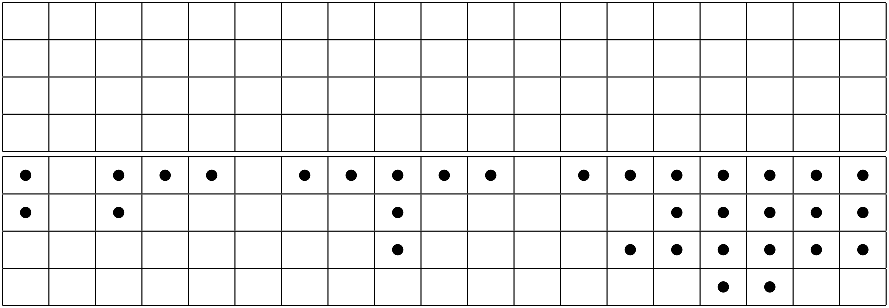
Movimentos permitidos: os mesmos do Resta Um

Jogo

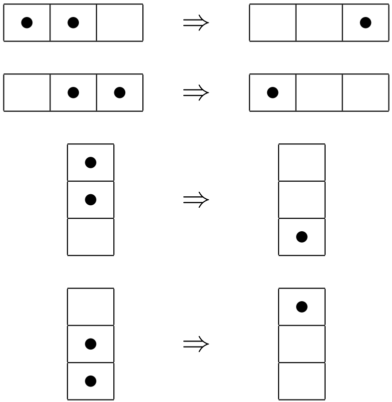
Solitaire Army ou Conway's Soldiers

Objetivo: avançar com alguma peça o máximo possível além da fronteira

Movimentos permitidos: os mesmos do Resta Um



Movimentos do Resta Um



Séries

Série: é uma soma infinita

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots =$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \infty$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \infty$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots =$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \infty$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \infty$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$
$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots =$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1+2+3+4+5+\cdots=\infty$$
$$1+1+1+1+1+\cdots=\infty$$
$$\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\cdots=\infty$$
$$\text{se } \varepsilon>0$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \infty$$
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$
$$\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \cdots = \infty$$
$$\text{se } \varepsilon > 0$$
$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots =$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$1+2+3+4+5+\cdots=\infty$$
$$1+1+1+1+1+\cdots=\infty$$
$$\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\cdots=\infty$$
$$\text{se } \varepsilon>0$$
$$0+0+0+0+0+\cdots=0$$

Séries

Série: é uma soma infinita

$$
\begin{gathered}
1+2+3+4+5+\cdots=\infty \\
1+1+1+1+1+\cdots=\infty \\
\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\cdots=\infty \\
\text{se } \varepsilon>0 \\
0+0+0+0+0+\cdots=0
\end{gathered}
$$

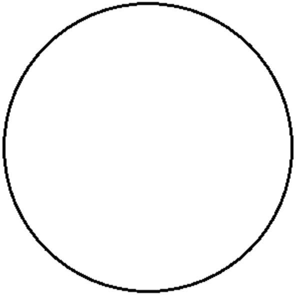
Os termos de uma série precisam ficar cada vez menores para que ela tenha soma finita.

Série da Pizza

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=?$$

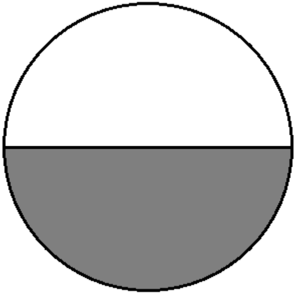
Série da Pizza

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=?$$



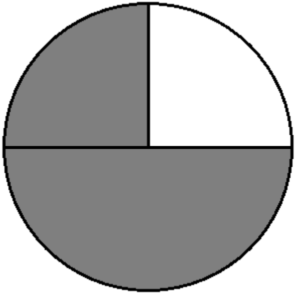
Série da Pizza

$$\frac{1}{2}$$



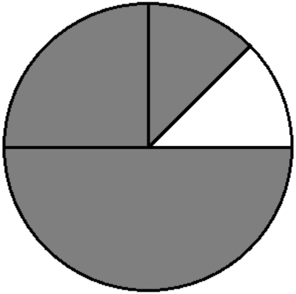
Série da Pizza

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$



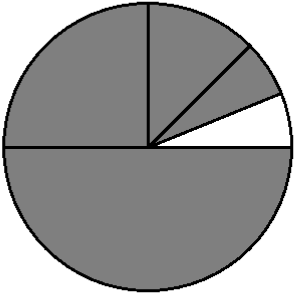
Série da Pizza

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$



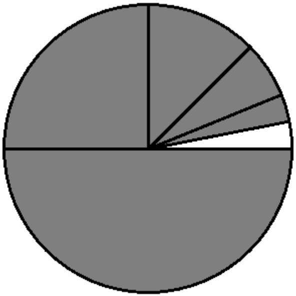
Série da Pizza

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$



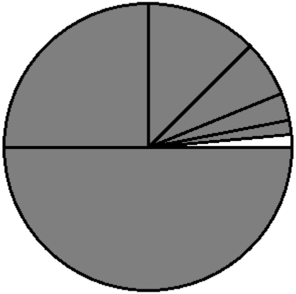
Série da Pizza

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$$



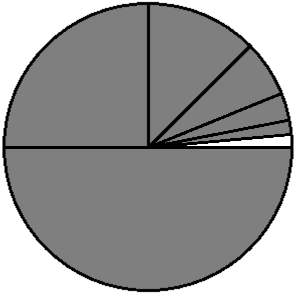
Série da Pizza

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$



Série da Pizza

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$$

Série dos Dígitos

$$3 \qquad\qquad\qquad\qquad + $$

Série dos Dígitos

$$
\begin{array}{llll}
3 & & & + \\
0 & , & 1 & +
\end{array}
$$

Série dos Dígitos

$$\begin{array}{lllll} 3 & & & & + \\ 0 & , & 1 & & + \\ 0 & , & 0 & 4 & + \end{array}$$

Série dos Dígitos

$$
\begin{array}{lllll}
3 & & & & + \\
0 & , & 1 & & + \\
0 & , & 0\;\;4 & & + \\
0 & , & 0\;\;0\;\;1 & & +
\end{array}
$$

Série dos Dígitos

$$
\begin{array}{llllllll}
3 & & & & & & & + \\
0 & , & 1 & & & & & + \\
0 & , & 0 & 4 & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 5 & & +
\end{array}
$$

Série dos Dígitos

$$\begin{array}{lllllllll}
3 & & & & & & & & + \\
0 & , & 1 & & & & & & + \\
0 & , & 0 & 4 & & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 5 & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & & +
\end{array}$$

Série dos Dígitos

$$\begin{array}{ccccccccc}
3 & & & & & & & & + \\
0 & , & 1 & & & & & & + \\
0 & , & 0 & 4 & & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 5 & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & +
\end{array}$$

Série dos Dígitos

$$
\begin{array}{ccccccccc}
3 & & & & & & & & + \\
0 & , & 1 & & & & & & + \\
0 & , & 0 & 4 & & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 5 & & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & & + \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & + \\
\vdots & & & & & & & & =
\end{array}
$$

Série dos Dígitos

$$
\begin{array}{cccccccccc}
3 & & & & & & & & + & \\
0 & , & 1 & & & & & & + & \\
0 & , & 0 & 4 & & & & & + & \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & & & & + & \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 5 & & & + & \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & & + & \\
0 & , & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & + & \\
\vdots & & & & & & & & = & \pi
\end{array}
$$

Série Harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=?$$

Série Harmônica

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = ?$$

Apesar dos termos ficarem cada vez menores, a soma é ∞.

