Problemas de tirar o chapéu

Seminário de coisas legais

Amanda Figur

ICMC — USP

18 de outubro de 2018

Qual a cor do meu chapéu?

Qual a cor do meu chapéu?

Ele é preto.

Suponha que a gente viva num mundo só com chapéus **pretos** e **brancos**.

Mas e se eu não soubesse a cor do meu chapéu?

Aí eu ia ter que adivinhar.

Mas e se eu não soubesse a cor do meu chapéu?

Aí eu ia ter que adivinhar. Com 50% de chance de acerto.

Mas e se eu não soubesse a cor do meu chapéu?

Aí eu ia ter que adivinhar. Com 50% de chance de acerto.

Mas esse não é um problema tão legal.

Mas e se eu não soubesse a cor do meu chapéu?

Aí eu ia ter que adivinhar. Com 50% de chance de acerto.

Mas esse não é um problema tão legal.

Vamos tentar deixar ele mais interessante... através de alguns jogos.

Adivinhando a cor do seu próprio chapéu

Se você errar a cor do próprio chapéu...

Se você errar a cor do próprio chapéu...

... você ...

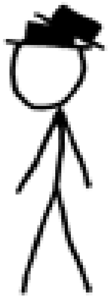
Se você errar a cor do próprio chapéu...

... você ...

... tem que tirar seu chapéu.

Um problema com dois chapéus...

Não assim



Uma situação

Arnaldo e Bernaldo estão usando chapéus. Um pode ver o chapéu do outro, mas cada um não pode ver seu próprio chapéu.

Uma situação

Arnaldo e Bernaldo estão usando chapéus. Um pode ver o chapéu do outro, mas cada um não pode ver seu próprio chapéu.

Figura: Ilustrando essa situação


I want to play a game.


A
B

O jogo

Arnaldo e Bernaldo devem falar a cor de seu próprio chapéu simultaneamente.

O jogo

Arnaldo e Bernaldo devem falar a cor de seu próprio chapéu simultaneamente.

As condições

Eles não podem se comunicar depois dos chapéus terem sido colocados sobre suas cabeças

O jogo

Arnaldo e Bernaldo devem falar a cor de seu próprio chapéu simultaneamente.

As condições

Eles não podem se comunicar depois dos chapéus terem sido colocados sobre suas cabeças e pelo menos um deles deve acertar a cor do próprio chapéu.

Tentando manter os chapéus em nossas cabeças.

Tentando manter os chapéus em nossas cabeças.

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Tentando manter os chapéus em nossas cabeças.

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.
Note que há duas possibilidades:

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.
Note que há duas possibilidades: ou os dois chapéus são da mesma cor,

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.
Note que há duas possibilidades: ou os dois chapéus são da mesma cor, ou os dois chapéus são de cores diferentes.

Tentando manter os chapéus em nossas cabeças.

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.
Note que há duas possibilidades: ou os dois chapéus são da mesma cor, ou os dois chapéus são de cores diferentes.

A estratégia

Arnaldo diz a cor que vê na cabeça de Bernaldo

Tentando manter os chapéus em nossas cabeças.

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.
Note que há duas possibilidades: ou os dois chapéus são da mesma cor, ou os dois chapéus são de cores diferentes.

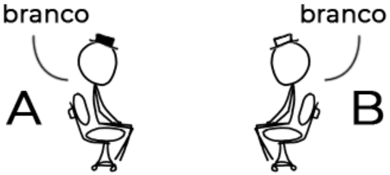
A estratégia

Arnaldo diz a cor que vê na cabeça de Bernaldo e Bernaldo diz a cor que não vê na cabeça de Arnaldo.

Se Arnaldo e Bernaldo se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.
Note que há duas possibilidades: ou os dois chapéus são da mesma cor, ou os dois chapéus são de cores diferentes.

A estratégia

Arnaldo diz a cor que vê na cabeça de Bernaldo e Bernaldo diz a cor que não vê na cabeça de Arnaldo.



Um problema com vários chapéus..

Uma situação

Seu número preferido de pessoas estão numa fila. Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.

Uma situação

Seu número preferido de pessoas estão numa fila. Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.

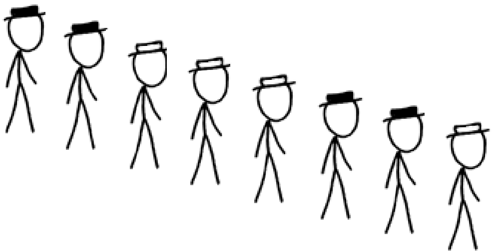
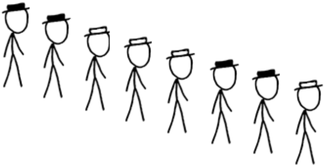
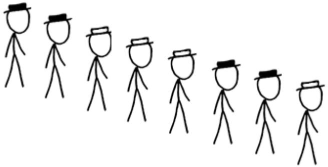


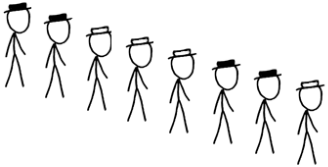
Figura: Ilustrando essa situação com 8 pessoas





O jogo

Um a um, em ordem, devem falar a cor de seu chapéu.

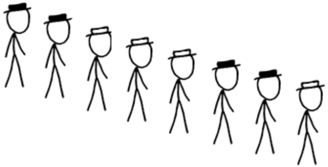


O jogo

Um a um, em ordem, devem falar a cor de seu chapéu.

As condições

Eles não podem se comunicar depois dos chapéus terem sido colocados sobre suas cabeças



O jogo

Um a um, em ordem, devem falar a cor de seu chapéu.

As condições

Eles não podem se comunicar depois dos chapéus terem sido colocados sobre suas cabeças e no máximo um deles pode errar a cor do próprio chapéu.

Não fui eu quem nos botou nessa

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Eles podem pedir pro primeiro integrante da fila codificar uma mensagem na paridade das cores dos chapéus.

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Eles podem pedir pro primeiro integrante da fila codificar uma mensagem na paridade das cores dos chapéus.

A estratégia

O primeiro integrante fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade ímpar de chapéus pretos

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Eles podem pedir pro primeiro integrante da fila codificar uma mensagem na paridade das cores dos chapéus.

A estratégia

O primeiro integrante fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade ímpar de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade par de chapéus pretos.

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Eles podem pedir pro primeiro integrante da fila codificar uma mensagem na paridade das cores dos chapéus.

A estratégia

O primeiro integrante fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade ímpar de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade par de chapéus pretos.

Assim, quando for a vez do segundo integrante da fila, basta que ele verifique a paridade dos chapéus pretos à sua frente.

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

Eles podem pedir pro primeiro integrante da fila codificar uma mensagem na paridade das cores dos chapéus.

A estratégia

O primeiro integrante fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade ímpar de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade par de chapéus pretos.

Assim, quando for a vez do segundo integrante da fila, basta que ele verifique a paridade dos chapéus pretos à sua frente. Se ela mudar, ele sabe que seu chapéu é preto.

Se os integrantes dessa enrascada se encontrarem previamente, eles podem combinar uma estratégia.

