Como conseguir duas laranjas a partir de uma, utilizando somente uma faca (e o axioma da Escolha)

Sandro Márcio da Silva Preto

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP São Carlos

10 de novembro de 2011

Grupos

Um grupo é um conjunto munido de uma operação. Pode ser representado por $(G, \odot)$, e obedece:

Grupos

Um grupo é um conjunto munido de uma operação. Pode ser representado por $(G, \odot)$, e obedece:

- se $x, y \in G$, então $x \odot y \in G$.

Grupos

Um grupo é um conjunto munido de uma operação. Pode ser representado por $(G, \odot)$, e obedece:

- se $x, y \in G$, então $x \odot y \in G$.
- se $x, y, z \in G$, então $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.

Grupos

Um grupo é um conjunto munido de uma operação. Pode ser representado por $(G, \odot)$, e obedece:

- se $x, y \in G$, então $x \odot y \in G$.
- se $x, y, z \in G$, então $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
- existe um elemento $e \in G$, tal que para todo $x \in G$, temos $x \odot e = e \odot x = x$.

Grupos

Um grupo é um conjunto munido de uma operação. Pode ser representado por $(G, \odot)$, e obedece:

- se $x, y \in G$, então $x \odot y \in G$.
- se $x, y, z \in G$, então $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
- existe um elemento $e \in G$, tal que para todo $x \in G$, temos $x \odot e = e \odot x = x$.
- se $x \in G$, então existe $x^{-1} \in G$, tal que $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e$.

Grupos

Um grupo é um conjunto munido de uma operação. Pode ser representado por $(G, \odot)$, e obedece:

- se $x, y \in G$, então $x \odot y \in G$.
- se $x, y, z \in G$, então $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.
- existe um elemento $e \in G$, tal que para todo $x \in G$, temos $x \odot e = e \odot x = x$.
- se $x \in G$, então existe $x^{-1} \in G$, tal que $x \odot x^{-1} = x^{-1} \odot x = e$.

Para simplificar a notação, podemos escrever xy ao invés de $x \odot y$.

Exemplos de Grupos

Grupo com dois elementos. $G = \{e, \varphi\}$

$\odot$	e	φ
e	e	φ
φ	φ	$\varphi^2 = e$

Note que $\varphi^{-1} = \varphi$.

Exemplos de Grupos

Grupo com dois elementos. $G = \{e, \varphi\}$

$\odot$	e	φ
e	e	φ
φ	φ	$\varphi^2 = e$

Note que $\varphi^{-1} = \varphi$.

Grupo com três elementos. $H = \{e, \psi, \psi^2\}$

$\odot$	e	ψ	ψ^2
e	e	ψ	ψ^2
ψ	ψ	ψ^2	$\psi^3 = e$
ψ^2	ψ^2	e	$\psi^4 = \psi$

Note que $\psi^2 = \psi^{-1}$.

Produto Livre

Um produto livre é uma operação feita sobre dois grupos G e H resultando num conjunto $G * H$, que é dado por todas as combinações finitas de elementos de G e H, em que a ordem importa! Por exemplo,

Produto Livre

Um produto livre é uma operação feita sobre dois grupos G e H resultando num conjunto $G * H$, que é dado por todas as combinações finitas de elementos de G e H, em que a ordem importa! Por exemplo,

$$G = \{e, \varphi\}$$

$$H = \{e, \psi, \psi^{-1}\}$$

Produto Livre

Um produto livre é uma operação feita sobre dois grupos G e H resultando num conjunto $G * H$, que é dado por todas as combinações finitas de elementos de G e H, em que a ordem importa! Por exemplo,

$$G = \{e, \varphi\}$$

$$H = \{e, \psi, \psi^{-1}\}$$

São elementos de $G * H$,

$$\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad e, \quad \varphi\psi, \quad \varphi e\psi, \quad \varphi\psi\psi^{-1}\psi, \quad \varphi\psi^{-1}\psi\varphi$$

Produto Livre

Um produto livre é uma operação feita sobre dois grupos G e H resultando num conjunto $G * H$, que é dado por todas as combinações finitas de elementos de G e H, em que a ordem importa! Por exemplo,

$$G = \{e, \varphi\}$$

$$H = \{e, \psi, \psi^{-1}\}$$

São elementos de $G * H$,

$$\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad e, \quad \varphi\psi, \quad \varphi e\psi, \quad \varphi\psi\psi^{-1}\psi, \quad \varphi\psi^{-1}\psi\varphi$$

Chamamos de *palavra* cada elemento do produto livre.