Série Harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=?$$

Apesar dos termos ficarem cada vez menores, a soma é ∞.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{9}+\cdots}>$$

Série Harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=?$$

Apesar dos termos ficarem cada vez menores, a soma é ∞.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{9}+\cdots}>$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{16}+\cdots}=$$

Série Harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=?$$

Apesar dos termos ficarem cada vez menores, a soma é ∞.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{9}+\cdots}>$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{16}+\cdots}=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=$$

Série Harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=?$$

Apesar dos termos ficarem cada vez menores, a soma é ∞.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{9}+\cdots}>$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\overbrace{\frac{1}{16}+\cdots}=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

Séries Legais

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots=$$

Séries Legais

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Séries Legais

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=$$

Séries Legais

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\log(2)$$

Séries Legais

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ \log(2)$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320}+\cdots=$$

Séries Legais

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\log(2)$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320}+\cdots=e$$

Séries Legais

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \cdots =$$

Séries Legais

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \cdots = \pi$$

Séries Legais

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \cdots = \pi$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(\frac{0!(1103)}{0!^4 396^0} + \frac{4!(1103 + 26390)}{1!^4 396^4} + \frac{8!(1103 + 2 \times 26390)}{2!^4 396^8} + \right.$$

$$\left. + \frac{12!(1103 + 3 \times 26390)}{3!^4 396^{12}} + \frac{16!(1103 + 4 \times 26390)}{4!^4 396^{16}} + \cdots \right) =$$

Séries Legais

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \cdots = \pi$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(\frac{0!(1103)}{0!^4 396^0} + \frac{4!(1103 + 26390)}{1!^4 396^4} + \frac{8!(1103 + 2 \times 26390)}{2!^4 396^8} + \right.$$

$$\left. + \frac{12!(1103 + 3 \times 26390)}{3!^4 396^{12}} + \frac{16!(1103 + 4 \times 26390)}{4!^4 396^{16}} + \cdots\right) = \frac{1}{\pi}$$

Séries Legais

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \cdots = \pi$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(\frac{0!(1103)}{0!^4 396^0} + \frac{4!(1103 + 26390)}{1!^4 396^4} + \frac{8!(1103 + 2 \times 26390)}{2!^4 396^8} + \right.$$

$$\left. + \frac{12!(1103 + 3 \times 26390)}{3!^4 396^{12}} + \frac{16!(1103 + 4 \times 26390)}{4!^4 396^{16}} + \cdots \right) = \frac{1}{\pi}$$

$$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{34} + \arctan\frac{1}{89} + \cdots =$$

Séries Legais

$$\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}+\cdots=\pi$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(\frac{0!(1103)}{0!^4 396^0}+\frac{4!(1103+26390)}{1!^4 396^4}+\frac{8!(1103+2\times 26390)}{2!^4 396^8}+\right.$$
$$\left.+\frac{12!(1103+3\times 26390)}{3!^4 396^{12}}+\frac{16!(1103+4\times 26390)}{4!^4 396^{16}}+\cdots\right)=\frac{1}{\pi}$$

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{13}+\arctan\frac{1}{34}+\arctan\frac{1}{89}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Séries Legais

Seja $p(n)$ o número de maneiras de escrever o número inteiro positivo n como soma de inteiros positivos, não importando a ordem da soma.

Séries Legais

Seja $p(n)$ o número de maneiras de escrever o número inteiro positivo n como soma de inteiros positivos, não importando a ordem da soma. Foi provado por Rademacher em 1937 que

Séries Legais

Seja $p(n)$ o número de maneiras de escrever o número inteiro positivo n como soma de inteiros positivos, não importando a ordem da soma. Foi provado por Rademacher em 1937 que

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn} \left[\frac{1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \operatorname{senh} \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right) \right]$$

onde

$$A_k(n) = \sum_{0 \leq m < k, (m,k)=1} e^{\pi i (s(m,k) - \frac{1}{k} 2mn)}$$

Série Geométrica

Série Geométrica: é qualquer série da forma

$$a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

com $a \in \mathbb{R}_+$ e $j \in \mathbb{N}$.

Série Geométrica

Série Geométrica: é qualquer série da forma

$$a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

com $a \in \mathbb{R}_+$ e $j \in \mathbb{N}$.

Se $a > 1$, os termos ficam cada vez maiores e a soma é ∞.

Série Geométrica

Série Geométrica: é qualquer série da forma

$$a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

com $a \in \mathbb{R}_+$ e $j \in \mathbb{N}$.

Se $a > 1$, os termos ficam cada vez maiores e a soma é ∞.
Se $a = 1$, a série é a soma de infinitos 1's, que dá ∞.

Série Geométrica

Série Geométrica: é qualquer série da forma

$$a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

com $a \in \mathbb{R}_+$ e $j \in \mathbb{N}$.

Se $a > 1$, os termos ficam cada vez maiores e a soma é ∞.
Se $a = 1$, a série é a soma de infinitos 1's, que dá ∞.
O caso interessante é quando $a < 1$.

Série Geométrica

Para $0 < a < 1$ e $j \in \mathbb{N}$:

$$S = a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

Série Geométrica

Para $0 < a < 1$ e $j \in \mathbb{N}$:

$$S = a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

$$aS = a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + a^{j+4} + \cdots$$

Série Geométrica

Para $0 < a < 1$ e $j \in \mathbb{N}$:

$$S = a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

$$aS = a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + a^{j+4} + \cdots$$

$$S - aS = a^j$$

Série Geométrica

Para $0 < a < 1$ e $j \in \mathbb{N}$:

$$S = a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

$$aS = a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + a^{j+4} + \cdots$$

$$S - aS = a^j \Rightarrow S(1-a) = a^j$$

Série Geométrica

Para $0 < a < 1$ e $j \in \mathbb{N}$:

$$S = a^j + a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + \cdots$$

$$aS = a^{j+1} + a^{j+2} + a^{j+3} + a^{j+4} + \cdots$$

$$S - aS = a^j \Rightarrow S(1-a) = a^j$$

$$S = \frac{a^j}{1-a}$$

Não é possível chegar na linha 5

Não é possível chegar na linha 5

- Demonstração pela técnica de invariantes.

Não é possível chegar na linha 5

- Demonstração pela técnica de invariantes.
- Cada configuração do tabuleiro terá um valor associado.

Não é possível chegar na linha 5

- Demonstração pela técnica de invariantes.
- Cada configuração do tabuleiro terá um valor associado.
- O valor não aumenta com os movimentos permitidos.

Não é possível chegar na linha 5

- Demonstração pela técnica de invariantes.
- Cada configuração do tabuleiro terá um valor associado.
- O valor não aumenta com os movimentos permitidos.
- O valor das configurações que têm uma peça na linha 5 é maior que qualquer valor inicial, quando todas as peças estão abaixo da fronteira.

Valores das casas

Seja a um número positivo qualquer.

Valores das casas

Seja a um número positivo qualquer. Atribuir a cada casa uma potência de a:

		a^1	1	a^1		
			a^1			

Valores das casas

Seja a um número positivo qualquer. Atribuir a cada casa uma potência de a:

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	
		a^3	a^2	a^3		

Valores das casas

Seja a um número positivo qualquer. Atribuir a cada casa uma potência de a:

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
a^4	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^4	a^3	a^2	a^3	a^4	a^5
a^6	a^5	a^4	a^3	a^4	a^5	a^6
a^7	a^6	a^5	a^4	a^5	a^6	a^7
a^8	a^7	a^6	a^5	a^6	a^7	a^8
a^9	a^8	a^7	a^6	a^7	a^8	a^9
a^{10}	a^9	a^8	a^7	a^8	a^9	a^{10}
a^{11}	a^{10}	a^9	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
a^{12}	a^{11}	a^{10}	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}

Valores das casas

Seja a um número positivo qualquer. Atribuir a cada casa uma potência de a:

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
a^4	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^4	a^3	a^2	a^3	a^4	a^5
a^6	a^5	a^4	a^3	a^4	a^5	a^6
a^7	a^6	a^5	a^4	a^5	a^6	a^7
a^8	a^7	a^6	a^5	a^6	a^7	a^8
a^9	a^8	a^7	a^6	a^7	a^8	a^9
a^{10}	a^9	a^8	a^7	a^8	a^9	a^{10}
a^{11}	a^{10}	a^9	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
a^{12}	a^{11}	a^{10}	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}

A casa de valor 1 é aquela que queremos atingir.

Invariante

Valor de uma configuração do tabuleiro: soma dos valores das casas ocupadas.

Invariante

Valor de uma configuração do tabuleiro: soma dos valores das casas ocupadas. O valor da configuração final que queremos atingir, com uma peça na quinta linha, é 1.

Invariante

Valor de uma configuração do tabuleiro: soma dos valores das casas ocupadas. O valor da configuração final que queremos atingir, com uma peça na quinta linha, é 1. O valor da configuração inicial, com finitas peças abaixo da fronteira, é $< S$, onde S é a soma infinita de todos os valores das casas abaixo da fronteira.

Invariante

Valor de uma configuração do tabuleiro: soma dos valores das casas ocupadas. O valor da configuração final que queremos atingir, com uma peça na quinta linha, é 1. O valor da configuração inicial, com finitas peças abaixo da fronteira, é $< S$, onde S é a soma infinita de todos os valores das casas abaixo da fronteira.