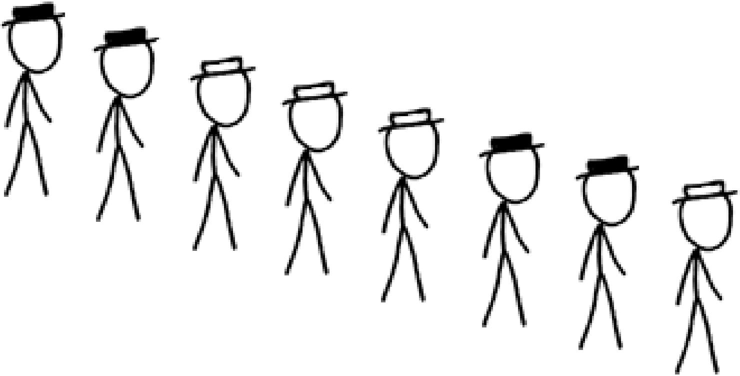
Eles podem pedir pro primeiro integrante da fila codificar uma mensagem na paridade das cores dos chapéus.

A estratégia

O primeiro integrante fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade ímpar de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade par de chapéus pretos.

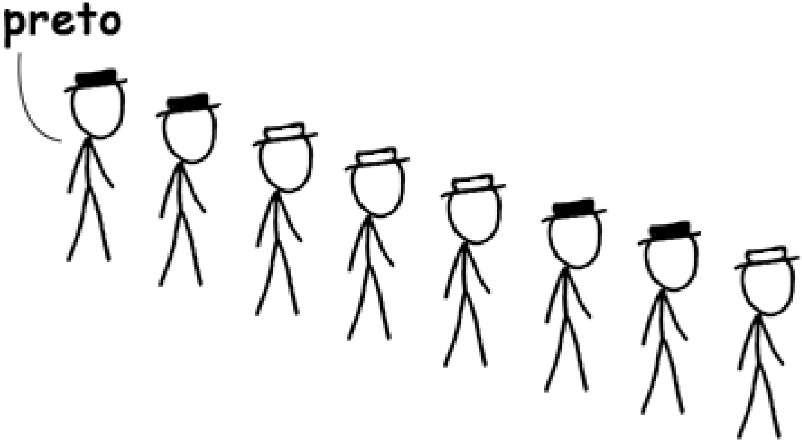
Assim, quando for a vez do segundo integrante da fila, basta que ele verifique a paridade dos chapéus pretos à sua frente. Se ela mudar, ele sabe que seu chapéu é preto. Se ela for a mesma, ele sabe que seu chapéu é branco.

