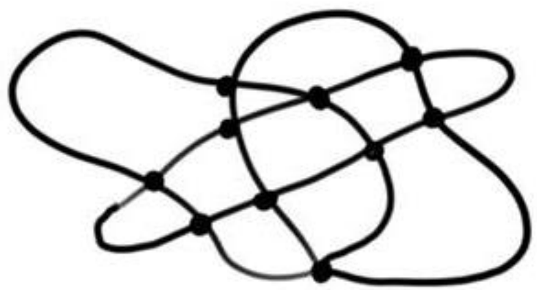
Retas são pontos

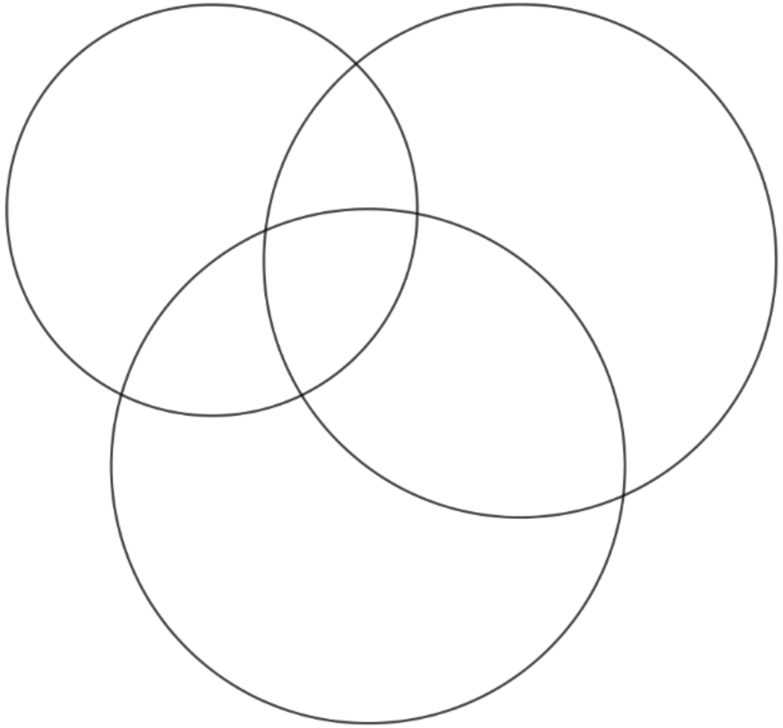
Círculos são pontos

O importante é contar!



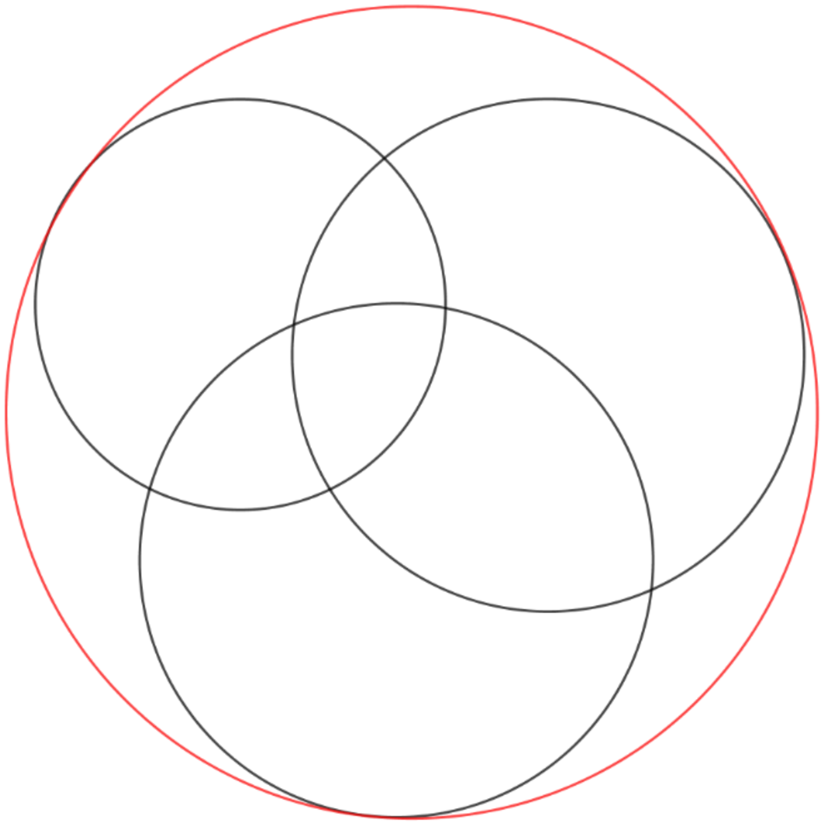
Os Círculos de Apollonius

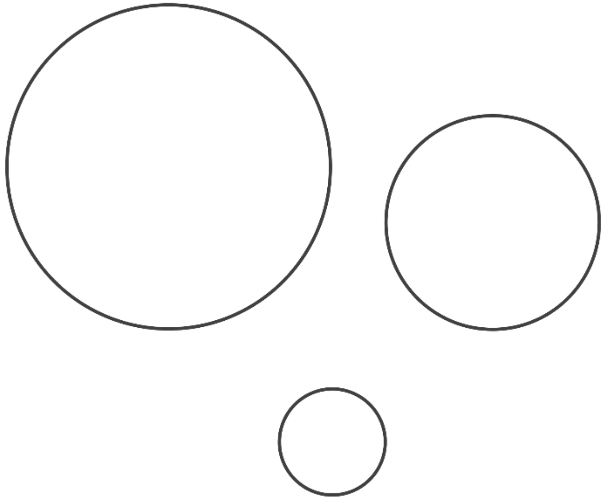
Dados três círculos gerais no plano. Quantos círculos são tangentes aos três?