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
a^4	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^4	a^3	a^2	a^3	a^4	a^5
a^6	a^5	a^4	a^3	a^4	a^5	a^6
a^7	a^6	a^5	a^4	a^5	a^6	a^7
a^8	a^7	a^6	a^5	a^6	a^7	a^8
a^9	a^8	a^7	a^6	a^7	a^8	a^9
a^{10}	a^9	a^8	a^7	a^8	a^9	a^{10}

Invariante

O número *a* deve satisfazer:

Invariante

O número a deve satisfazer:

- $a > 0$

Invariante

O número a deve satisfazer:

- $a > 0$
- $a < 1$ (para que a soma da série geométrica seja finita)

Invariante

O número a deve satisfazer:

- $a > 0$
- $a < 1$ (para que a soma da série geométrica seja finita)
- $S \leq 1$

Invariante

O número a deve satisfazer:

- $a > 0$
- $a < 1$ (para que a soma da série geométrica seja finita)
- $S \leq 1$
- Cada movimento permitido não aumenta o valor da configuração do tabuleiro.

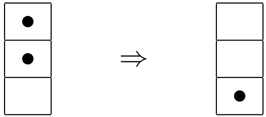
Invariante

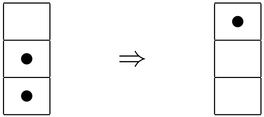
O número a deve satisfazer:

- $a > 0$
- $a < 1$ (para que a soma da série geométrica seja finita)
- $S \leq 1$
- Cada movimento permitido não aumenta o valor da configuração do tabuleiro.

Onde S é a soma infinita de todas as casas abaixo da fronteira.

Movimentos permitidos na vertical





Movimentos permitidos na vertical

a^j
a^{j+1}
a^{j+2}

Movimentos permitidos na vertical

a^j
a^{j+1}
a^{j+2}

$$a^j + a^{j+1} \mapsto a^{j+2} \qquad \text{ou} \qquad a^{j+1} + a^{j+2} \mapsto a^j$$

Movimentos permitidos na vertical

$$\begin{array}{|c|}\hline a^j \\ \hline a^{j+1} \\ \hline a^{j+2} \\ \hline \end{array}$$

$$a^j + a^{j+1} \mapsto a^{j+2} \qquad \text{ou} \qquad a^{j+1} + a^{j+2} \mapsto a^j$$

$$a^{j+2} \leq a^j + a^{j+1} \qquad \text{e} \qquad a^j \leq a^{j+1} + a^{j+2}$$

Movimentos permitidos na vertical

$$a^{j+2} \leq a^{j} + a^{j+1} \qquad \text{e} \qquad a^{j} \leq a^{j+1} + a^{j+2}$$

Movimentos permitidos na vertical

$$a^{j+2} \leq a^j + a^{j+1} \qquad \text{e} \qquad a^j \leq a^{j+1} + a^{j+2}$$

$$a^2 \leq 1 + a \qquad \text{e} \qquad 1 \leq a + a^2$$

Movimentos permitidos na vertical

$$a^{j+2} \leq a^j + a^{j+1} \qquad \text{e} \qquad a^j \leq a^{j+1} + a^{j+2}$$

$$a^2 \leq 1 + a \qquad \text{e} \qquad 1 \leq a + a^2$$

$$a^2 - a - 1 \leq 0 \qquad \text{e} \qquad a^2 + a - 1 \geq 0$$

Movimentos permitidos na vertical

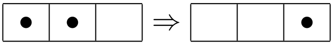
$$a^{j+2} \leq a^j + a^{j+1} \qquad \text{e} \qquad a^j \leq a^{j+1} + a^{j+2}$$

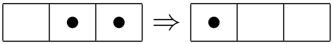
$$a^2 \leq 1 + a \qquad \text{e} \qquad 1 \leq a + a^2$$

$$a^2 - a - 1 \leq 0 \qquad \text{e} \qquad a^2 + a - 1 \geq 0$$

$$\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad \left[a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } a \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Movimentos permitidos na horizontal





Movimentos permitidos na horizontal

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \bullet \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bullet & \bullet \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & & \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a^j & a^{j+1} & a^{j+2} \\ \hline\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a^{j+2} & a^{j+1} & a^j \\ \hline\end{array} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a^{j+1} & a^j & a^{j+1} \\ \hline\end{array}$$

Movimentos permitidos na horizontal

•	•		$\Rightarrow$			•

	•	•	$\Rightarrow$	•		

a^j	a^{j+1}	a^{j+2}

ou

a^{j+2}	a^{j+1}	a^j

ou

a^{j+1}	a^j	a^{j+1}

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
a^4	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^4	a^3	a^2	a^3	a^4	a^5
a^6	a^5	a^4	a^3	a^4	a^5	a^6
a^7	a^6	a^5	a^4	a^5	a^6	a^7
a^8	a^7	a^6	a^5	a^6	a^7	a^8

Movimentos permitidos na horizontal

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & \bullet & \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \bullet \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bullet & \bullet \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & & \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a^j & a^{j+1} & a^{j+2} \\ \hline\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a^{j+2} & a^{j+1} & a^j \\ \hline\end{array} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a^{j+1} & a^j & a^{j+1} \\ \hline\end{array}$$

$$a^j + a^{j+1} \mapsto a^{j+2} \quad \text{ou} \quad a^{j+1} + a^{j+2} \mapsto a^j \quad \text{ou} \quad a^j + a^{j+1} \mapsto a^{j+1}$$

Movimentos permitidos na horizontal

$\boxed{a^j}\boxed{a^{j+1}}\boxed{a^{j+2}}$ ou $\boxed{a^{j+2}}\boxed{a^{j+1}}\boxed{a^j}$ ou

$\boxed{a^{j+1}}\boxed{a^j}\boxed{a^{j+1}}$

$$a^j + a^{j+1} \mapsto a^{j+2} \quad \text{ou} \quad a^{j+1} + a^{j+2} \mapsto a^j \quad \text{ou} \quad a^j + a^{j+1} \mapsto a^{j+1}$$

$$a^{j+2} \leq a^j + a^{j+1} \qquad \text{e} \qquad a^j \leq a^{j+1} + a^{j+2}$$

Movimentos permitidos

Portanto, com movimentos permitidos, a condição do invariante nunca crescer é equivalente a

$$-0,618 \sim \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,618$$

e

$$a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \sim -1,618 \quad \text{ou} \quad a \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \sim 0,618$$

Movimentos permitidos

Portanto, com movimentos permitidos, a condição do invariante nunca crescer é equivalente a

$$-0,618 \sim \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,618$$

e

$$a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \sim -1,618 \quad \text{ou} \quad a \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \sim 0,618$$

Juntando com $0 < a < 1$, temos:

Movimentos permitidos

Portanto, com movimentos permitidos, a condição do invariante nunca crescer é equivalente a

$$-0,618 \sim \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,618$$

e

$$a \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \sim -1,618 \quad \text{ou} \quad a \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \sim 0,618$$

Juntando com $0 < a < 1$, temos:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Valor de a

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Valor de a

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Vamos tomar

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Valor de a

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Vamos tomar

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Será útil lembrar que esse valor de a satisfaz as identidades

$$1 - a = a^2$$

$$1 + a = \frac{1}{a}$$

Valor de S

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
a^4	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^4	a^3	a^2	a^3	a^4	a^5
a^6	a^5	a^4	a^3	a^4	a^5	a^6
a^7	a^6	a^5	a^4	a^5	a^6	a^7
a^8	a^7	a^6	a^5	a^6	a^7	a^8
a^9	a^8	a^7	a^6	a^7	a^8	a^9
a^{10}	a^9	a^8	a^7	a^8	a^9	a^{10}
a^{11}	a^{10}	a^9	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
a^{12}	a^{11}	a^{10}	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}

Valor de S

a^3	a^2	a^1	1	a^1	a^2	a^3
a^4	a^3	a^2	a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^4	a^3	a^2	a^3	a^4	a^5
a^6	a^5	a^4	a^3	a^4	a^5	a^6
a^7	a^6	a^5	a^4	a^5	a^6	a^7
a^8	a^7	a^6	a^5	a^6	a^7	a^8
a^9	a^8	a^7	a^6	a^7	a^8	a^9
a^{10}	a^9	a^8	a^7	a^8	a^9	a^{10}
a^{11}	a^{10}	a^9	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}
a^{12}	a^{11}	a^{10}	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}

$$S = (a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) + 2(a^6 + a^7 + a^8 + \cdots) + 2(a^7 + a^8 + a^9 + \cdots) + 2(a^8 + a^9 + a^{10} + \cdots) + \cdots$$