Todo mundo tem uma audição muito boa

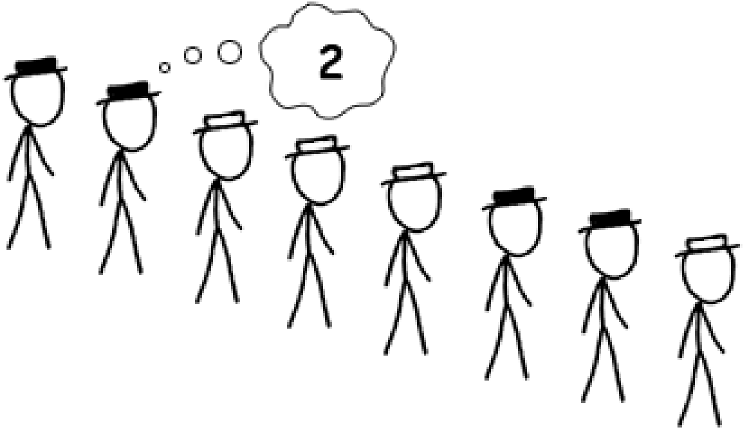


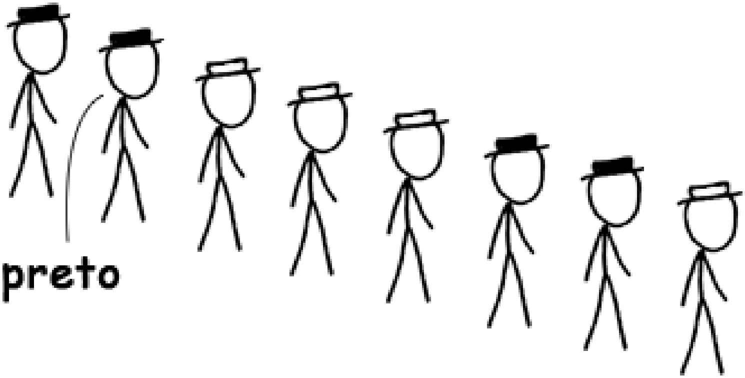
Todo mundo tem uma audição muito boa

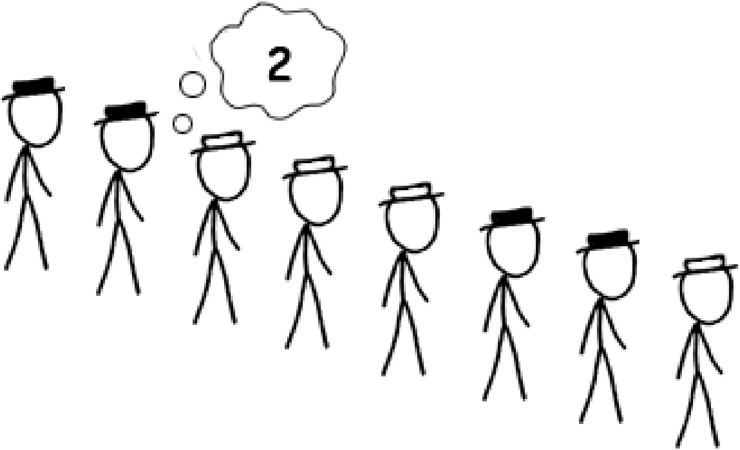
Todo mundo tem uma audição muito boa



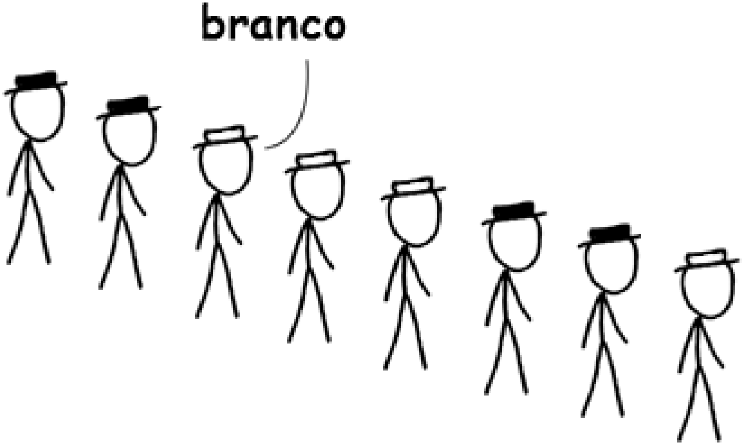
Todo mundo tem uma audição muito boa



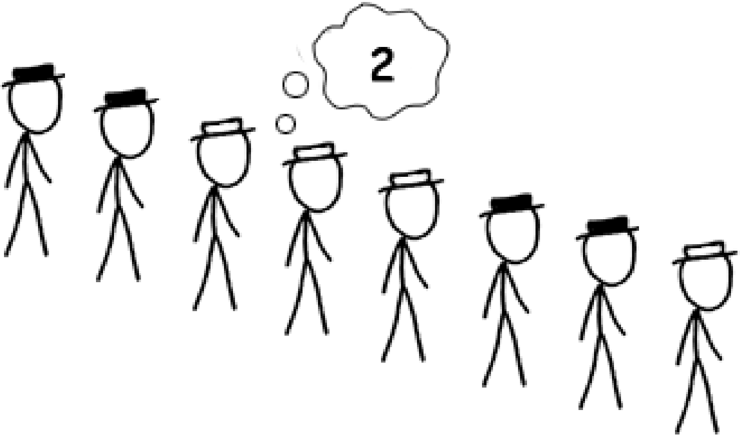

preto

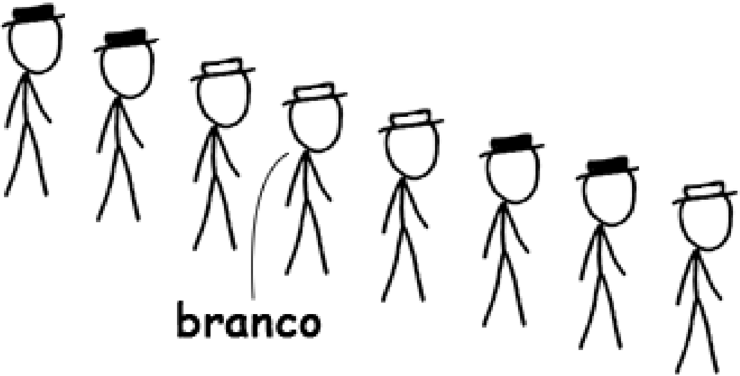

2

Todo mundo tem uma audição muito boa

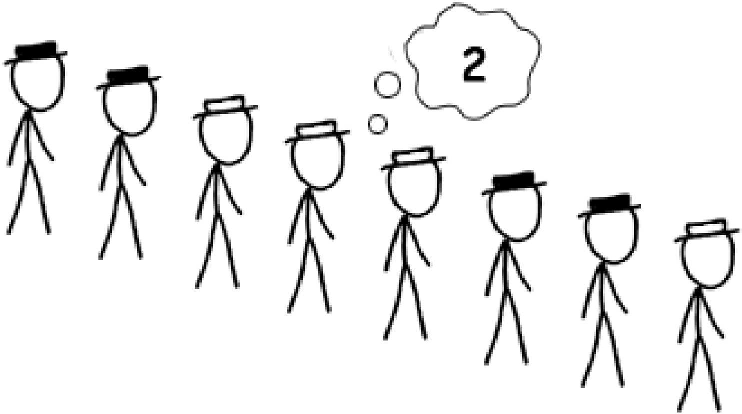


Todo mundo tem uma audição muito boa

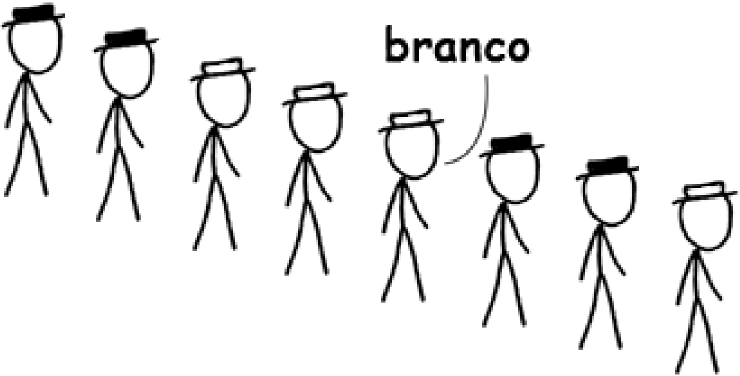



branco

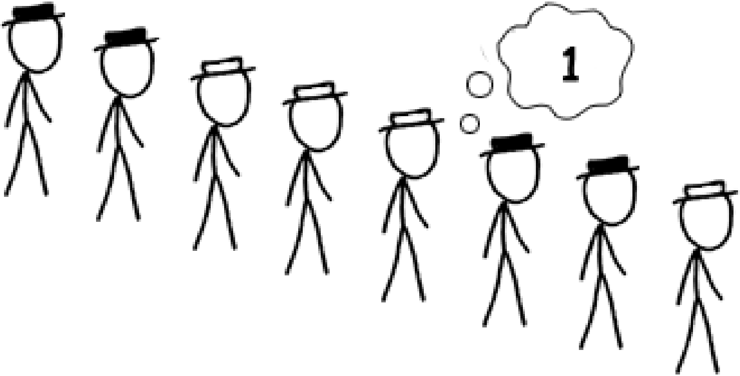
Todo mundo tem uma audição muito boa

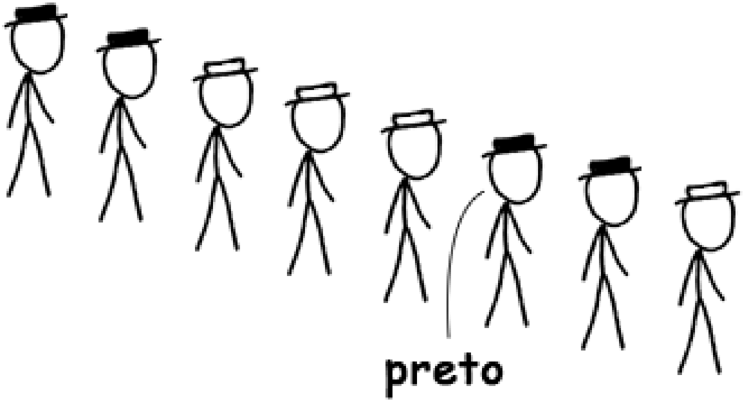


Todo mundo tem uma audição muito boa

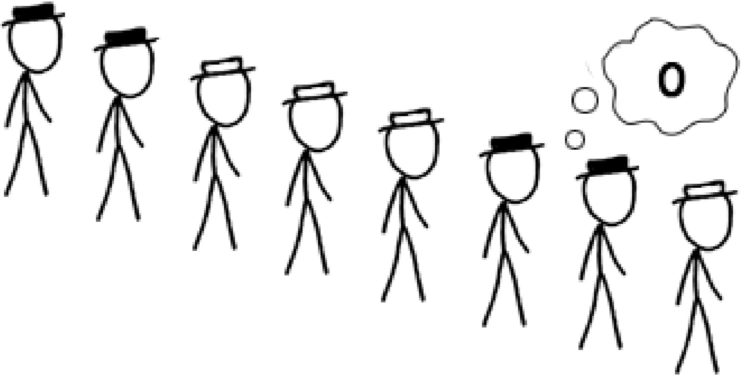


Todo mundo tem uma audição muito boa

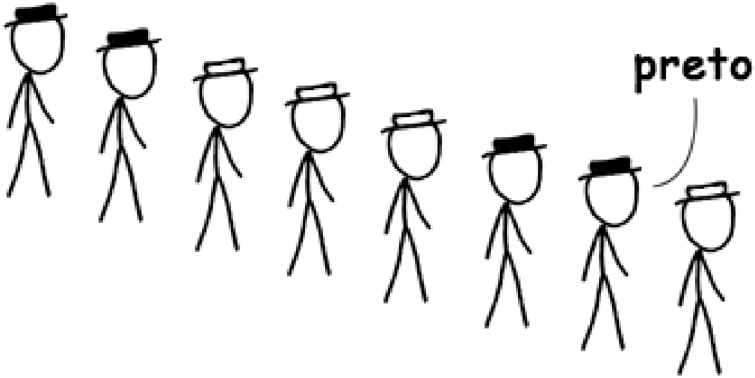



preto

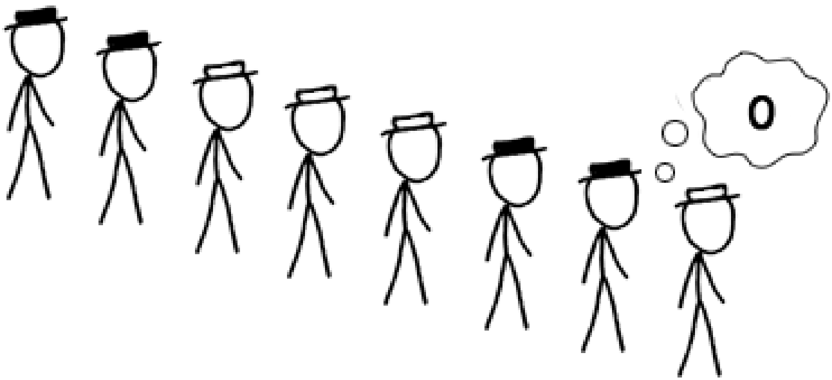
Todo mundo tem uma audição muito boa



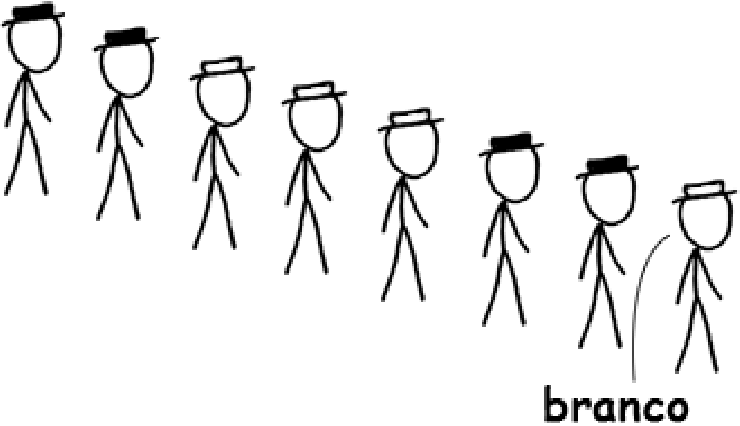
Todo mundo tem uma audição muito boa



Todo mundo tem uma audição muito boa



Todo mundo tem uma audição muito boa



Um problema com chapéus INFINITOS!

Não assim

Uma situação

Infinitas pessoas estão numa fila. Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.

Uma situação

Infinitas pessoas estão numa fila. Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.

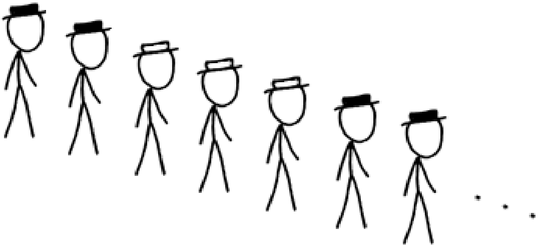
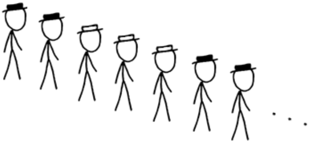
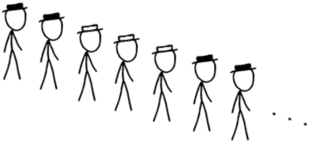


Figura: Ilustrando essa situação

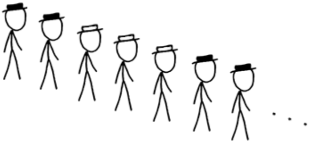
Vamos jogar pelas regras (mesmo sendo estranho)





O jogo

Um a um, em ordem, devem falar a cor de seu chapéu.

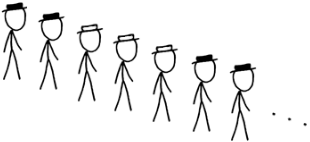


O jogo

Um a um, em ordem, devem falar a cor de seu chapéu.

As condições

Eles não podem se comunicar depois dos chapéus terem sido colocados sobre suas cabeças



O jogo

Um a um, em ordem, devem falar a cor de seu chapéu.

As condições

Eles não podem se comunicar depois dos chapéus terem sido colocados sobre suas cabeças e uma quantidade infinita de pessoas deve acertar a cor do próprio chapéu.

Dessa vez vamos só pensar.

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

Dessa vez vamos só pensar.

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se há infinitos chapéus pretos

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se há infinitos chapéus pretos , todas as pessoas dizem “preto”

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se há infinitos chapéus pretos , todas as pessoas dizem “preto” e, no fim, infinitas pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Dessa vez vamos só pensar.

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se há infinitos chapéus pretos , todas as pessoas dizem “preto” e, no fim, infinitas pessoas acertarão a cor do próprio chapéu. Caso contrário, todas as pessoas dizem “branco”