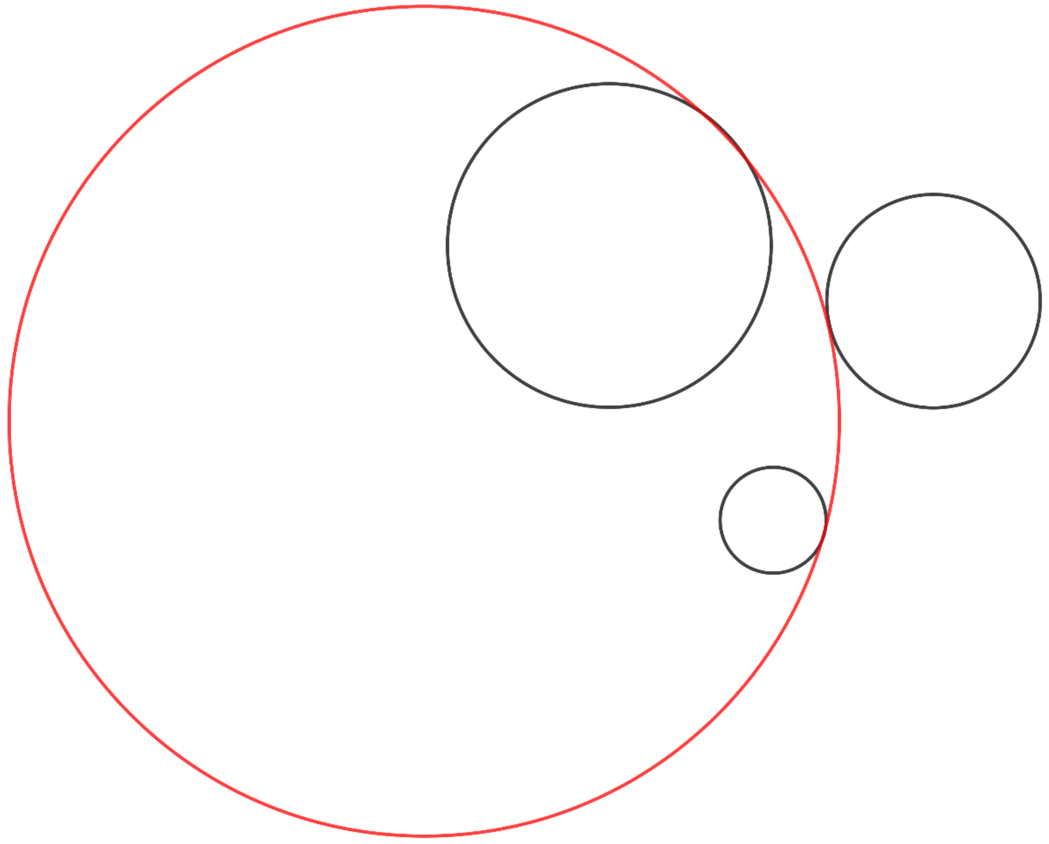


Os Círculos de Apollonius

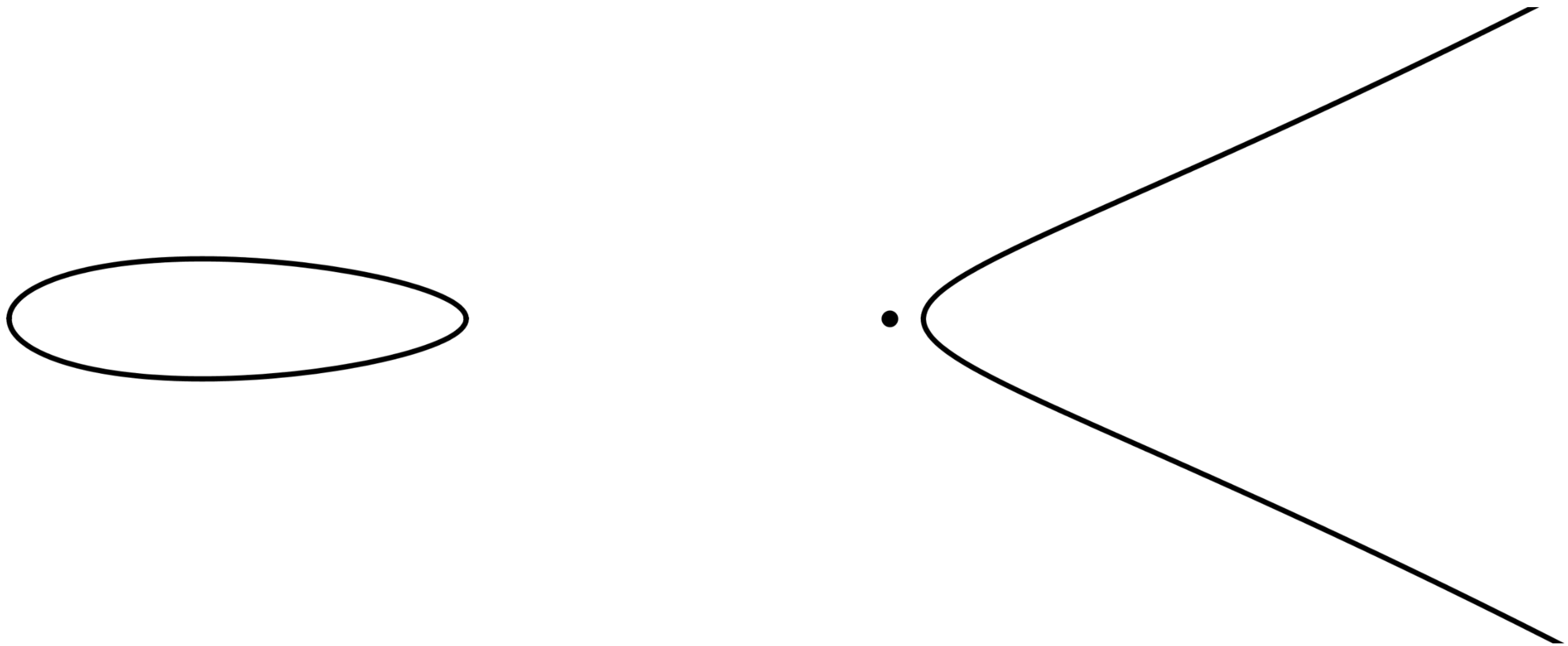
Dados três círculos gerais no plano. Quantos círculos são tangentes aos três?