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.
- substituindo elementos subsequentes de um mesmo grupo, por seu produto nesse grupo.

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.
- substituindo elementos subsequentes de um mesmo grupo, por seu produto nesse grupo.

Exemplos:

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.
- substituindo elementos subsequentes de um mesmo grupo, por seu produto nesse grupo.

Exemplos:

$\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi$ continuam sendo $\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi$

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.
- substituindo elementos subsequentes de um mesmo grupo, por seu produto nesse grupo.

Exemplos:

$\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi$ continuam sendo $\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi$

$\varphi e \psi$ se torna $\varphi\psi$

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.
- substituindo elementos subsequentes de um mesmo grupo, por seu produto nesse grupo.

Exemplos:

$$\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi \text{ continuam sendo } \varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi$$

$$\varphi e \psi \text{ se torna } \varphi\psi$$

$$\varphi\psi\psi^{-1}\psi \text{ se torna } \varphi\psi$$

Forma reduzida das palavras

Cada palavra pode ser reduzida através das seguintes regras:

- removendo as identidades, tanto de G quanto de H.
- substituindo elementos subsequentes de um mesmo grupo, por seu produto nesse grupo.

Exemplos:

$$\varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi \text{ continuam sendo } \varphi, \quad \psi, \quad \psi^{-1}, \quad \varphi\psi$$

$$\varphi e \psi \text{ se torna } \varphi\psi$$

$$\varphi\psi\psi^{-1}\psi \text{ se torna } \varphi\psi$$

$$e, \quad \varphi\psi^{-1}\psi\varphi \text{ se tornam a palavra vazia } \emptyset$$

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.
Um produto livre forma um grupo, tomando a concatenação de palavras seguida de redução como operação. No nosso exemplo,

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.
Um produto livre forma um grupo, tomando a concatenação de palavras seguida de redução como operação. No nosso exemplo,

- a concatenação de duas palavras quaisquer continua sendo uma palavra de $G * H$.

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.
Um produto livre forma um grupo, tomando a concatenação de palavras seguida de redução como operação. No nosso exemplo,

- a concatenação de duas palavras quaisquer continua sendo uma palavra de $G * H$.
- a concatenação é associativa.

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.
Um produto livre forma um grupo, tomando a concatenação de palavras seguida de redução como operação. No nosso exemplo,

- a concatenação de duas palavras quaisquer continua sendo uma palavra de $G * H$.
- a concatenação é associativa.
- a palavra vazia $\emptyset$ é o elemento neutro.

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.
Um produto livre forma um grupo, tomando a concatenação de palavras seguida de redução como operação. No nosso exemplo,

- a concatenação de duas palavras quaisquer continua sendo uma palavra de $G * H$.
- a concatenação é associativa.
- a palavra vazia $\emptyset$ é o elemento neutro.
- toda palavra possui uma palavra inversa, por exemplo,

O grupo $G * H$

Note que, em $G * H$ as palavras reduzidas são sempre sequências nas quais φ alterna com ψ ou ψ^{-1}.
Um produto livre forma um grupo, tomando a concatenação de palavras seguida de redução como operação. No nosso exemplo,

- a concatenação de duas palavras quaisquer continua sendo uma palavra de $G * H$.
- a concatenação é associativa.
- a palavra vazia $\emptyset$ é o elemento neutro.
- toda palavra possui uma palavra inversa, por exemplo, para a palavra $\psi^{-1}\varphi\psi\varphi$, tomamos a palavra $\varphi\psi^{-1}\varphi\psi$.

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.
- $\psi A = B$.

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.
- $\psi A = B$.
- $\psi^{-1} A = C$.

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.
- $\psi A = B$.
- $\psi^{-1} A = C$.

Construímos A, B e C da seguinte maneira:

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.
- $\psi A = B$.
- $\psi^{-1} A = C$.

Construímos A, B e C da seguinte maneira: distribuímos as palavras de comprimento 0 e 1 nos conjuntos:

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.
- $\psi A = B$.
- $\psi^{-1} A = C$.