Dessa vez vamos só pensar.

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se há infinitos chapéus pretos , todas as pessoas dizem “preto” e, no fim, infinitas pessoas acertarão a cor do próprio chapéu. Caso contrário, todas as pessoas dizem “branco” , e como há infinitos chapéus brancos

Se o pessoal se encontrar previamente, eles podem combinar de cada um utilizar a mesma estratégia.

Como cada integrante da fila verá à sua frente uma quantidade infinita de pessoas, basta cada um fazer o seguinte:

A estratégia

Um indivíduo fala que seu chapéu é preto caso veja à sua frente uma quantidade infinita de chapéus pretos e fala que seu chapéu é branco caso veja à sua frente uma quantidade finita de chapéus pretos.

Se há infinitos chapéus pretos , todas as pessoas dizem “preto” e, no fim, infinitas pessoas acertarão a cor do próprio chapéu. Caso contrário, todas as pessoas dizem “branco” , e como há infinitos chapéus brancos , infinitas pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Porém nada impede que **infinitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Porém nada impede que **infinitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Nessa estratégia **uma quantidade finita de pessoas errará a cor do próprio chapéu** apenas se houverem finitos chapéus brancos ou finitos chapéus pretos.

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Porém nada impede que **infinitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Nessa estratégia **uma quantidade finita de pessoas errará a cor do próprio chapéu** apenas se houverem finitos chapéus brancos ou finitos chapéus pretos.

Uma pergunta de coçar só finitas cabeças

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Porém nada impede que **infinitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Nessa estratégia **uma quantidade finita de pessoas errará a cor do próprio chapéu** apenas se houverem finitos chapéus brancos ou finitos chapéus pretos.

Uma pergunta de coçar só finitas cabeças

Existe uma estratégia que

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Porém nada impede que **infinitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Nessa estratégia **uma quantidade finita de pessoas errará a cor do próprio chapéu** apenas se houverem finitos chapéus brancos ou finitos chapéus pretos.

Uma pergunta de coçar só finitas cabeças

Existe uma estratégia que, independente da distribuição de cores de chapéu

Mas dá pra salvar mais pessoas?

Na estratégia que usamos é garantido que **infinitas** pessoas acertarão a cor do próprio chapéu.

Porém nada impede que **infinitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Nessa estratégia **uma quantidade finita de pessoas errará a cor do próprio chapéu** apenas se houverem finitos chapéus brancos ou finitos chapéus pretos.