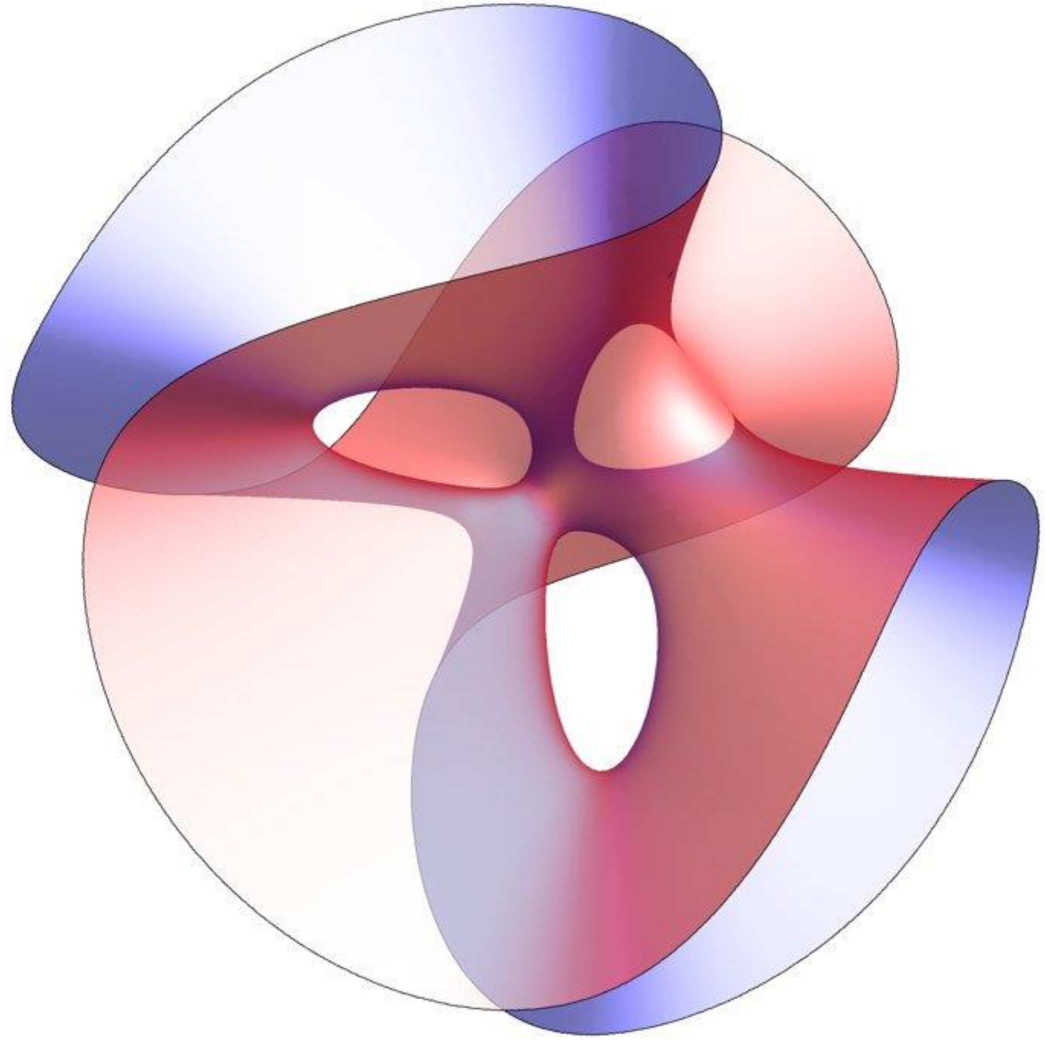




Retas tangentes a uma cúbica

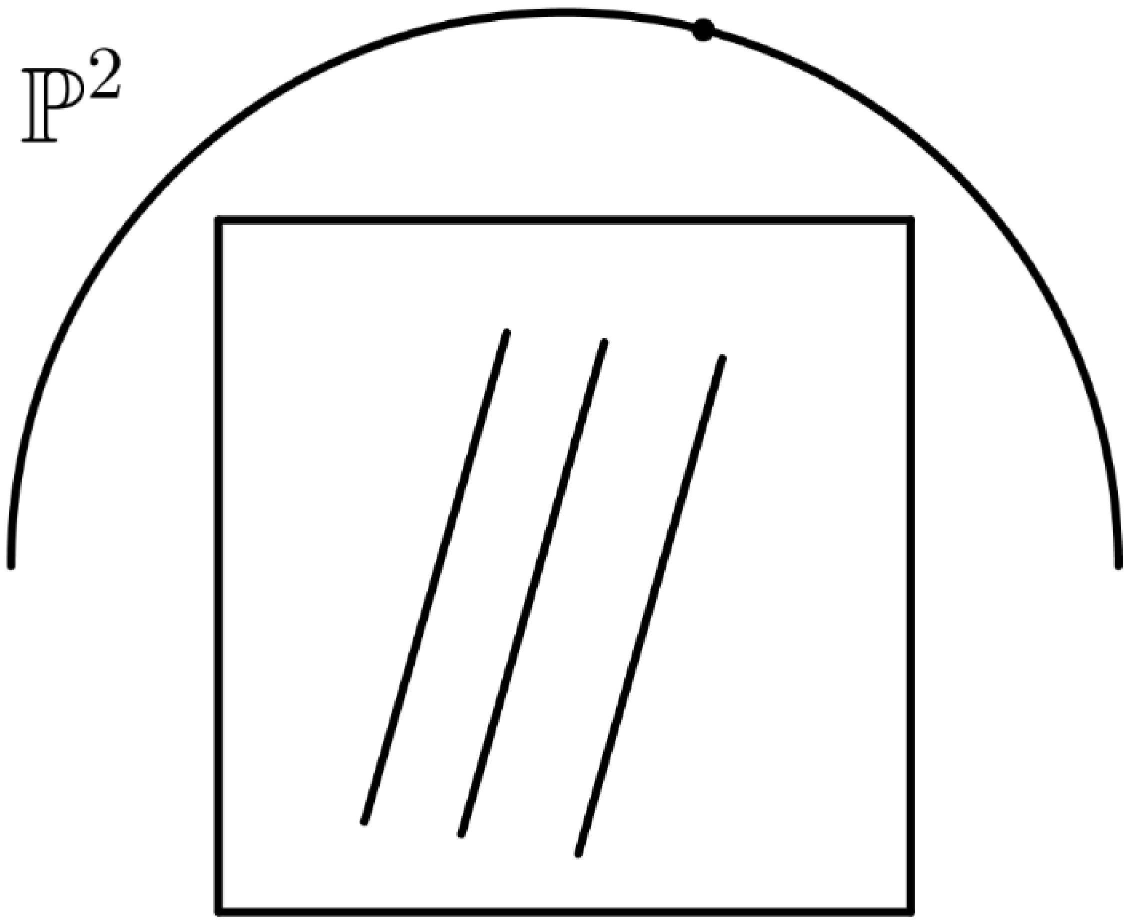


Retas em um cúbica?

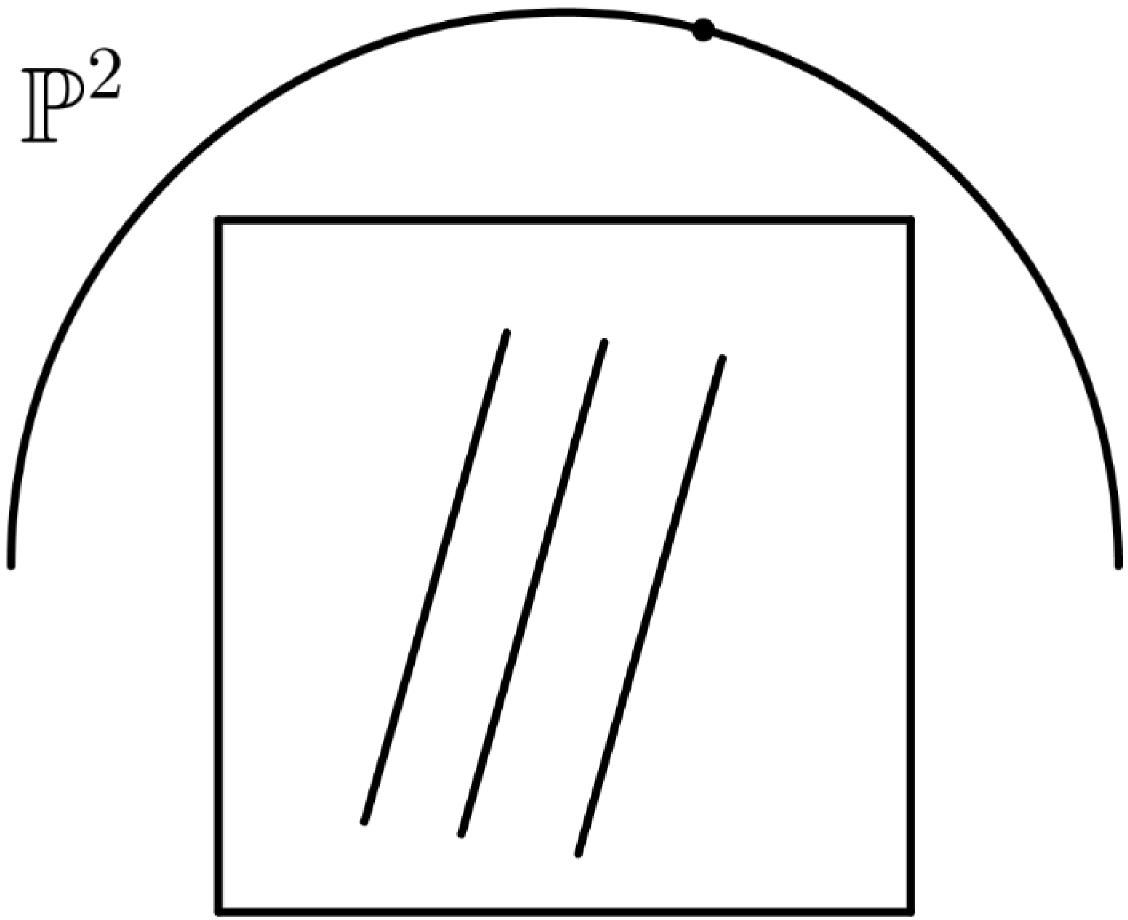


O Plano Projetivo

O Plano Projetivo



O Plano Projetivo



Coordenadas Homogêneas

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z], \quad \lambda \neq 0$$

Se $z \neq 0$

$$[x : y : 1] \leftrightarrow (x, y)$$

Se $z = 0$

$$[x : 1 : 0] \leftrightarrow (x)$$

Polinômios Homogêneos

Um polinômio é homogêneo quando todos seus monômios têm o mesmo grau. Equivalentemente, quando

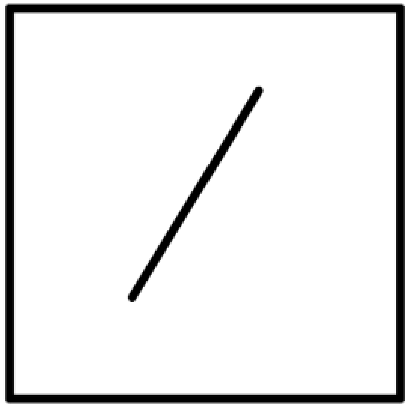
$$\lambda^d p(x, y, z) = p(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Polinômios Homogêneos

Um polinômio é homogêneo quando todos seus monômios têm o mesmo grau. Equivalentemente, quando

$$\lambda^d p(x, y, z) = p(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$ax + by + c = 0$

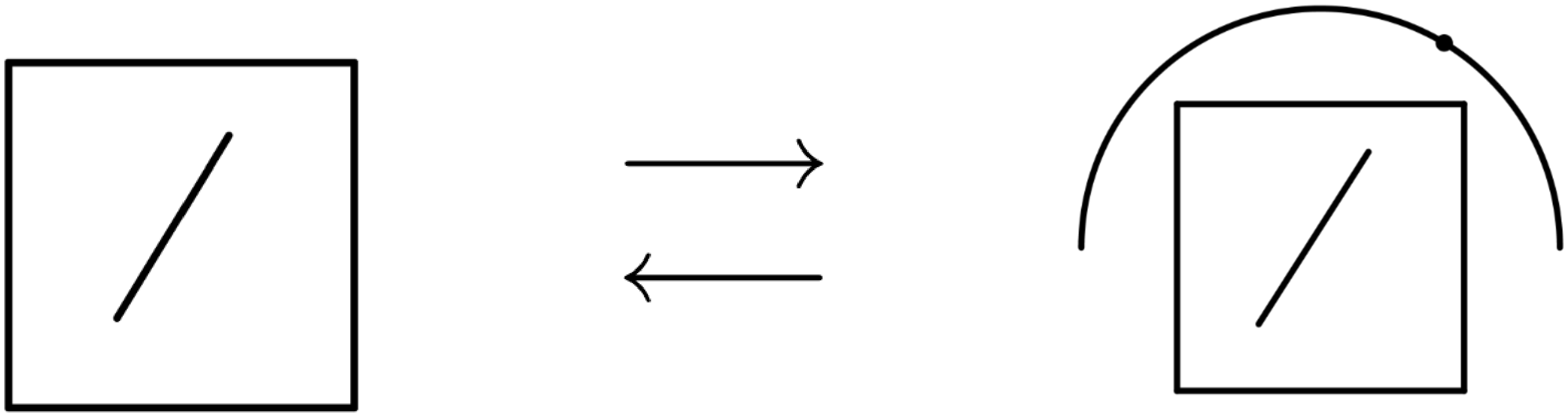


Polinômios Homogêneos

Um polinômio é homogêneo quando todos seus monômios têm o mesmo grau. Equivalentemente, quando