Valor de S

Queremos $S \leq 1$.

$$S = (a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) + 2(a^6 + a^7 + a^8 + \cdots) + 2(a^7 + a^8 + a^9 + \cdots) +$$

$$+ 2(a^8 + a^9 + a^{10} + \cdots) + 2(a^9 + a^{10} + a^{11} + \cdots) + \cdots =$$

Valor de S

Queremos $S \leq 1$.

$$S = (a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) + 2(a^6 + a^7 + a^8 + \cdots) + 2(a^7 + a^8 + a^9 + \cdots) +$$

$$+2(a^8 + a^9 + a^{10} + \cdots) + 2(a^9 + a^{10} + a^{11} + \cdots) + \cdots =$$

$$= 2[(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) + (a^6 + a^7 + a^8 + \cdots) + (a^7 + a^8 + a^9 + \cdots) + \cdots] -$$

$$-(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) =$$

Valor de S

Queremos $S \leq 1$.

$$S = (a^5+a^6+a^7+\cdots)+2(a^6+a^7+a^8+\cdots)+2(a^7+a^8+a^9+\cdots)+$$
$$+2(a^8+a^9+a^{10}+\cdots)+2(a^9+a^{10}+a^{11}+\cdots)+\cdots =$$

$$= 2[(a^5+a^6+a^7+\cdots)+(a^6+a^7+a^8+\cdots)+(a^7+a^8+a^9+\cdots)+\cdots]-$$
$$-(a^5+a^6+a^7+\cdots) =$$

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a}+\frac{a^6}{1-a}+\frac{a^7}{1-a}+\cdots\right]-\frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a} + \frac{a^6}{1-a} + \frac{a^7}{1-a} + \cdots\right] - \frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a} + \frac{a^6}{1-a} + \frac{a^7}{1-a} + \cdots\right] - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) - \frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a} + \frac{a^6}{1-a} + \frac{a^7}{1-a} + \cdots\right] - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}\frac{a^5}{1-a} - \frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a} + \frac{a^6}{1-a} + \frac{a^7}{1-a} + \cdots\right] - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}\frac{a^5}{1-a} - \frac{a^5}{1-a} = \left(\frac{2}{1-a} - 1\right)\frac{a^5}{1-a}$$

Valor de S

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a} + \frac{a^6}{1-a} + \frac{a^7}{1-a} + \cdots\right] - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}\frac{a^5}{1-a} - \frac{a^5}{1-a} = \left(\frac{2}{1-a} - 1\right)\frac{a^5}{1-a}$$

$$= \left(\frac{2}{1-a} - \frac{1-a}{1-a}\right)\frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= 2\left[\frac{a^5}{1-a} + \frac{a^6}{1-a} + \frac{a^7}{1-a} + \cdots\right] - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}(a^5 + a^6 + a^7 + \cdots) - \frac{a^5}{1-a} =$$

$$= \frac{2}{1-a}\frac{a^5}{1-a} - \frac{a^5}{1-a} = \left(\frac{2}{1-a} - 1\right)\frac{a^5}{1-a}$$

$$= \left(\frac{2}{1-a} - \frac{1-a}{1-a}\right)\frac{a^5}{1-a} = \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} =$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} =$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{(a^2)^2} =$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{(a^2)^2} = \frac{a^4}{a^4} =$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{(a^2)^2} = \frac{a^4}{a^4} = 1$$

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{(a^2)^2} = \frac{a^4}{a^4} = 1 \leq 1$$

como queríamos!

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{(a^2)^2} = \frac{a^4}{a^4} = 1 \leq 1$$

como queríamos! Isso prova que se tiver alguma casa desocupada abaixo da fronteira, não é possível chegar à quinta linha.

Valor de S

$$= \frac{a+1}{1-a}\frac{a^5}{1-a} = \frac{(a+1)a^5}{(1-a)^2} = \frac{\frac{1}{a}a^5}{(a^2)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{(a^2)^2} = \frac{a^4}{a^4} = 1 \leq 1$$

como queríamos! Isso prova que se tiver alguma casa desocupada abaixo da fronteira, não é possível chegar à quinta linha.
Mas é inconclusivo quanto ao caso em que todas as casas abaixo da fronteira estão inicialmente ocupadas.

Dá pra melhorar?

E se tivéssemos escolhido outro a no intervalo exigido?

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Dá pra melhorar?

E se tivéssemos escolhido outro a no intervalo exigido?

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Qualquer a aqui aumenta o valor de S. Então

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

é o único número real para o qual a demonstração funciona!

Dá pra melhorar?

E se tivéssemos escolhido outro a no intervalo exigido?

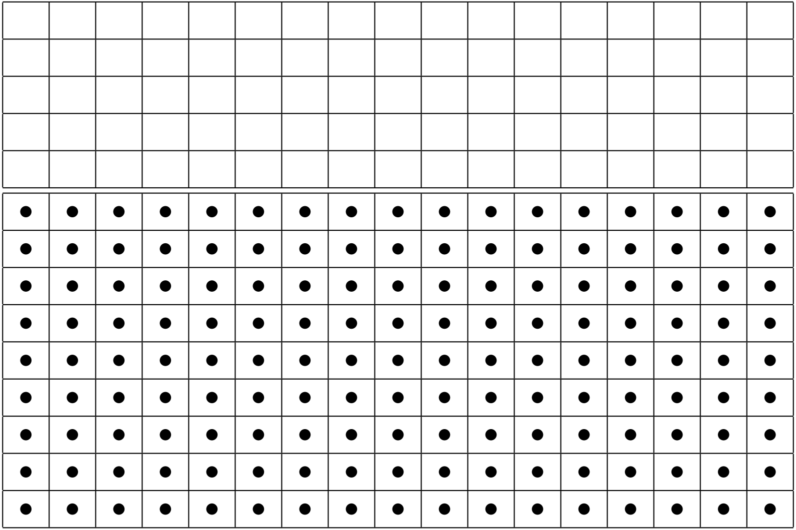
$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq a < 1$$

Qualquer a aqui aumenta o valor de S. Então

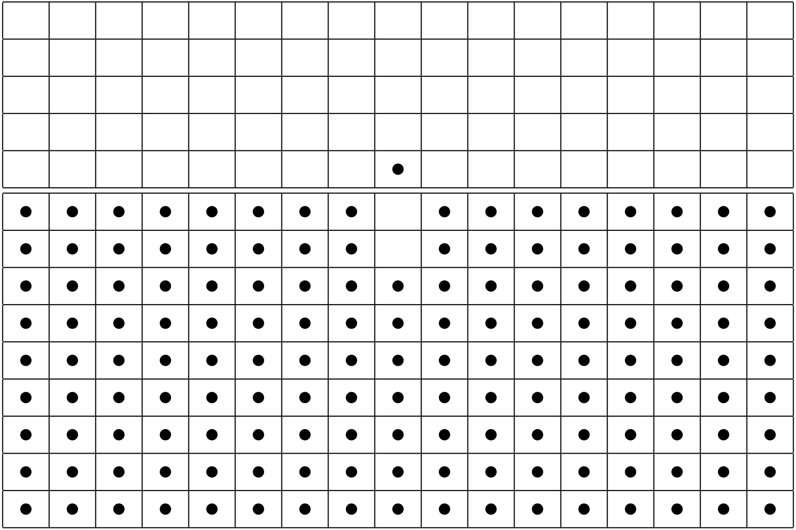
$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

é o único número real para o qual a demonstração funciona!
Mas não prova o caso em que todas as casas abaixo da fronteira estão ocupadas.