Uma pergunta de coçar só finitas cabeças

Existe uma estratégia que, independente da distribuição de cores de chapéu, garante que apenas **finitas** dessas pessoas errem a cor do próprio chapéu?

Sim.

Sim.

Mas vamos ter que usar o **axioma da escolha**.

Mas escolha do quê?

Vamos conhecer o enunciado do axioma.

Vamos conhecer o enunciado do axioma.

O axioma da escolha

Vamos conhecer o enunciado do axioma.

O axioma da escolha

Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não vazios

Vamos conhecer o enunciado do axioma.

O axioma da escolha

Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não vazios, então existe uma função $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ tal que $f(X) \in X$ para todo $X \in \mathcal{F}$.

Vamos conhecer o enunciado do axioma.

O axioma da escolha

Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não vazios, então existe uma função $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ tal que $f(X) \in X$ para todo $X \in \mathcal{F}$.

Essa função f é a chamada função escolha.

Vamos conhecer o enunciado do axioma.

O axioma da escolha

Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não vazios, então existe uma função $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ tal que $f(X) \in X$ para todo $X \in \mathcal{F}$.

Essa função f é a chamada função escolha.E o que ela faz é, dado um conjunto, essa f "escolhe" um representante desse conjunto.

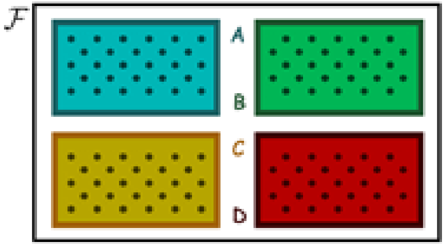
Vamos conhecer o enunciado do axioma.

O axioma da escolha

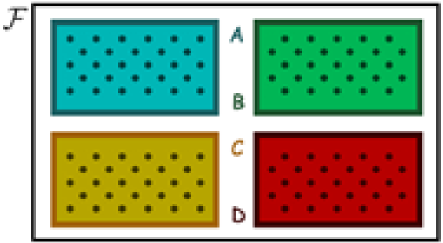
Se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos não vazios, então existe uma função $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup\limits_{X \in \mathcal{F}} X$ tal que $f(X) \in X$ para todo $X \in \mathcal{F}$.

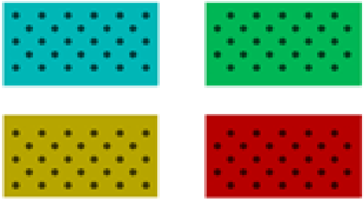
Essa função f é a chamada função escolha.E o que ela faz é, dado um conjunto, essa f "escolhe" um representante desse conjunto.

Vamos tentar entender melhor com um desenho...