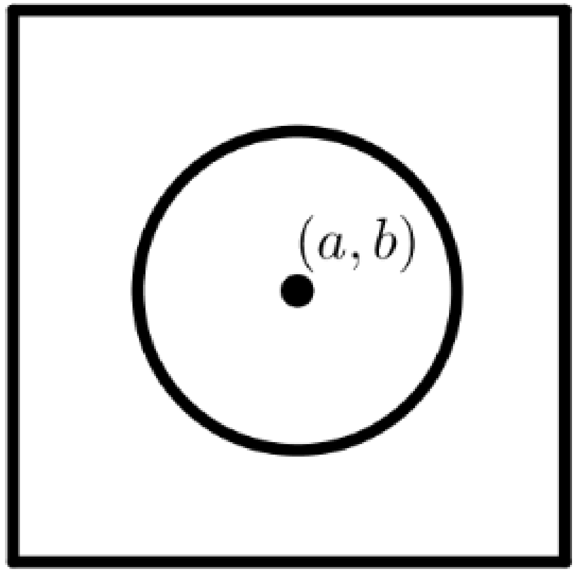
$$\lambda^d p(x, y, z) = p(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$ax + by + c = 0$ $\qquad\qquad$ $aX + bY + cZ = 0$



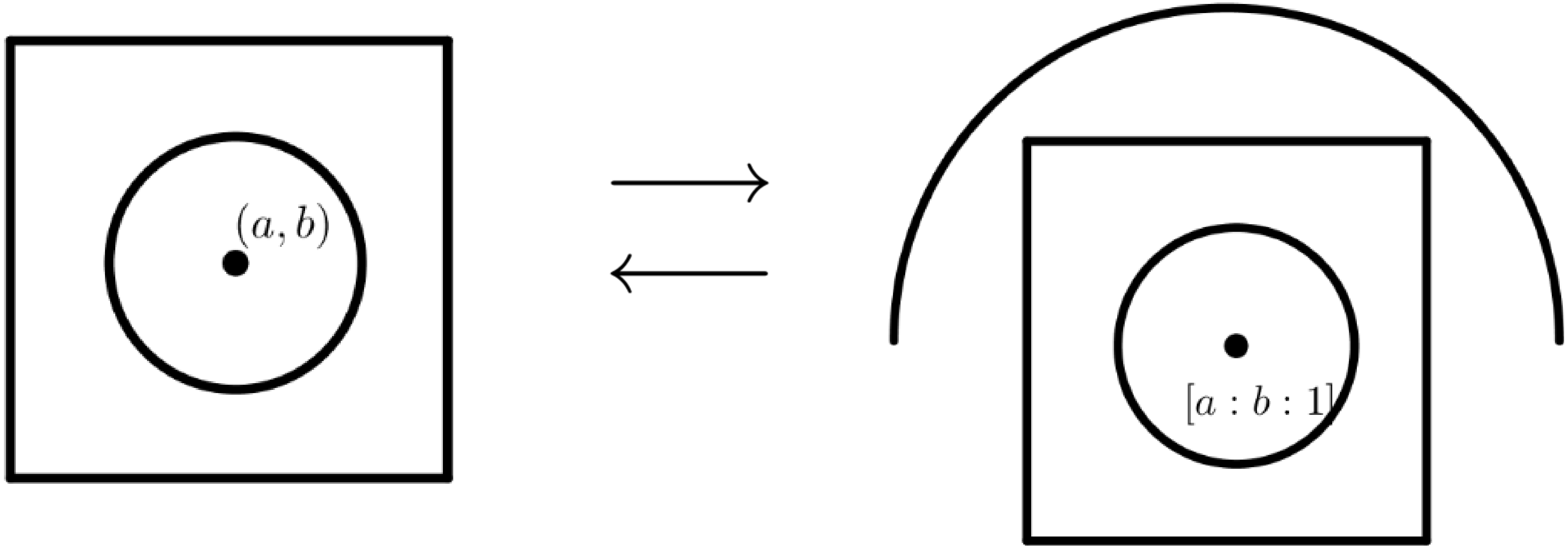
Polinômios Homogêneos

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

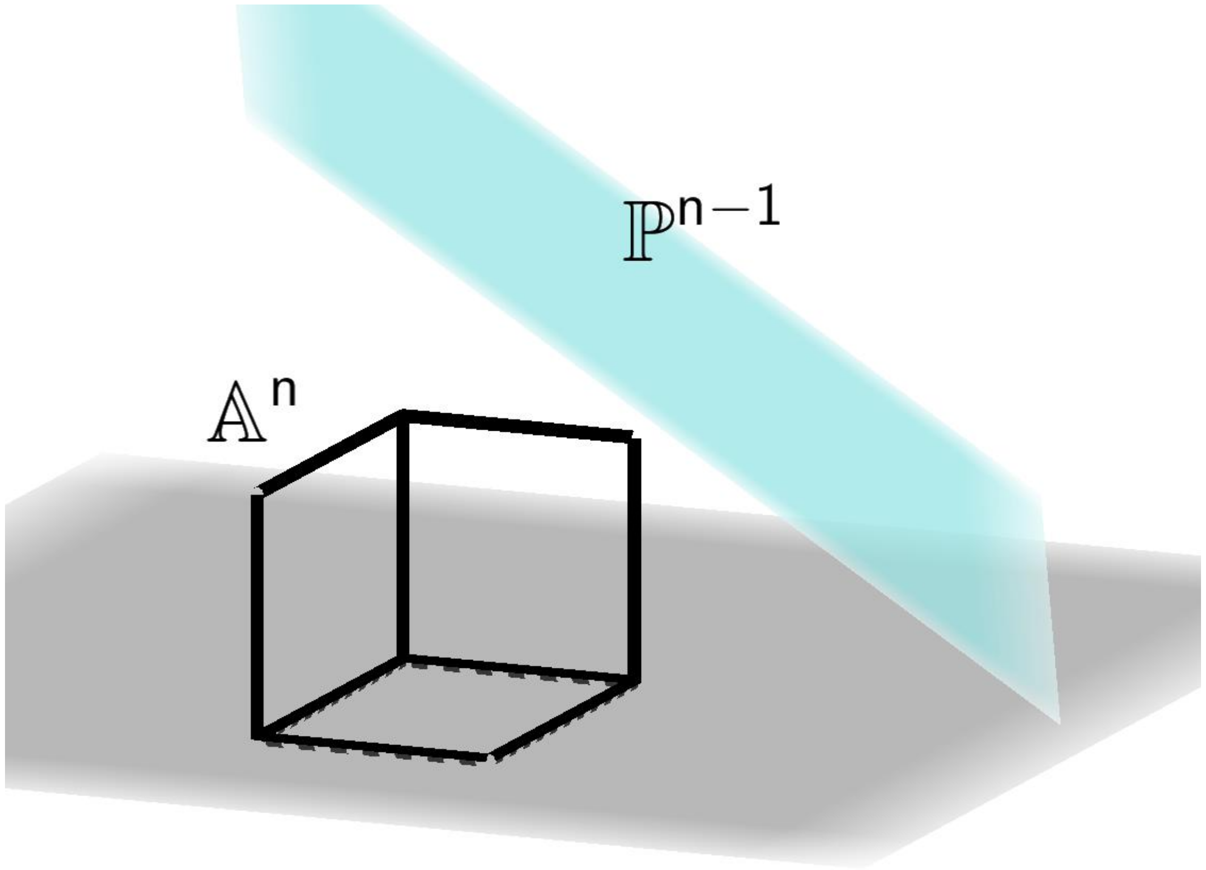


Polinômios Homogêneos

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (X-aZ)^2+(Y-bZ)^2=r^2Z^2$$



O Espaço Projetivo



Coordenadas Homogêneas