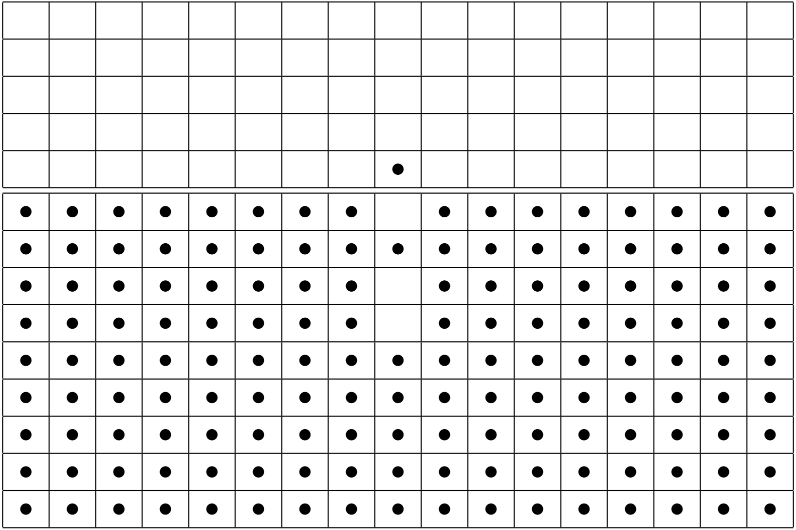
Como atingir a linha 5



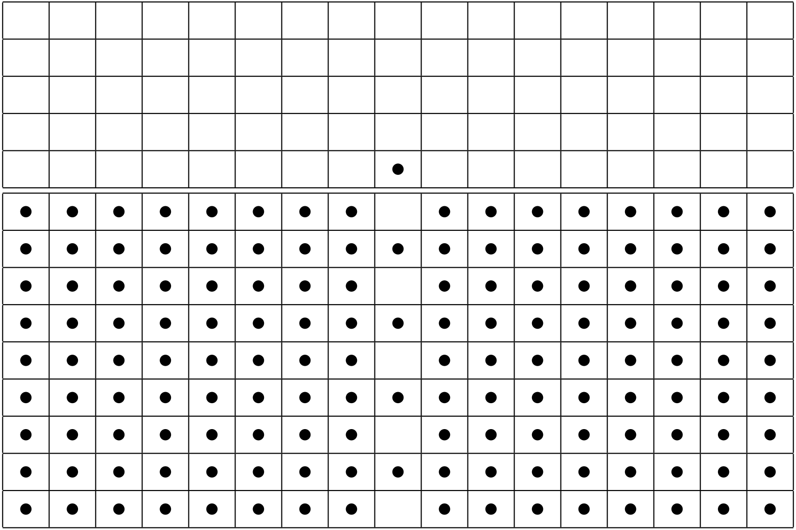
Como atingir a linha 5



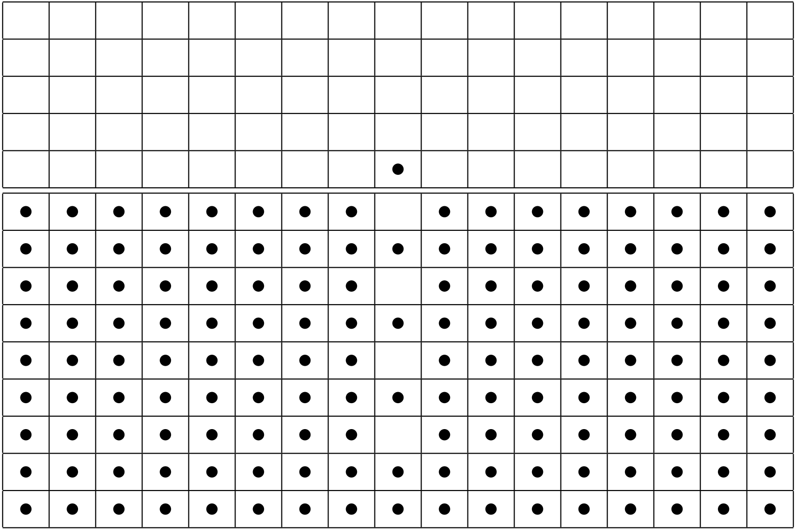
Como atingir a linha 5



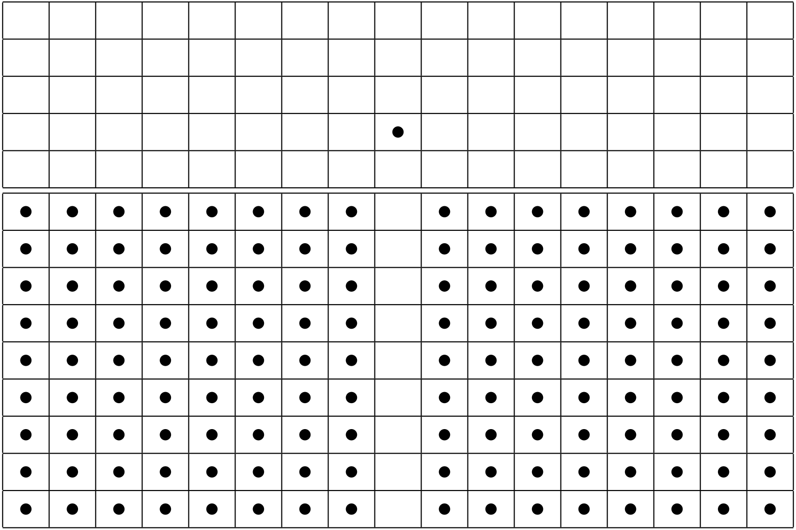
Como atingir a linha 5



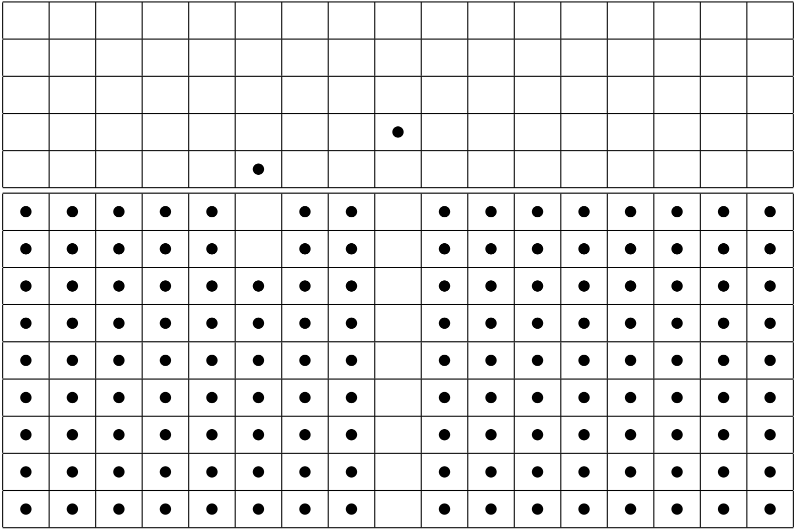
Como atingir a linha 5



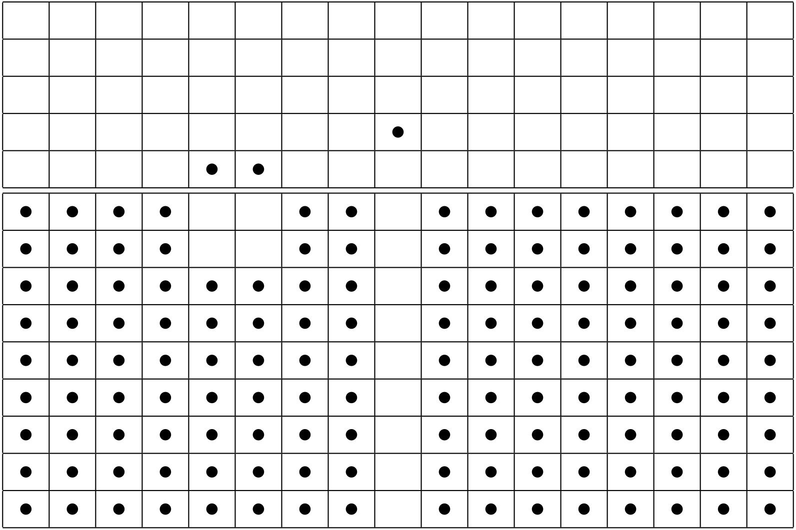
Como atingir a linha 5



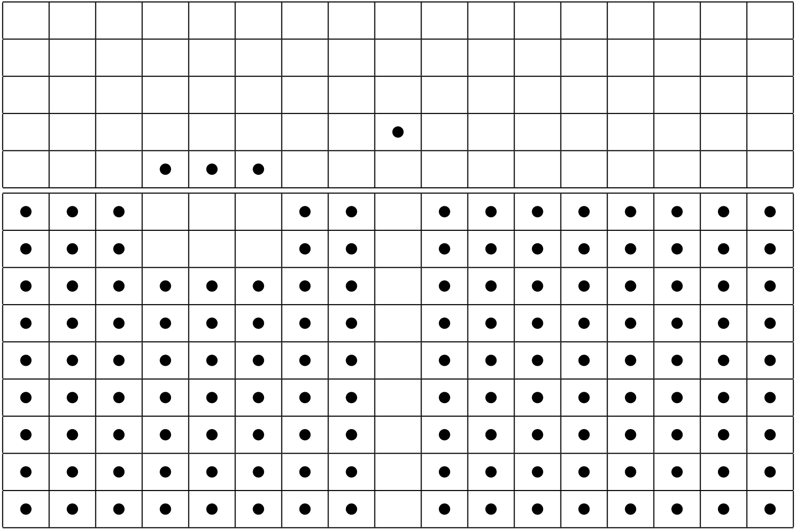
Como atingir a linha 5



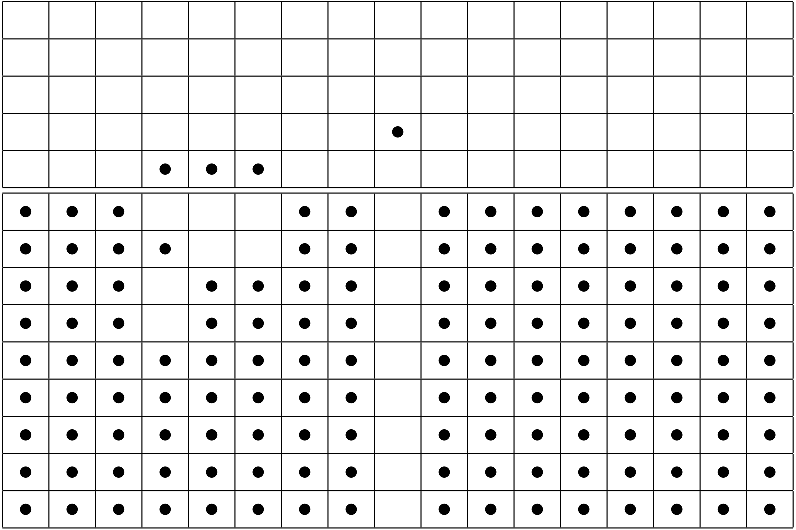