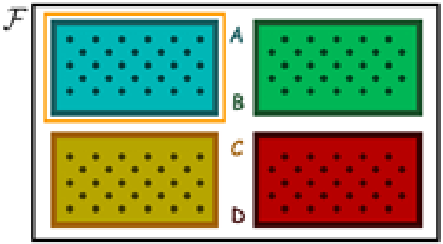

$\mathcal{F}$
A
B
C
D

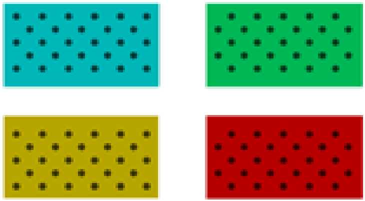
Uma função escolha



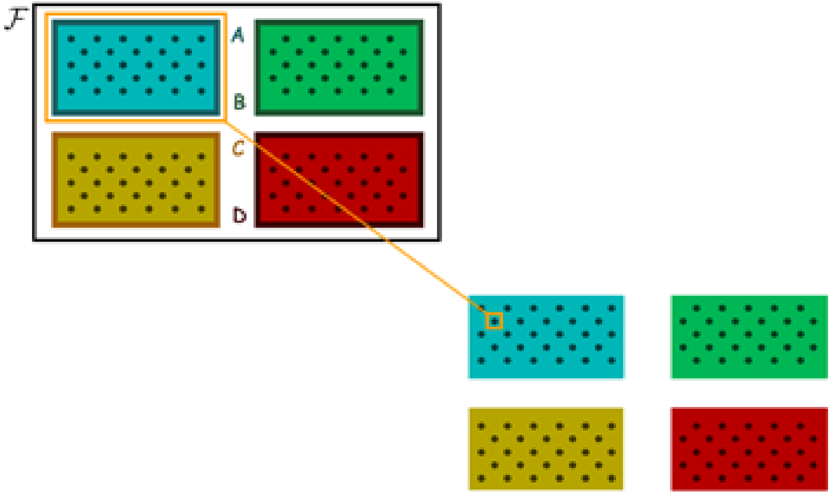


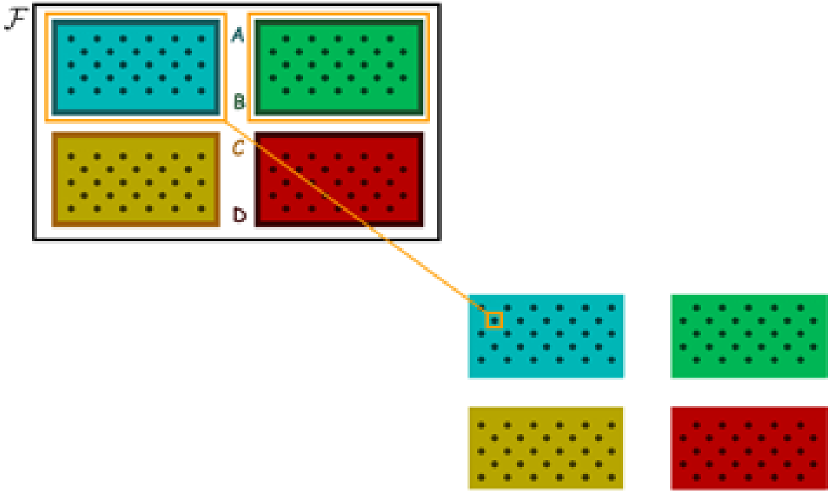
Uma função escolha





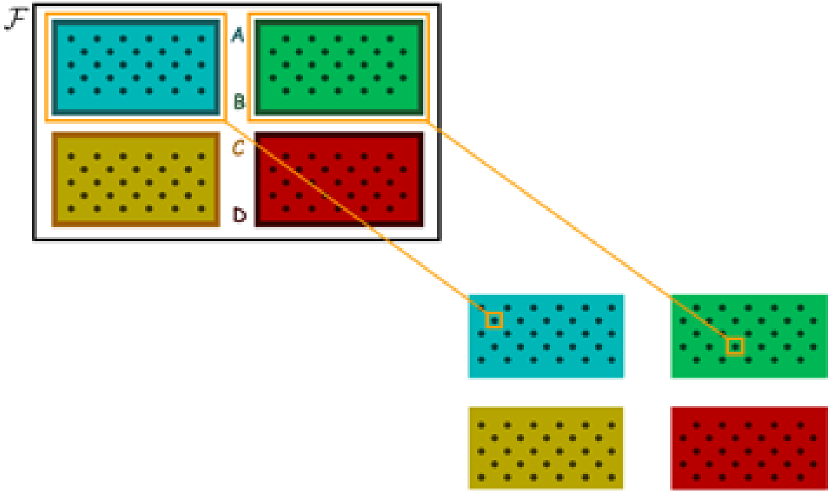
Uma função escolha



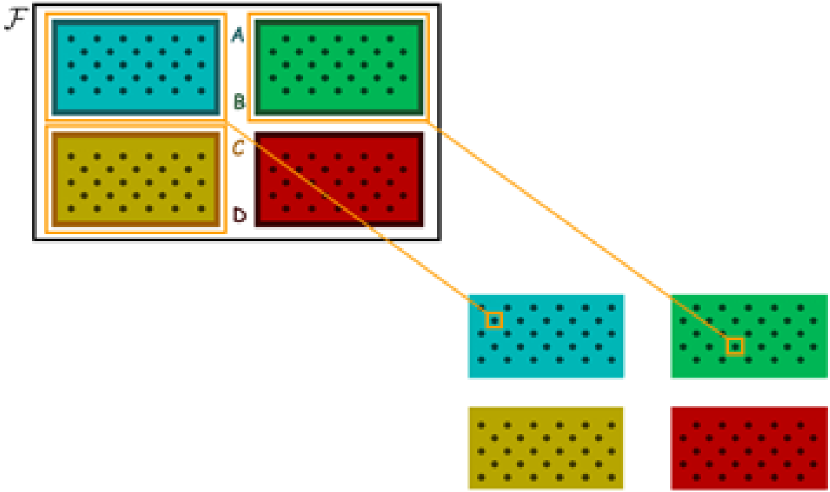


$\mathcal{F}$
A
B
C
D

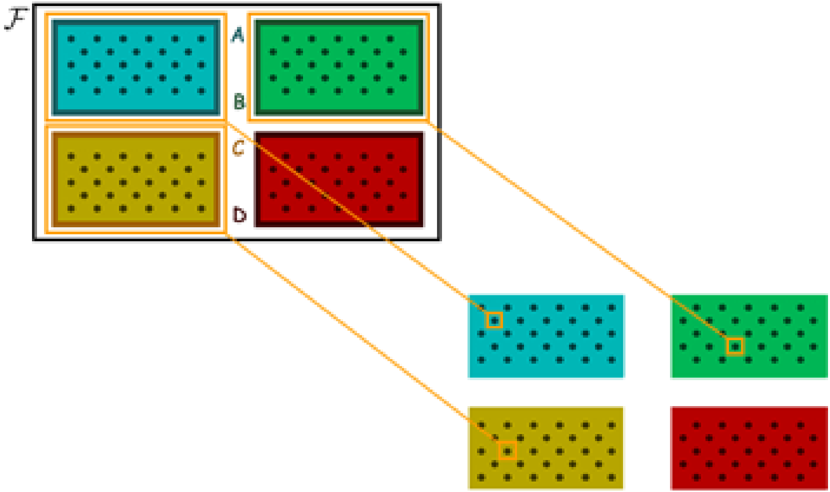
Uma função escolha



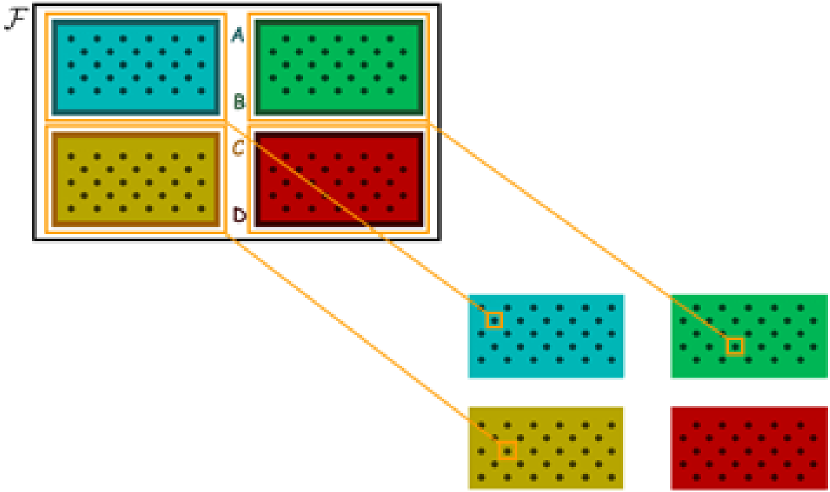
Uma função escolha



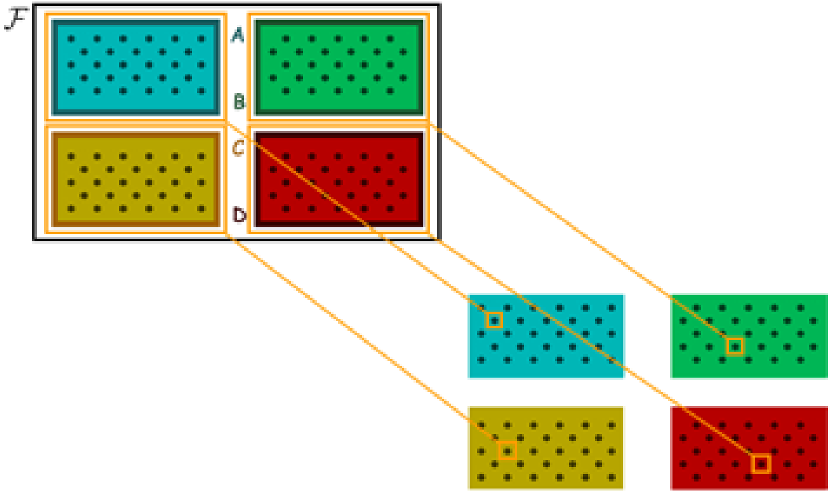
Uma função escolha

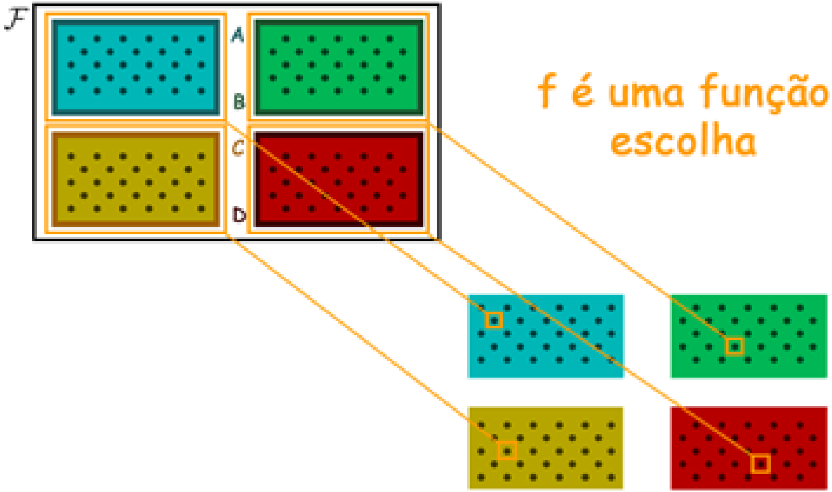


Uma função escolha



Uma função escolha




$\mathcal{F}$
A
B
C
D
f é uma função escolha

Resumidamente, o axioma da escolha diz que:

Resumidamente, o axioma da escolha diz que: se temos uma família de conjuntos

Resumidamente, o axioma da escolha diz que: se temos uma família de conjuntos , então é possível determinar um elemento representante de cada conjunto.