$$[X_0 : X_1 : \cdots : X_{n-1} : X_n]$$

$$\uparrow \downarrow$$

$$(X_0, X_1, \cdots, X_{n-1})$$

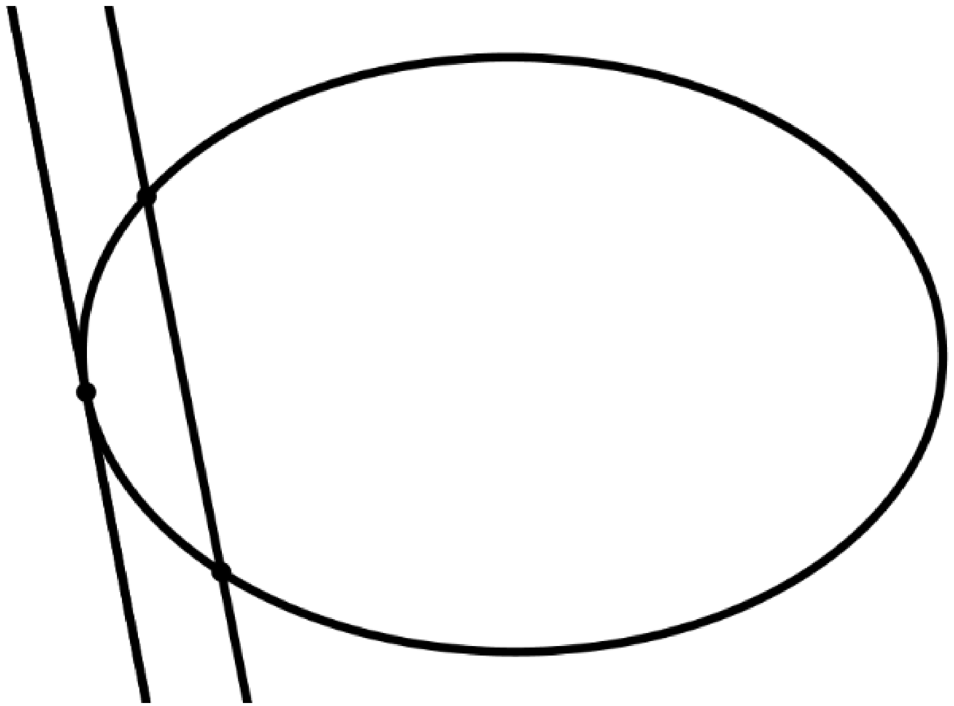
O Teorema de Bézout

O Teorema de Bézout

$$\sum_{P} I(P, F \cap G) = \deg F \cdot \deg G$$

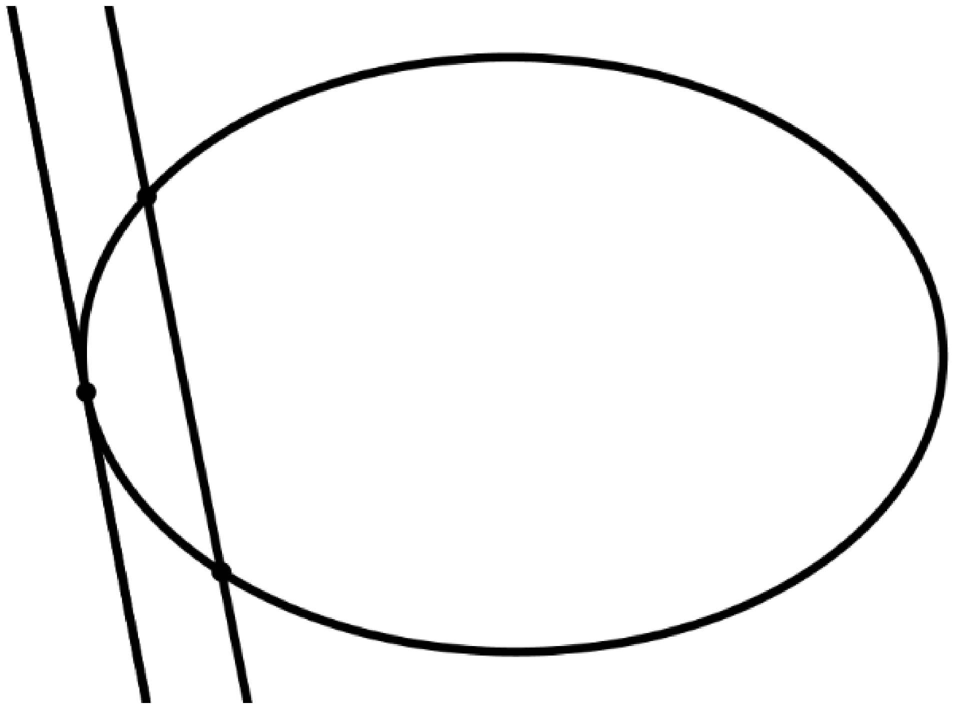
O Teorema de Bézout

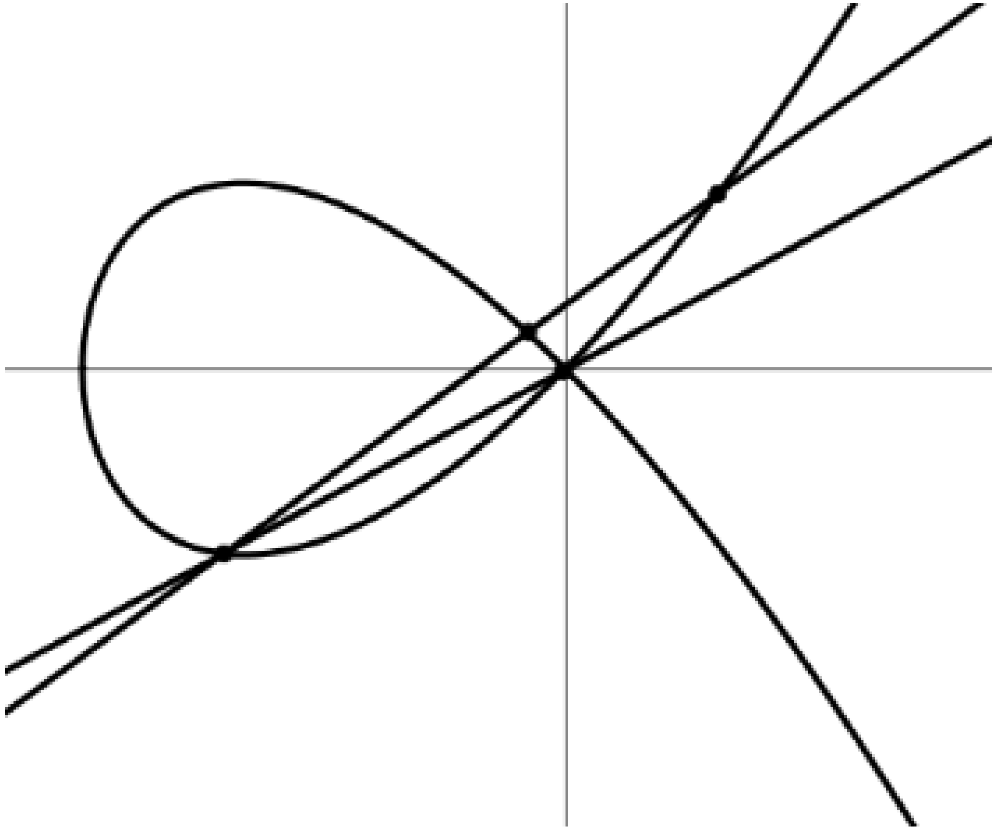
$$\sum_P I(P, F \cap G) = \deg F \cdot \deg G$$



O Teorema de Bézout

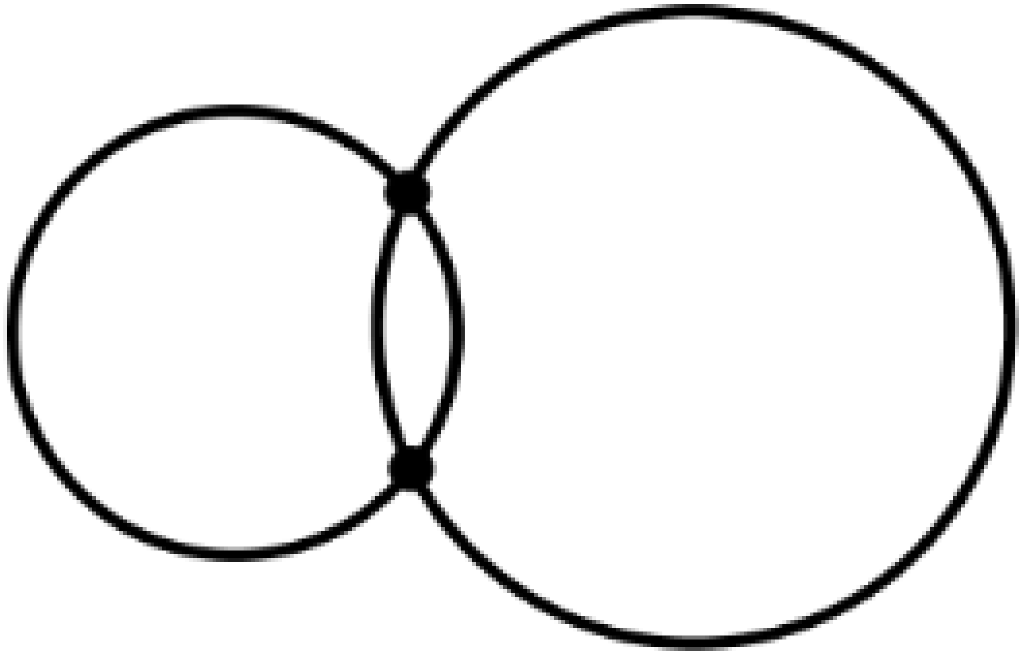
$$\sum_P I(P, F \cap G) = \deg F \cdot \deg G$$