Construímos A, B e C da seguinte maneira: distribuímos as palavras de comprimento 0 e 1 nos conjuntos:

$$\emptyset \in A, \qquad \varphi, \psi \in B, \qquad \psi^{-1} \in C.$$

Propriedades de $G * H$

Existe uma partição $\{A, B, C\}$ de $G * H$ tal que

- $\varphi A = B \cup C$.
- $\psi A = B$.
- $\psi^{-1} A = C$.

Construímos A, B e C da seguinte maneira: distribuímos as palavras de comprimento 0 e 1 nos conjuntos:

$$\emptyset \in A, \qquad \varphi, \psi \in B, \qquad \psi^{-1} \in C.$$

Veja que, supondo que todas as palavras de comprimento n estão distribuídas nos conjuntos. Podemos construir todas as palavras de comprimento $n+1$, tomando as palavras de comprimento n e concatenando com as palavras φ, ψ ou ψ^{-1}, de modo que a palavra resultante seja de comprimento $n+1$.

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

- se $\alpha \in A$, então $\varphi\alpha \in B$;

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

- se $\alpha \in A$, então $\varphi\alpha \in B$;
- se $\alpha \in B \cup C$, então $\varphi\alpha \in A$.

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

- se $\alpha \in A$, então $\varphi\alpha \in B$;
- se $\alpha \in B \cup C$, então $\varphi\alpha \in A$.

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia com φ:

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

- se $\alpha \in A$, então $\varphi\alpha \in B$;
- se $\alpha \in B \cup C$, então $\varphi\alpha \in A$.

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia com φ:

- se $\alpha \in A$, então $\psi\alpha \in B$ e $\psi^{-1}\alpha \in C$;

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

- se $\alpha \in A$, então $\varphi\alpha \in B$;
- se $\alpha \in B \cup C$, então $\varphi\alpha \in A$.

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia com φ:

- se $\alpha \in A$, então $\psi\alpha \in B$ e $\psi^{-1}\alpha \in C$;
- se $\alpha \in B$, então $\psi\alpha \in C$ e $\psi^{-1}\alpha \in A$;

Propriedades de $G * H$

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia em ψ ou ψ^{-1}:

- se $\alpha \in A$, então $\varphi\alpha \in B$;
- se $\alpha \in B \cup C$, então $\varphi\alpha \in A$.

Se α é uma palavra de comprimento ≥ 1 que inicia com φ:

- se $\alpha \in A$, então $\psi\alpha \in B$ e $\psi^{-1}\alpha \in C$;
- se $\alpha \in B$, então $\psi\alpha \in C$ e $\psi^{-1}\alpha \in A$;
- se $\alpha \in C$, então $\psi\alpha \in A$ e $\psi^{-1}\alpha \in B$.

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem,

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que φ^2 pode representar a rotação identidade e,

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que φ^2 pode representar a rotação identidade e, G pode representar esse grupo de rotação.

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que φ^2 pode representar a rotação identidade e, G pode representar esse grupo de rotação.

Se considerarmos ψ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 120° em volta de algum eixo passando pela origem,

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que φ^2 pode representar a rotação identidade e, G pode representar esse grupo de rotação.

Se considerarmos ψ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 120° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que ψ^3 pode representar a rotação identidade e,

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que φ^2 pode representar a rotação identidade e, G pode representar esse grupo de rotação.

Se considerarmos ψ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 120° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que ψ^3 pode representar a rotação identidade e, H pode representar esse grupo de rotação.

Grupo de rotação

Vejamos agora qual grupo $G * H$ pode representar:

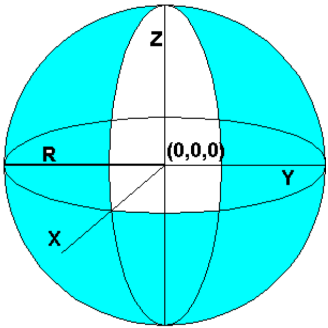
Se considerarmos φ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 180° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que φ^2 pode representar a rotação identidade e, G pode representar esse grupo de rotação.

Se considerarmos ψ como a função que rotaciona um ponto de $\mathbb{R}^3$ em 120° em volta de algum eixo passando pela origem, temos que ψ^3 pode representar a rotação identidade e, H pode representar esse grupo de rotação.

Note, então, que $G * H$ pode representar um grupo de rotações.

Preliminares

Consideremos a esfera unitária S (raio 1) centrada na origem do eixo carteziano.



Note que se aplicarmos uma rotação $\alpha \in G * H$ em algum ponto da esfera, o ponto rotacionado continua na esfera.