Como atingir a linha 5



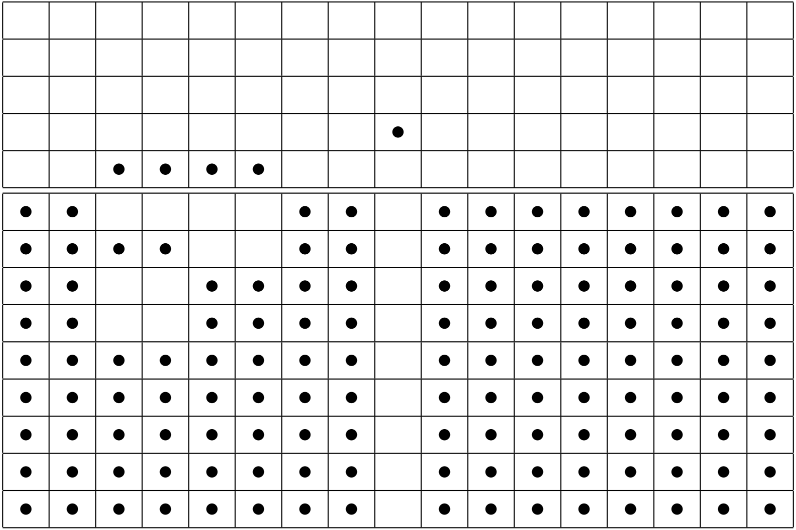
Como atingir a linha 5



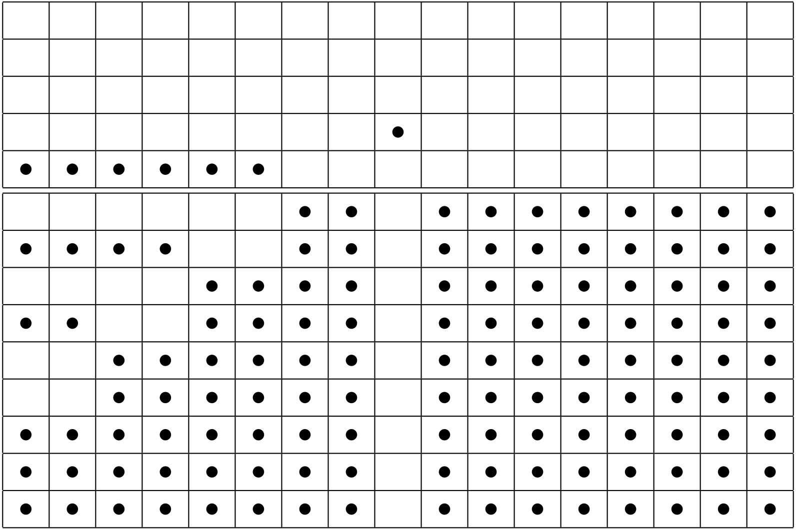
Como atingir a linha 5



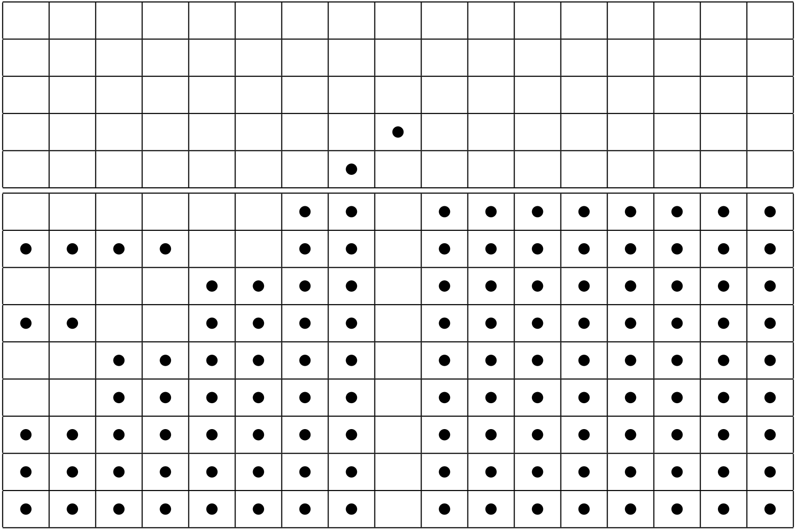
Como atingir a linha 5



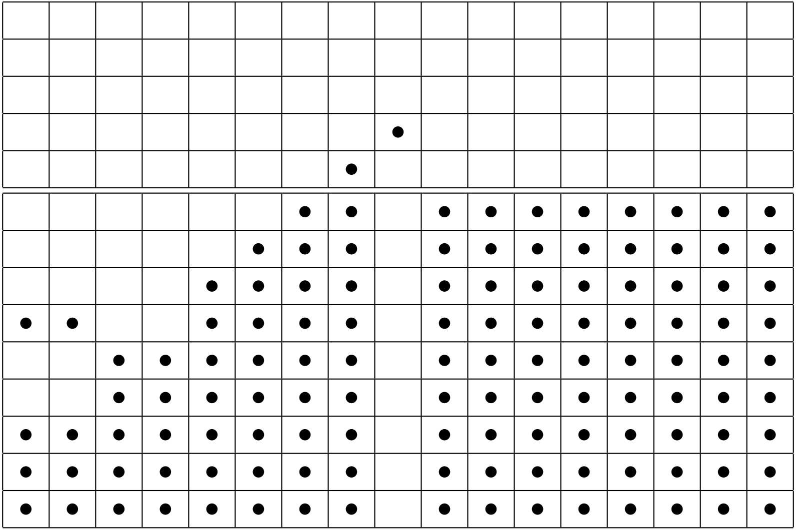
Como atingir a linha 5



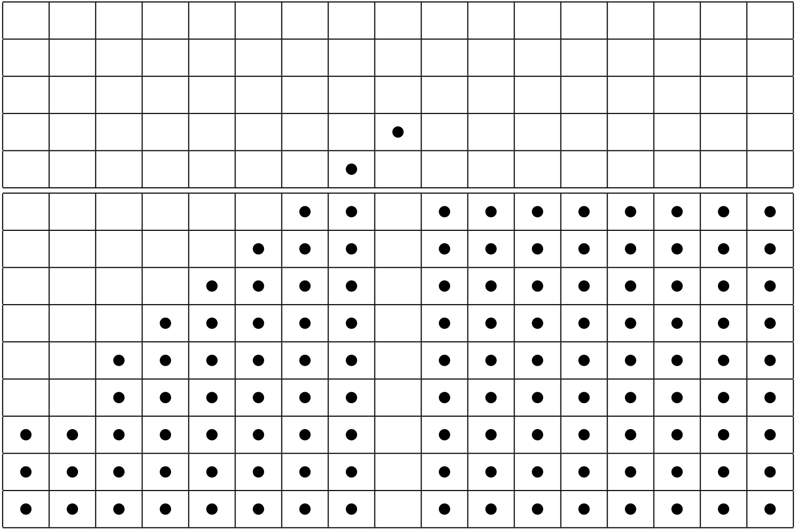
Como atingir a linha 5



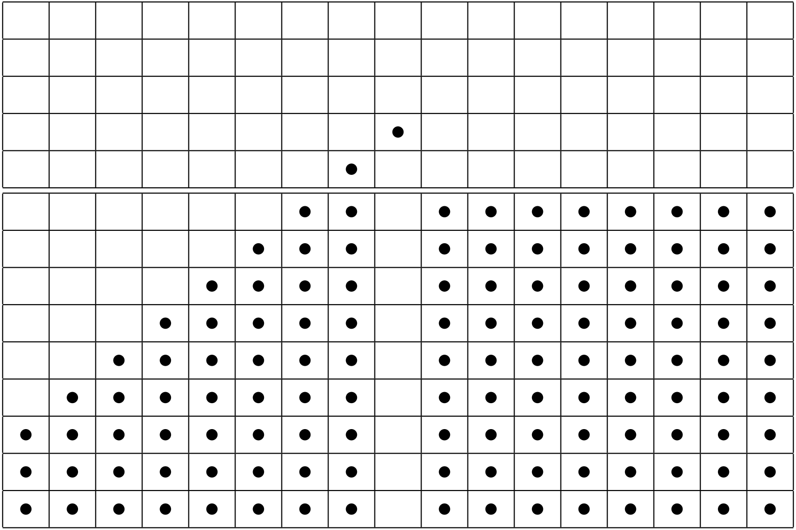
Como atingir a linha 5



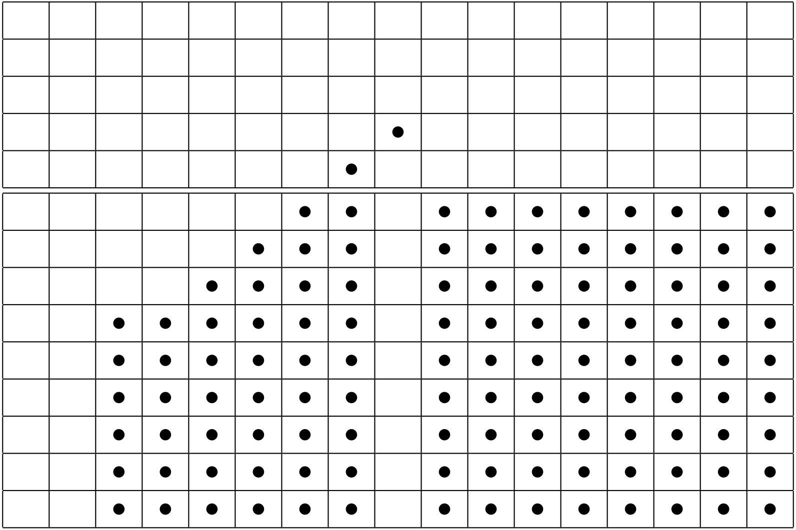