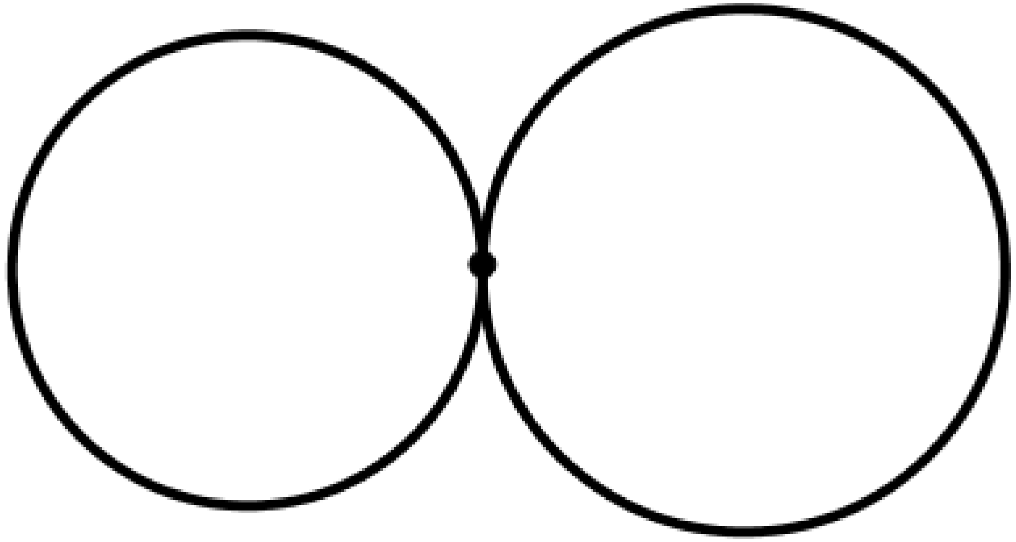


Intersecção Transversal

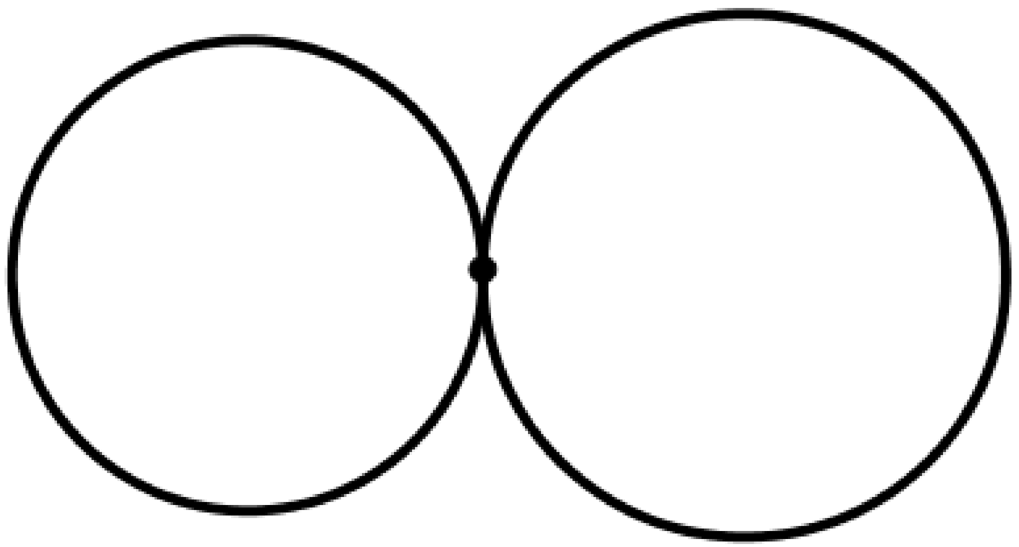
Intersecção Transversal

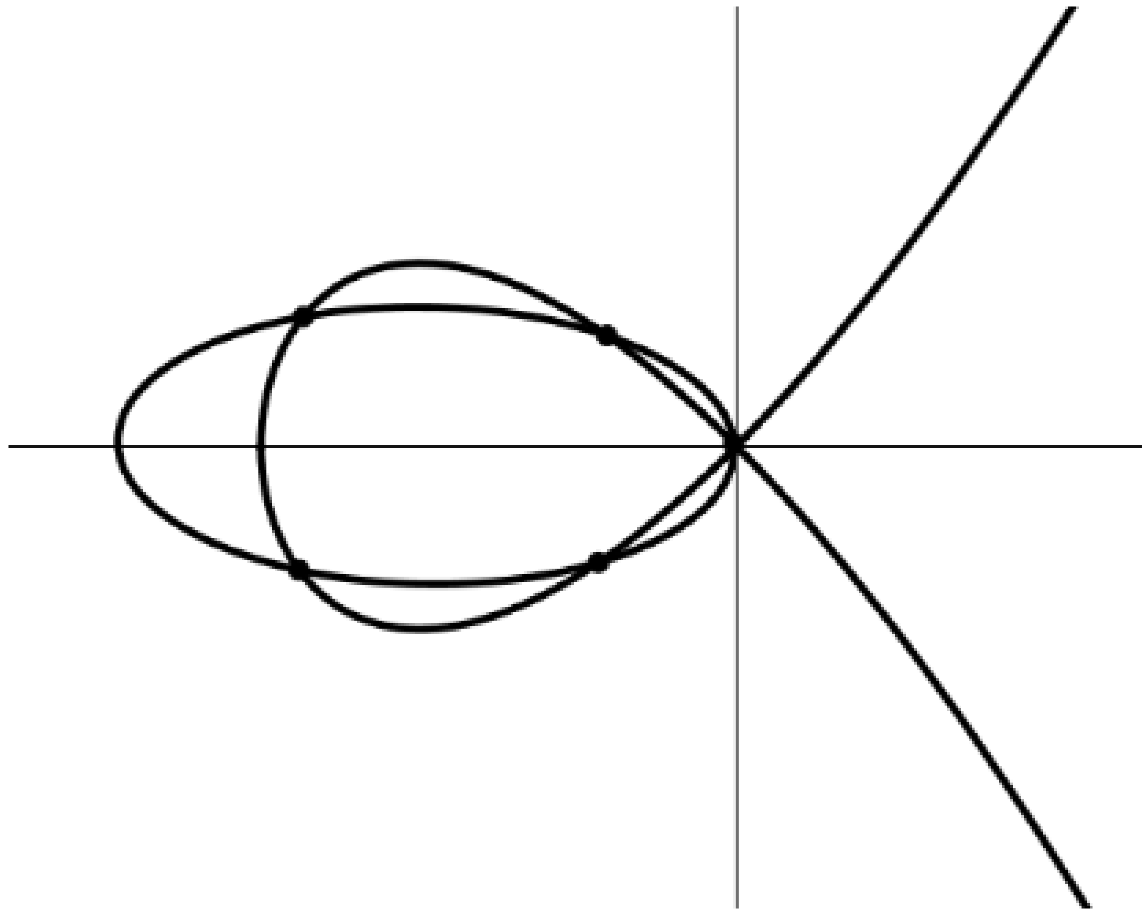


Intersecção Não-Transversal



Intersecção Não-Transversal



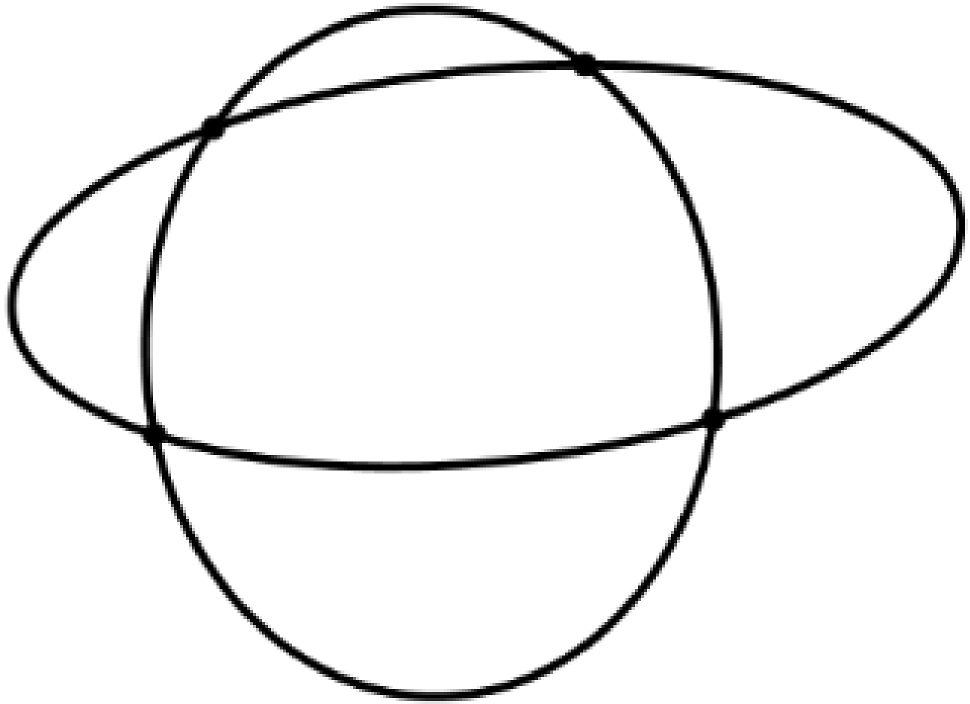


O Teorema de Bézout com Intersecções Transversais