Resultado de Hausdorff

Diremos que dois subconjuntos X e Y da esfera unitária são congruentes se existir um elemento $\alpha \in G * H$ tal que $\alpha[X] = Y$.

Resultado de Hausdorff

Diremos que dois subconjuntos X e Y da esfera unitária são congruentes se existir um elemento $\alpha \in G * H$ tal que $\alpha[X] = Y$.
Denotaremos $X \cong Y$.

Resultado de Hausdorff

Diremos que dois subconjuntos X e Y da esfera unitária são congruentes se existir um elemento $\alpha \in G * H$ tal que $\alpha[X] = Y$.
Denotaremos $X \cong Y$.

Em 1914, Hausdorff mostrou que existe uma partição da esfera $\{X, Y, Z, Q\}$ de modo que:

Resultado de Hausdorff

Diremos que dois subconjuntos X e Y da esfera unitária são congruentes se existir um elemento $\alpha \in G * H$ tal que $\alpha[X] = Y$.
Denotaremos $X \cong Y$.

Em 1914, Hausdorff mostrou que existe uma partição da esfera $\{X, Y, Z, Q\}$ de modo que:

- Q é enumerável;

Resultado de Hausdorff

Diremos que dois subconjuntos X e Y da esfera unitária são congruentes se existir um elemento $\alpha \in G * H$ tal que $\alpha[X] = Y$.
Denotaremos $X \cong Y$.

Em 1914, Hausdorff mostrou que existe uma partição da esfera $\{X, Y, Z, Q\}$ de modo que:

- Q é enumerável;
- $X \cong Y \cong Z$;

Resultado de Hausdorff

Diremos que dois subconjuntos X e Y da esfera unitária são congruentes se existir um elemento $\alpha \in G * H$ tal que $\alpha[X] = Y$.
Denotaremos $X \cong Y$.

Em 1914, Hausdorff mostrou que existe uma partição da esfera $\{X, Y, Z, Q\}$ de modo que:

- Q é enumerável;
- $X \cong Y \cong Z$;
- $X \cong Y \cup Z$.

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.
Como o conjunto $G * H$ é enumerável,

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.
Como o conjunto $G * H$ é enumerável, seja Q o conjunto de todos os pontos da esfera que são fixos para alguma rotação $\alpha \in G * H \setminus \{e\}$.

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.
Como o conjunto $G * H$ é enumerável, seja Q o conjunto de todos os pontos da esfera que são fixos para alguma rotação $\alpha \in G * H \setminus \{e\}$. *$Q$ é enumerável.*

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.
Como o conjunto $G * H$ é enumerável, seja Q o conjunto de todos os pontos da esfera que são fixos para alguma rotação $\alpha \in G * H \setminus \{e\}$. *$Q$ é enumerável.*

Para cada $x \in S \setminus Q$, definimos

$$P_x = \{\alpha(x) : \alpha \in G * H\}.$$

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.
Como o conjunto $G * H$ é enumerável, seja Q o conjunto de todos os pontos da esfera que são fixos para alguma rotação $\alpha \in G * H \setminus \{e\}$. *$Q$ é enumerável.*

Para cada $x \in S \setminus Q$, definimos

$$P_x = \{\alpha(x) : \alpha \in G * H\}.$$

Note que, se $y \in P_x$, então, $P_y = P_x$.

Demonstração

Cada rotação da esfera que não seja a identidade possui exatamente dois pontos fixos.
Como o conjunto $G * H$ é enumerável, seja Q o conjunto de todos os pontos da esfera que são fixos para alguma rotação $\alpha \in G * H \setminus \{e\}$. *$Q$ é enumerável.*

Para cada $x \in S \setminus Q$, definimos

$$P_x = \{\alpha(x) : \alpha \in G * H\}.$$

Note que, se $y \in P_x$, então, $P_y = P_x$. Definimos, agora, o conjunto M, contendo exatamente um elemento de cada órbita.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.
Então, $\alpha(a) = \beta(b)$, para $\beta \in B$ e $b \in M$.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.
Então, $\alpha(a) = \beta(b)$, para $\beta \in B$ e $b \in M$. Logo, $a = \alpha^{-1}\beta b$ e $a \in P_b$.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.
Então, $\alpha(a) = \beta(b)$, para $\beta \in B$ e $b \in M$. Logo, $a = \alpha^{-1}\beta b$ e $a \in P_b$.
Portanto, pela definição de M, $a = b$,