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.Uma a uma, em ordem, elas devem adivinhar a cor do próprio chapéu.

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.Uma a uma, em ordem, elas devem adivinhar a cor do próprio chapéu.

Queremos demonstrar a seguinte afirmação:

Afirmação

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.Uma a uma, em ordem, elas devem adivinhar a cor do próprio chapéu.

Queremos demonstrar a seguinte afirmação:

Afirmação

Existe uma estratégia que

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.Uma a uma, em ordem, elas devem adivinhar a cor do próprio chapéu.

Queremos demonstrar a seguinte afirmação:

Afirmação

Existe uma estratégia que, independente da distribuição de cores de chapéu

Mas pra que a gente precisa disso mesmo?

Agora, dada a seguinte situação:

Situação

Infinitas pessoas estão numa fila (enumeradas de acordo com $\mathbb{N}$).Cada uma pode ver apenas os chapéus das que estão à sua frente e não pode ver o seu próprio.Uma a uma, em ordem, elas devem adivinhar a cor do próprio chapéu.

Queremos demonstrar a seguinte afirmação:

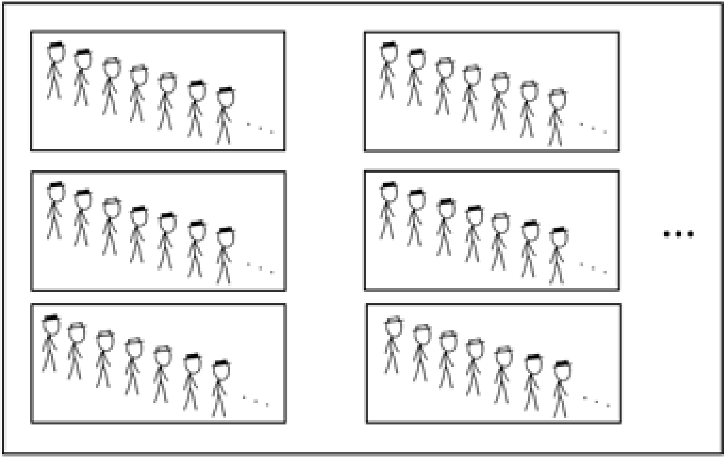
Afirmação

Existe uma estratégia que, independente da distribuição de cores de chapéu, garante que apenas **finitas** pessoas errem a cor do próprio chapéu.

Demonstração

Para começar, vamos olhar para o conjunto de todas as colorações de chapéus de uma fila infinita de pessoas.

Para começar, vamos olhar para o conjunto de todas as colorações de chapéus de uma fila infinita de pessoas.



Agora, sobre esse conjunto, vamos considerar a seguinte classe de equivalência:

A classe de equivalência

Agora, sobre esse conjunto, vamos considerar a seguinte classe de equivalência:

A classe de equivalência

Duas colorações pertencem à mesma classe de equivalência se, e somente se, elas são idênticas após um número **finito** de chapéus.

Agora, sobre esse conjunto, vamos considerar a seguinte classe de equivalência:

A classe de equivalência

Duas colorações pertencem à mesma classe de equivalência se, e somente se, elas são idênticas após um número **finito** de chapéus.

É como se estivéssemos agrupando todas as colorações que são "bem parecidas" (diferem apenas por um número finito de chapéus) e colocando elas em caixinhas.

Agora, sobre esse conjunto, vamos considerar a seguinte classe de equivalência:

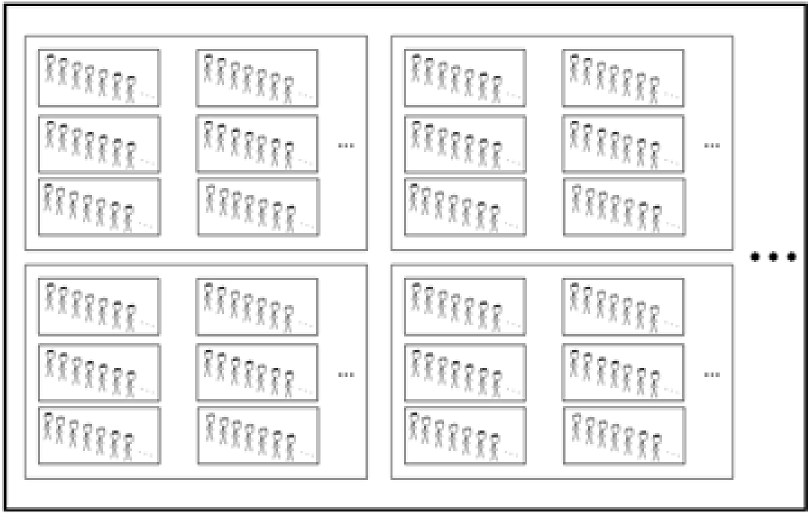
A classe de equivalência

Duas colorações pertencem à mesma classe de equivalência se, e somente se, elas são idênticas após um número **finito** de chapéus.

É como se estivéssemos agrupando todas as colorações que são "bem parecidas" (diferem apenas por um número finito de chapéus) e colocando elas em caixinhas.

A família dessas classes de equivalências ia parecer mais ou menos assim:

Demonstração



Essa família de conjuntos já tem a cara do enunciado do axioma da escolha...

Essa família de conjuntos já tem a cara do enunciado do axioma da escolha...

Então, para cada conjunto dessa família

Essa família de conjuntos já tem a cara do enunciado do axioma da escolha...

Então, para cada conjunto dessa família (ou seja, para cada uma das classes de equivalência)

Demonstração

Essa família de conjuntos já tem a cara do enunciado do axioma da escolha...

Então, para cada conjunto dessa família (ou seja, para cada uma das classes de equivalência) podemos escolher uma coloração que seja representante de cada uma deles.

Demonstração

Esses representantes funcionam mais ou menos assim:

Demonstração

Esses representantes funcionam mais ou menos assim:

é como se estivéssemos colocando uma etiqueta com a foto de uma coloração em cada um das “caixinhas”

Esses representantes funcionam mais ou menos assim:

é como se estivéssemos colocando uma etiqueta com a foto de uma coloração em cada um das “caixinhas” (cada “caixinha” é uma classe de equivalência)

Esses representantes funcionam mais ou menos assim:

é como se estivéssemos colocando uma etiqueta com a foto de uma coloração em cada um das “caixinhas” (cada “caixinha” é uma classe de equivalência) que dissesse:

Esses representantes funcionam mais ou menos assim:

é como se estivéssemos colocando uma etiqueta com a foto de uma coloração em cada um das “caixinhas” (cada “caixinha” é uma classe de equivalência) que dissesse:

“as colorações dessa caixinha são muito parecidas com a dessa foto”
(cada coloração difere da etiqueta por apenas um número finito de chapéus).

Demonstração

Suponha que todas as pessoas conhecem todos os representantes de cada classe de equivalência (elas poderiam combinar isso em algum momento prévio à situação).

Suponha que todas as pessoas conhecem todos os representantes de cada classe de equivalência (elas poderiam combinar isso em algum momento prévio à situação).

Agora, considere uma **pessoa** numa posição n da fila.

Suponha que todas as pessoas conhecem todos os representantes de cada classe de equivalência (elas poderiam combinar isso em algum momento prévio à situação).

Agora, considere uma **pessoa** numa posição n da fila.