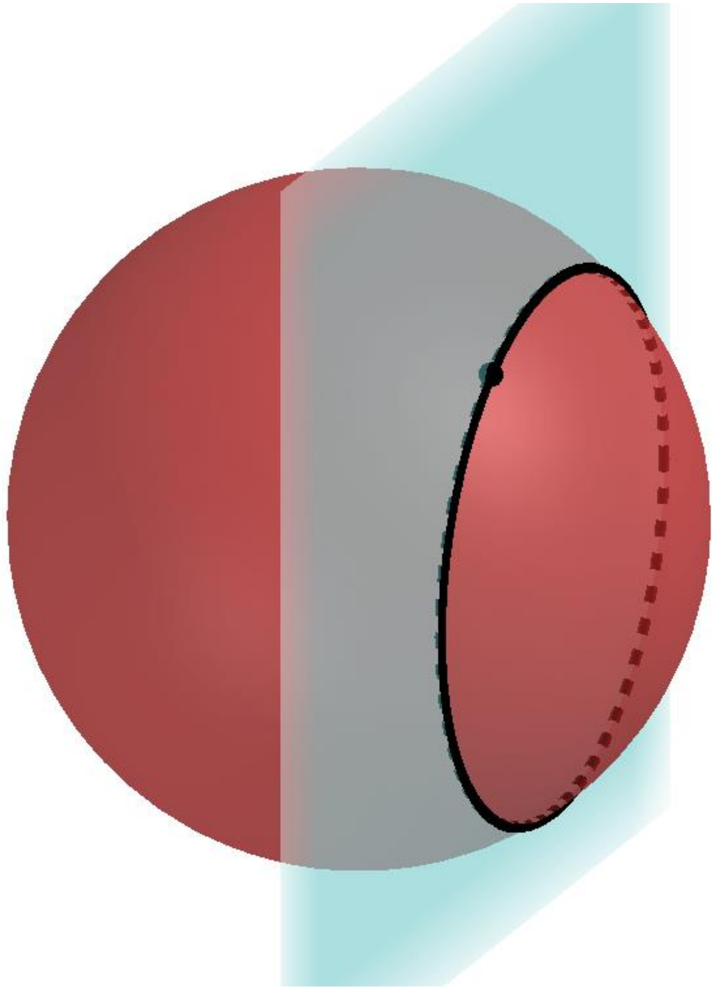
$$|F \cap G| = \deg F \cdot \deg G$$

O Teorema de Bézout com Intersecções Transversais

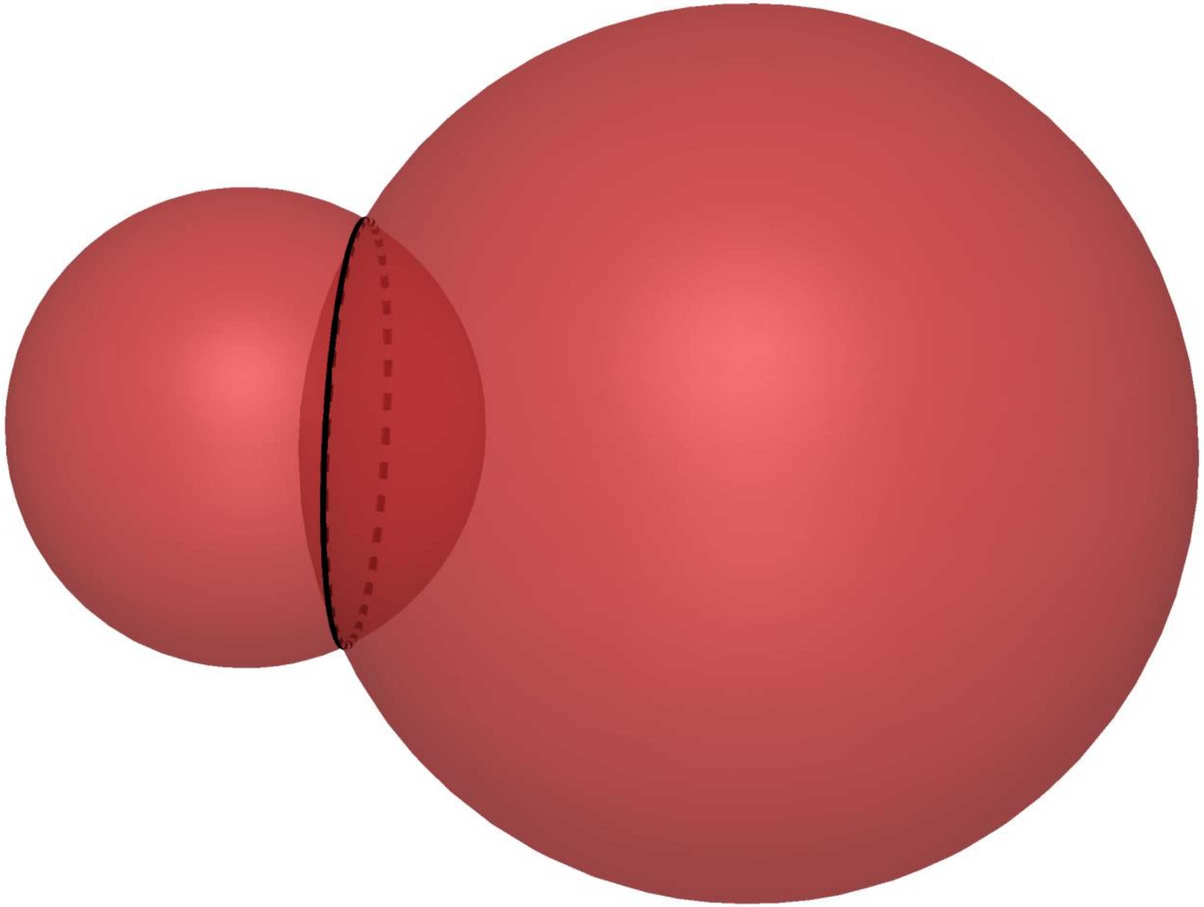
$$|F \cap G| = \deg F \cdot \deg G$$



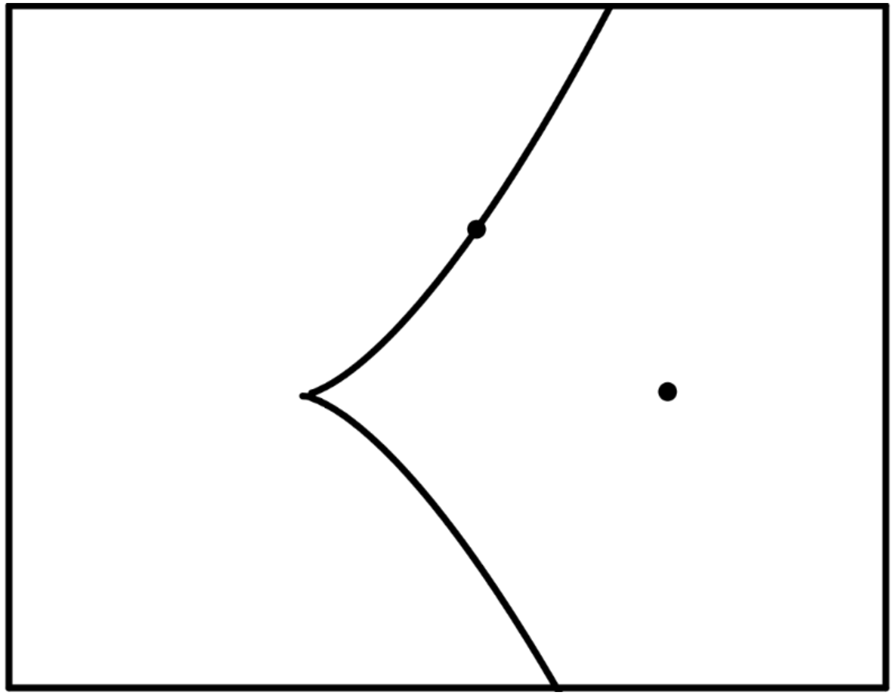
Intersecção Transversal em Dimensões Superiores