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$
$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$
$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.
Então, $\alpha(a) = \beta(b)$, para $\beta \in B$ e $b \in M$. Logo, $a = \alpha^{-1}\beta b$ e $a \in P_b$.
Portanto, pela definição de M, $a = b$, $\alpha(a) = \beta(a)$ e

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.
Então, $\alpha(a) = \beta(b)$, para $\beta \in B$ e $b \in M$. Logo, $a = \alpha^{-1}\beta b$ e $a \in P_b$.
Portanto, pela definição de M, $a = b$, $\alpha(a) = \beta(a)$ e $\alpha = \beta$.

Demonstração

Sejam

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Q não intercepta nenhum desses conjuntos.
Como A, B e C são disjuntos, X, Y e Z também são.
De fato, suponha $\alpha(a) \in X$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$, de modo que também tenhamos $\alpha(a) \in Y$.
Então, $\alpha(a) = \beta(b)$, para $\beta \in B$ e $b \in M$. Logo, $a = \alpha^{-1}\beta b$ e $a \in P_b$.
Portanto, pela definição de M, $a = b$, $\alpha(a) = \beta(a)$ e $\alpha = \beta$.
Absurdo! As outras disjunções são análogas.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$
$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$
$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$,

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.

Tomamos, agora $x \in Y$,

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.

Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$
$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$
$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.
Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$. Logo, $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.

Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$. Logo, $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$. Portanto, $x \in \varphi[X]$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.
Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$. Logo, $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$. Portanto, $x \in \varphi[X]$.
Analogamente, para $x \in Z$, e segue

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.

Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$. Logo, $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$. Portanto, $x \in \varphi[X]$. Analogamente, para $x \in Z$, e segue $\varphi[X] = Y \cup Z$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.

Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$. Logo, $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$. Portanto, $x \in \varphi[X]$.

Analogamente, para $x \in Z$, e segue $\varphi[X] = Y \cup Z$.

Analogamente, $\psi[X] = Y$ e $\psi^{-1}[X] = Z$.

Demonstração

$$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\};$$

$$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\};$$

$$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}.$$

Tomamos $x \in \varphi[X]$, então $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$ e $a \in M$. Logo, $x = \beta(a)$, $\beta \in B$ ou $x = \gamma(a)$, $\gamma \in C$. Portanto, $x \in Y \cup Z$.
Tomamos, agora $x \in Y$, então $x = \beta(a)$, com $\beta \in B$ e $a \in M$. Logo, $x = \varphi[\alpha(a)]$, com $\alpha \in A$. Portanto, $x \in \varphi[X]$.
Analogamente, para $x \in Z$, e segue $\varphi[X] = Y \cup Z$.
Analogamente, $\psi[X] = Y$ e $\psi^{-1}[X] = Z$.
Finalmente, $X \cong Y \cong Z$ e $X \cong Y \cup Z$.

Preliminares

Diremos que dois subconjuntos X e Y do espaço $\mathbb{R}^3$ são equivalentes se ambos puderem ser particionados em $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de modo que $X_i \cong Y_i$.

Preliminares

Diremos que dois subconjuntos X e Y do espaço $\mathbb{R}^3$ são equivalentes se ambos puderem ser particionados em $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de modo que $X_i \cong Y_i$.
Em outras palavras, eles serão equivalentes se um deles puder ser cortado e reorganizado para se transformar no outro.

Preliminares

Diremos que dois subconjuntos X e Y do espaço $\mathbb{R}^3$ são equivalentes se ambos puderem ser particionados em $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de modo que $X_i \cong Y_i$.
Em outras palavras, eles serão equivalentes se um deles puder ser cortado e reorganizado para se transformar no outro.
Denotaremos $X \approx Y$.

Preliminares

Diremos que dois subconjuntos X e Y do espaço $\mathbb{R}^3$ são equivalentes se ambos puderem ser particionados em $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de modo que $X_i \cong Y_i$.
Em outras palavras, eles serão equivalentes se um deles puder ser cortado e reorganizado para se transformar no outro.
Denotaremos $X \approx Y$.