Essa **pessoa** pode ver todas exceto finitas pessoas usando seus chapéus

Suponha que todas as pessoas conhecem todos os representantes de cada classe de equivalência (elas poderiam combinar isso em algum momento prévio à situação).

Agora, considere uma **pessoa** numa posição n da fila.

Essa **pessoa** pode ver todas exceto finitas pessoas usando seus chapéus (exceto $n - 1$ pra ser mais precisa).

Demonstração

Suponha que todas as pessoas conhecem todos os representantes de cada classe de equivalência (elas poderiam combinar isso em algum momento prévio à situação).

Agora, considere uma **pessoa** numa posição n da fila.

Essa **pessoa** pode ver todas exceto finitas pessoas usando seus chapéus (exceto $n-1$ pra ser mais precisa).

Então essa **pessoa** consegue dizer a qual classe de equivalência pertence a coloração que ela vê à sua frente.

Suponha que todas as pessoas conhecem todos os representantes de cada classe de equivalência (elas poderiam combinar isso em algum momento prévio à situação).

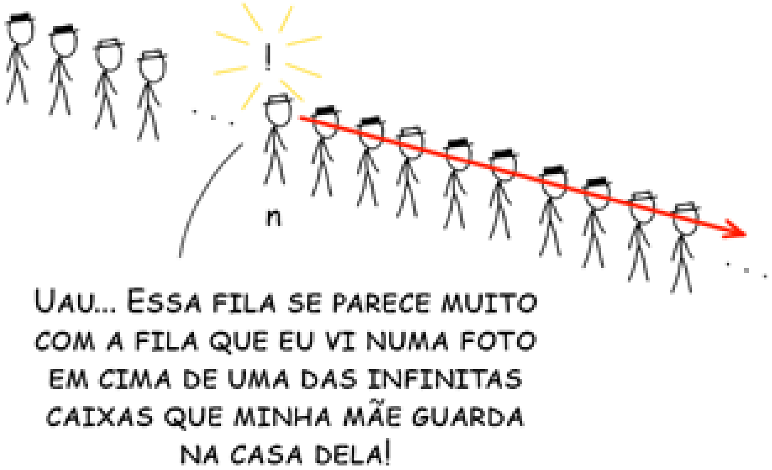
Agora, considere uma **pessoa** numa posição n da fila.

Essa **pessoa** pode ver todas exceto finitas pessoas usando seus chapéus (exceto $n - 1$ pra ser mais precisa).

Então essa **pessoa** consegue dizer a qual classe de equivalência pertence a coloração que ela vê à sua frente.

Basta que ela compare a fila de pessoas que pode enxergar com a respectiva "foto" da "etiqueta" de cada "caixinha".

Demonstração



Demonstração

Agora a estratégia:

Demonstração

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente.

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da “etiqueta”, em que “caixinha” ela está.

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da “etiqueta”, em que “caixinha” ela está. Então ela fala que a cor do seu chapéu é a cor do chapéu da pessoa na posição n da “foto”.

Demonstração

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da “etiqueta”, em que “caixinha” ela está. Então ela fala que a cor do seu chapéu é a cor do chapéu da pessoa na posição n da “foto”.

Como todas as colorações que pertencem a essa “caixinha” são iguais após uma quantidade finita de chapéus, então

Demonstração

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da “etiqueta”, em que “caixinha” ela está. Então ela fala que a cor do seu chapéu é a cor do chapéu da pessoa na posição n da “foto”.

Como todas as colorações que pertencem a essa “caixinha” são iguais após uma quantidade finita de chapéus, então, a partir de uma posição k na fila

Demonstração

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da “etiqueta”, em que “caixinha” ela está. Então ela fala que a cor do seu chapéu é a cor do chapéu da pessoa na posição n da “foto”.

Como todas as colorações que pertencem a essa “caixinha” são iguais após uma quantidade finita de chapéus, então, a partir de uma posição k na fila, todas as pessoas passarão a acertar a cor do próprio chapéu.

Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da “etiqueta”, em que “caixinha” ela está. Então ela fala que a cor do seu chapéu é a cor do chapéu da pessoa na posição n da “foto”.

Como todas as colorações que pertencem a essa “caixinha” são iguais após uma quantidade finita de chapéus, então, a partir de uma posição k na fila, todas as pessoas passarão a acertar a cor do próprio chapéu.

Deste modo, apenas finitas pessoas irão errar a cor do próprio chapéu... Basta que o representante de cada classe seja o mesmo pra todo mundo.

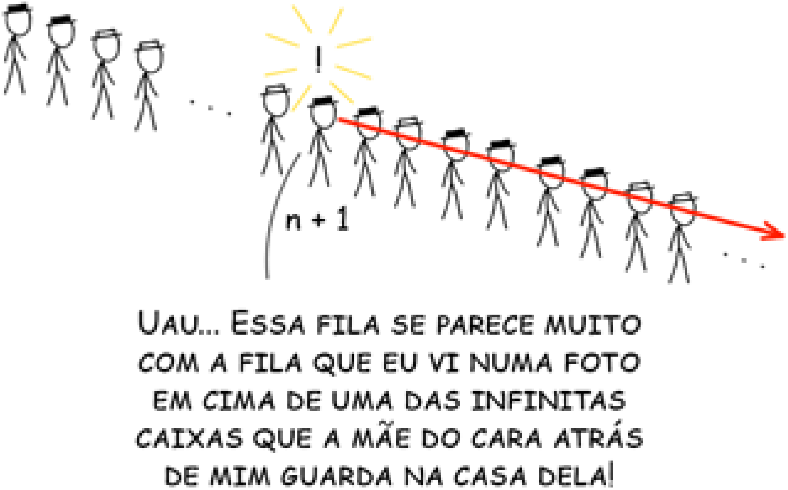
Agora a estratégia:

Uma pessoa na posição n da fila olha para a fila à sua frente. Ela sabe, por causa da "etiqueta", em que "caixinha" ela está. Então ela fala que a cor do seu chapéu é a cor do chapéu da pessoa na posição n da "foto".

Como todas as colorações que pertencem a essa "caixinha" são iguais após uma quantidade finita de chapéus, então, a partir de uma posição k na fila, todas as pessoas passarão a acertar a cor do próprio chapéu.

Deste modo, apenas finitas pessoas irão errar a cor do próprio chapéu... Basta que o representante de cada classe seja o mesmo pra todo mundo.

∎


!
n + 1
UAU... ESSA FILA SE PARECE MUITO COM A FILA QUE EU VI NUMA FOTO EM CIMA DE UMA DAS INFINITAS CAIXAS QUE A MÃE DO CARA ATRÁS DE MIM GUARDA NA CASA DELA!

References

Dave Richeson.
Infinite hat problems (solutions).
https://divisbyzero.com/2009/08/11/infinite-hat-problems-solutions/, 2009.
[Online; accessed 18-october-2004].

Jihad.
Prisoners problem — Mathematics stack exchange.
https://math.stackexchange.com/q/1032928, 2014.
[Online; accessed 18-october-2004].

Randall Munroe.
XKCD comics (altered).
Under a Creative Commons 2.5 license.
Comics number: 455, 1700 [Online; accessed 18-october-2004].

Wikipedia contributors.
Hat puzzle — Wikipedia, the free encyclopedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Hat_puzzle#Countably_Infinite-Hat_Variant_without_Hearing, 2018.
[Online; accessed 18-october-2004].

Fim