Como atingir a linha 5



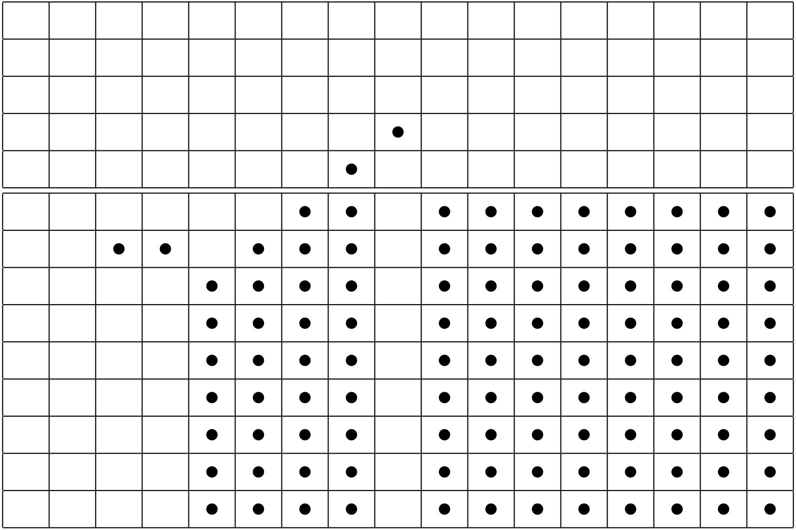
Como atingir a linha 5



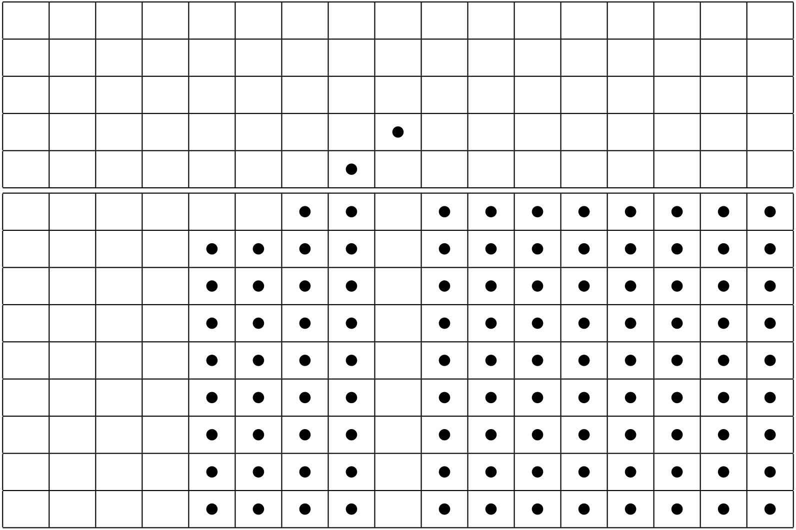
Como atingir a linha 5



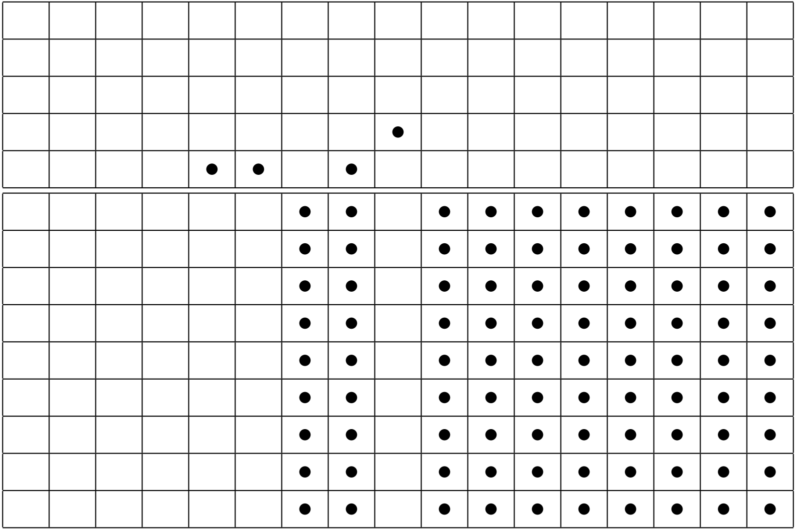
Como atingir a linha 5



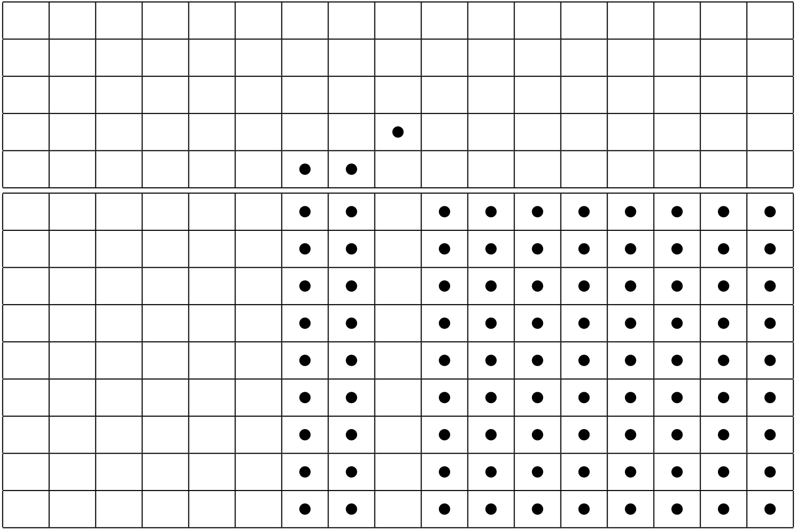
Como atingir a linha 5



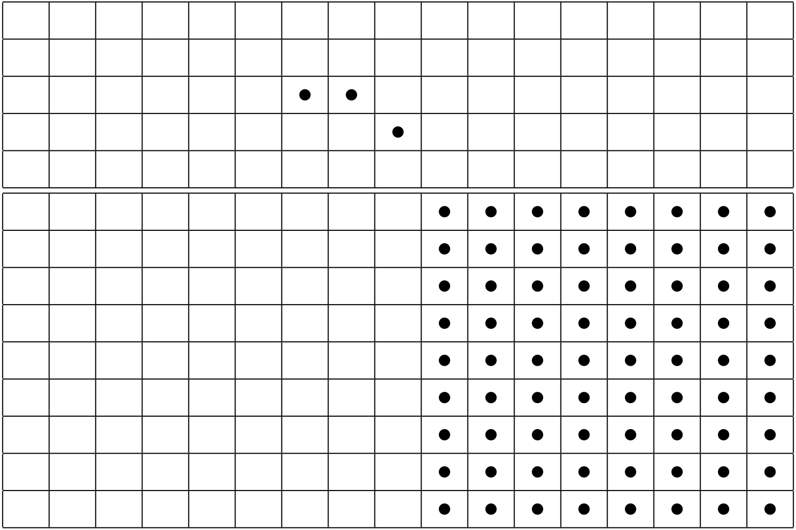
Como atingir a linha 5



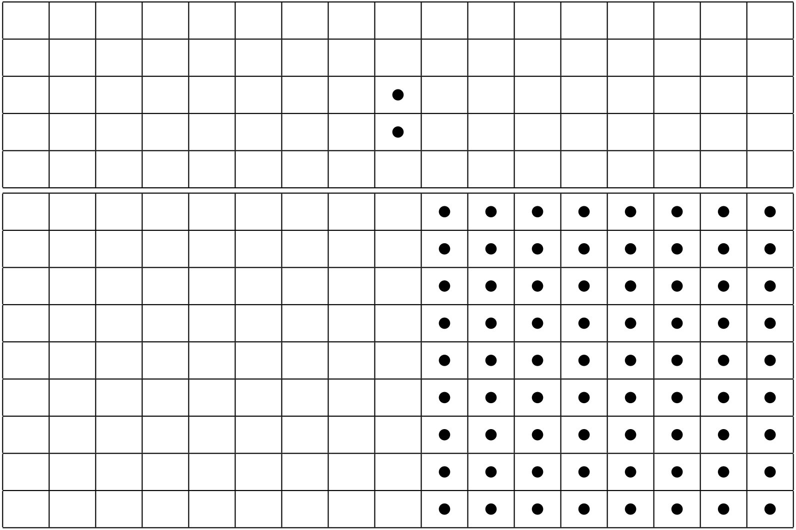
Como atingir a linha 5



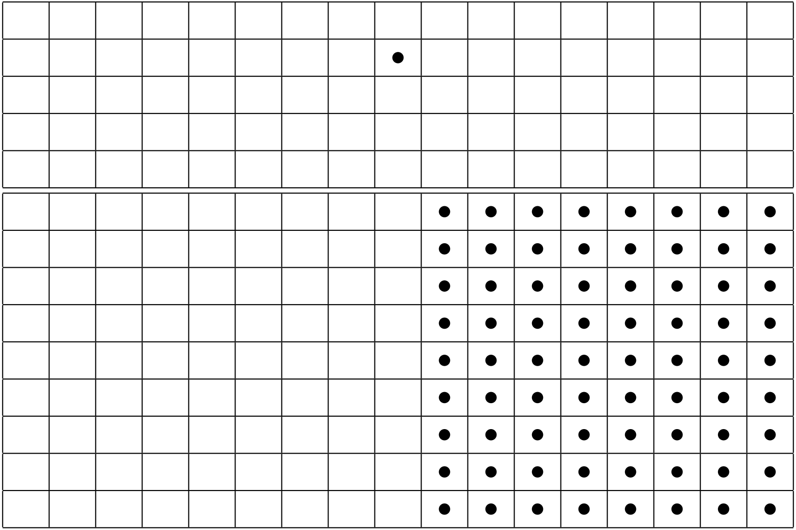
Como atingir a linha 5