- $\approx$ é uma relação de equivalência,

Preliminares

Diremos que dois subconjuntos X e Y do espaço $\mathbb{R}^3$ são equivalentes se ambos puderem ser particionados em $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de modo que $X_i \cong Y_i$.
Em outras palavras, eles serão equivalentes se um deles puder ser cortado e reorganizado para se transformar no outro.
Denotaremos $X \approx Y$.

- $\approx$ é uma relação de equivalência,
- se $\{X_i\}$ é uma partição finita de X e $\{Y_i\}$ é uma partição finita de Y, de modo que $X_i \approx Y_i$, então $X \approx Y$.

Preliminares

Diremos que dois subconjuntos X e Y do espaço $\mathbb{R}^3$ são equivalentes se ambos puderem ser particionados em $\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ de modo que $X_i \cong Y_i$.
Em outras palavras, eles serão equivalentes se um deles puder ser cortado e reorganizado para se transformar no outro.
Denotaremos $X \approx Y$.

- $\approx$ é uma relação de equivalência,
- se $\{X_i\}$ é uma partição finita de X e $\{Y_i\}$ é uma partição finita de Y, de modo que $X_i \approx Y_i$, então $X \approx Y$.
- se $X \subset Y \subset Z$ e $X \approx Z$, então, $Y \approx Z$.

Paradoxo de Banach-Tarski

Em 1924, Banach e Tarski mostraram que existe uma partição $\{S_1, S_2\}$ da esfera unitária S, de modo que $S_1 \approx S$ e $S_2 \approx S$.

Paradoxo de Banach-Tarski

Em 1924, Banach e Tarski mostraram que existe uma partição $\{S_1, S_2\}$ da esfera unitária S, de modo que $S_1 \approx S$ e $S_2 \approx S$.

Em outras palavras, cortando a esfera unitária em finitos pedaços (alguns em S_1 e outros em S_2) e reorganizando esses pedaços, conseguimos montar duas esferas unitárias!

Demonstração

Seja $\{X, Y, Z, Q\}$ a partição de S do *resultado de Hausdorff*.

Demonstração

Seja $\{X, Y, Z, Q\}$ a partição de S do *resultado de Hausdorff*.

Por esse resultado, temos que $X \approx Y \approx Z \approx Y \cup Z$.

Demonstração

Seja $\{X, Y, Z, Q\}$ a partição de S do *resultado de Hausdorff*.

Por esse resultado, temos que $X \approx Y \approx Z \approx Y \cup Z$.

Pela segunda propriedade de $\approx$, segue que
$Y \cup Z \approx X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$.

Demonstração

Seja $\{X, Y, Z, Q\}$ a partição de S do *resultado de Hausdorff*.

Por esse resultado, temos que $X \approx Y \approx Z \approx Y \cup Z$.

Pela segunda propriedade de $\approx$, segue que
$Y \cup Z \approx X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$.

A transitividade de $\approx$ implica que $X \approx X \cup Y \cup Z$,
$Y \approx X \cup Y \cup Z$ e $Z \approx X \cup Y \cup Z$.

Demonstração

Seja $\{X, Y, Z, Q\}$ a partição de S do *resultado de Hausdorff*.

Por esse resultado, temos que $X \approx Y \approx Z \approx Y \cup Z$.

Pela segunda propriedade de $\approx$, segue que
$Y \cup Z \approx X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$.

A transitividade de $\approx$ implica que $X \approx X \cup Y \cup Z$,
$Y \approx X \cup Y \cup Z$ e $Z \approx X \cup Y \cup Z$.

Como $X \approx X \cup Y \cup Z$ e $Q \approx Q$, segue que

Demonstração

Seja $\{X, Y, Z, Q\}$ a partição de S do *resultado de Hausdorff*.

Por esse resultado, temos que $X \approx Y \approx Z \approx Y \cup Z$.

Pela segunda propriedade de $\approx$, segue que
$Y \cup Z \approx X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z$.

A transitividade de $\approx$ implica que $X \approx X \cup Y \cup Z$,
$Y \approx X \cup Y \cup Z$ e $Z \approx X \cup Y \cup Z$.

Como $X \approx X \cup Y \cup Z$ e $Q \approx Q$, segue que

$$X \cup Q \approx X \cup Y \cup Z \cup Q = S. \tag{1}$$

Demonstração

Seja α uma rotação que não está em $G * H$ e $\alpha[Q] \cap Q = \emptyset$.

Demonstração

Seja α uma rotação que não está em $G * H$ e $\alpha[Q] \cap Q = \emptyset$.