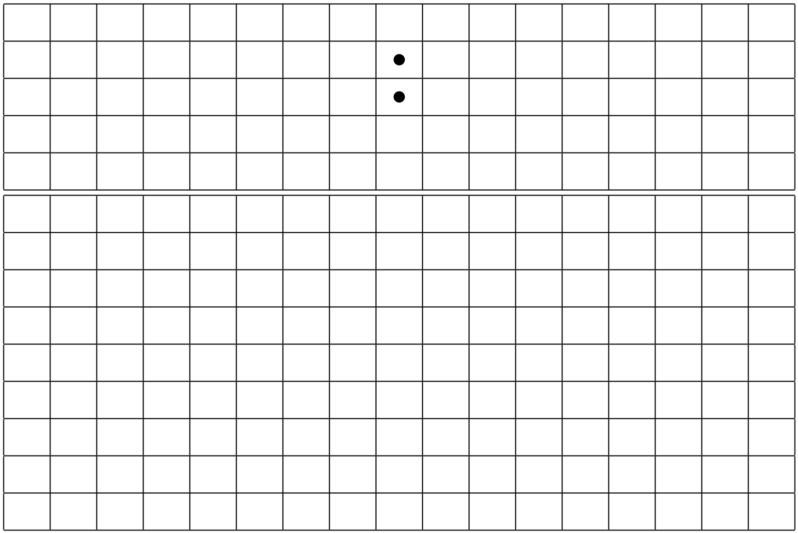
Como atingir a linha 5



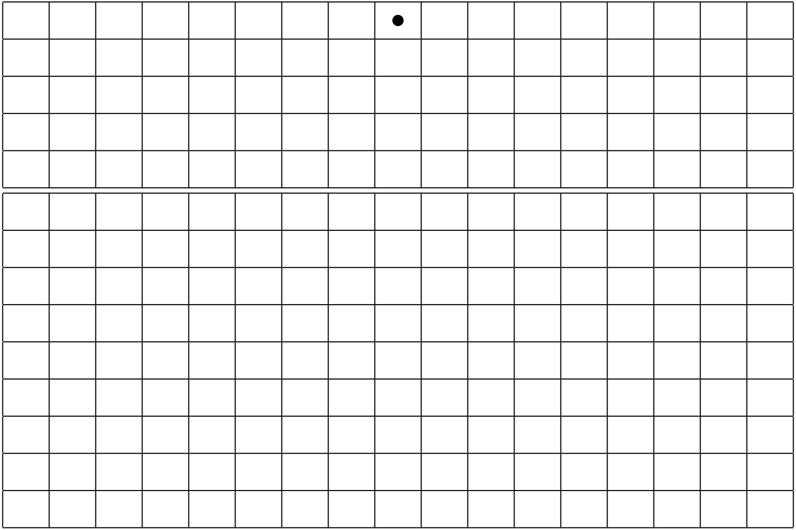
Como atingir a linha 5



Como atingir a linha 5



Como atingir a linha 5



Referências

- "Solitaire army and related games", Niculescu F.R., Niculescu R.S. (http://www.cs.cmu.edu/∼stefann/papers/math_reports_2006.pdf)
- "Reaching row five in solitaire army", Tatham S., Taylor G. (http://tartarus.org/gareth/maths/stuff/solarmy.pdf)
- http://www.chiark.greenend.org.uk/∼sgtatham/solarmy