Então, $\alpha[Q] \subset X \cup Y \cup Z$.

Demonstração

Seja α uma rotação que não está em $G * H$ e $\alpha[Q] \cap Q = \emptyset$.

Então, $\alpha[Q] \subset X \cup Y \cup Z$.

Como $Z \approx X \cup Y \cup Z$, existe $T \subset Z$ tal que $T \approx \alpha[Q]$.

Demonstração

Seja α uma rotação que não está em $G * H$ e $\alpha[Q] \cap Q = \emptyset$.

Então, $\alpha[Q] \subset X \cup Y \cup Z$.

Como $Z \approx X \cup Y \cup Z$, existe $T \subset Z$ tal que $T \approx \alpha[Q]$.

Mas então, como $\alpha[Q] \approx Q$, temos $Q \approx T$.

Demonstração

Seja α uma rotação que não está em $G * H$ e $\alpha[Q] \cap Q = \emptyset$.

Então, $\alpha[Q] \subset X \cup Y \cup Z$.

Como $Z \approx X \cup Y \cup Z$, existe $T \subset Z$ tal que $T \approx \alpha[Q]$.

Mas então, como $\alpha[Q] \approx Q$, temos $Q \approx T$.

Como $X \approx Y$, segue que

Demonstração

Seja α uma rotação que não está em $G * H$ e $\alpha[Q] \cap Q = \emptyset$.

Então, $\alpha[Q] \subset X \cup Y \cup Z$.

Como $Z \approx X \cup Y \cup Z$, existe $T \subset Z$ tal que $T \approx \alpha[Q]$.

Mas então, como $\alpha[Q] \approx Q$, temos $Q \approx T$.

Como $X \approx Y$, segue que

$$X \cup Q \approx Y \cup T. \tag{2}$$

Demonstração

Ainda, como $Y \cup T \subset Y \cup Z \subset S$, pela terceira propriedade de $\approx$ e por (1) e (2),

Demonstração

Ainda, como $Y \cup T \subset Y \cup Z \subset S$, pela terceira propriedade de $\approx$ e por (1) e (2),

$$Y \cup Z \approx S.$$

Demonstração

Ainda, como $Y \cup T \subset Y \cup Z \subset S$, pela terceira propriedade de $\approx$ e por (1) e (2),

$$Y \cup Z \approx S.$$

Sejam

$$S_1 = X \cup Q,$$

$$S_2 = Y \cup Z.$$

Demonstração

Ainda, como $Y \cup T \subset Y \cup Z \subset S$, pela terceira propriedade de $\approx$ e por (1) e (2),

$$Y \cup Z \approx S.$$

Sejam

$$S_1 = X \cup Q,$$

$$S_2 = Y \cup Z.$$

Temos que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \approx S$ e $S_2 \approx S$.

Demonstração

Ainda, como $Y \cup T \subset Y \cup Z \subset S$, pela terceira propriedade de $\approx$ e por (1) e (2),

$$Y \cup Z \approx S.$$

Sejam

$$S_1 = X \cup Q,$$

$$S_2 = Y \cup Z.$$

Temos que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \approx S$ e $S_2 \approx S$.

QUOD ERAT DEMONSTRANDUM

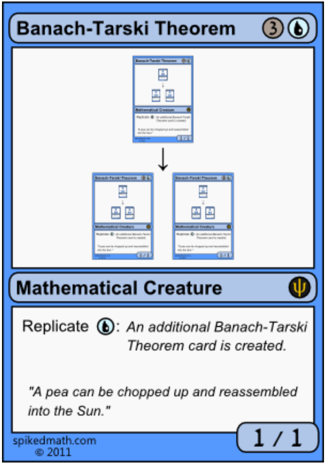
Referência Bibliográfica

- Winfried Just e Martin Weese, *Discovering Modern Set Theory. I*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1998

Charges


spikedmath.com
© 2010
EVERY TIME YOU USE THE AXIOM OF CHOICE... GOD KILLS A KITTEN.
BUT WHICH ONE DOES HE KILL?

Charges


Banach-Tarski Theorem
3
Mathematical Creature
Replicate : An additional Banach-Tarski Theorem card is created.
"A pea can be chopped up and reassembled into the Sun."
spikedmath.com
© 2011
1 / 1

Charges


What is your viewpoint on the Axiom of Choice?
Presidential Debate
spikedmath.com
© 2010