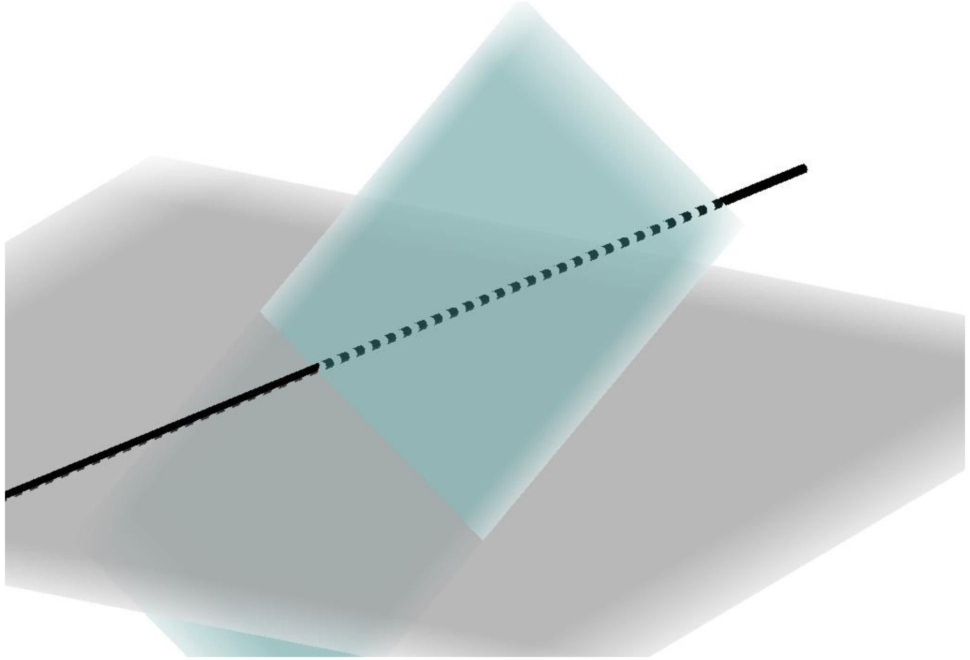


Intersecção Transversal em Dimensões Superiores



Ponto Genérico e Hiperplano Genérico





Grau

Se X é uma variedade de dimensão m, então seu grau é dado por

$$deg(X) = |X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_m|$$

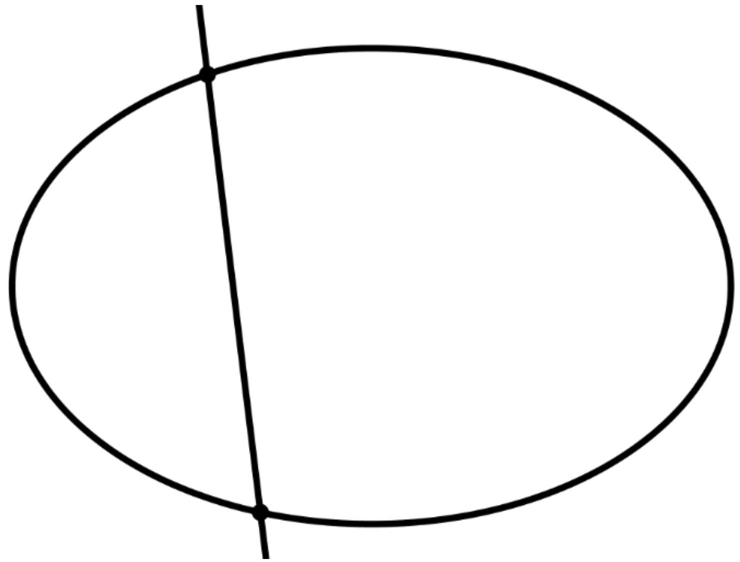
onde $H_1, \cdots, H_m$ são m hiperplanos genéricos.

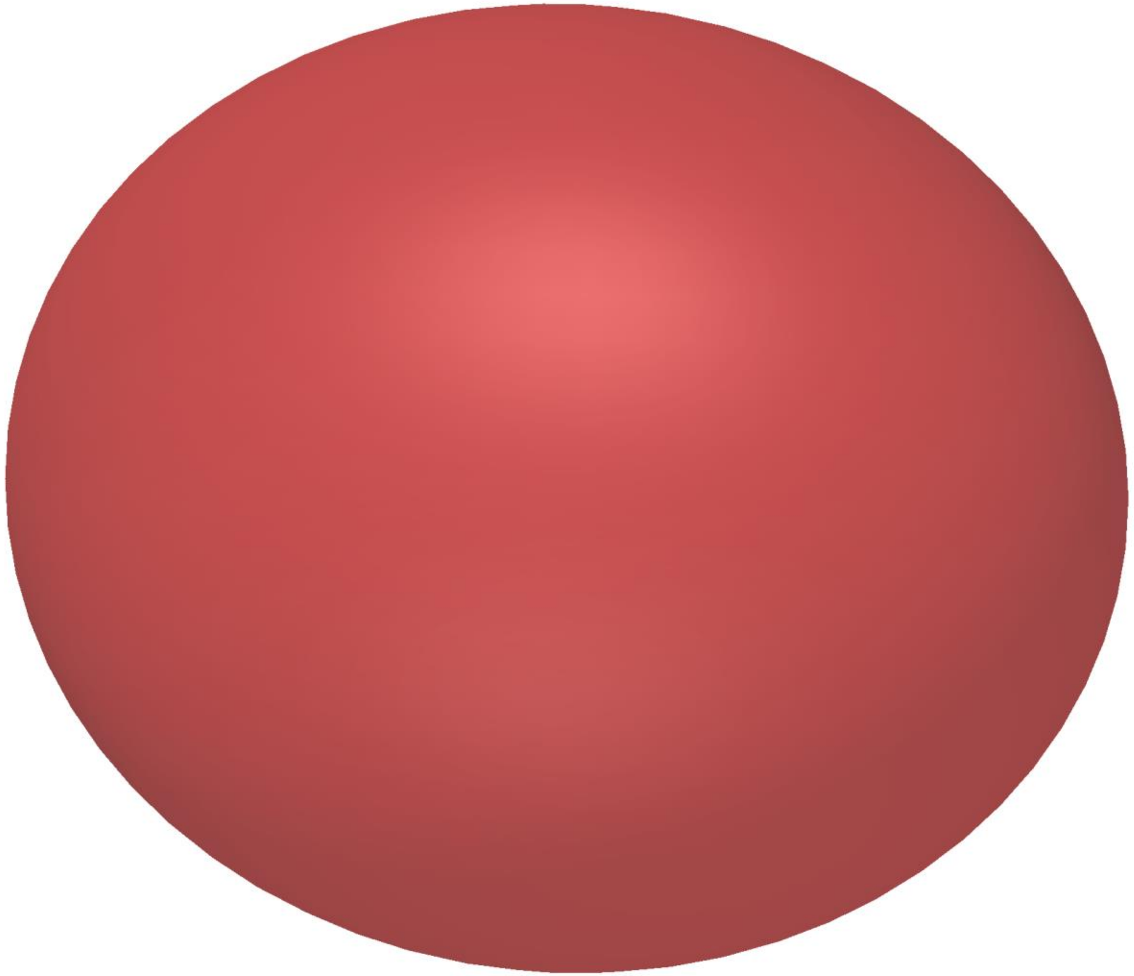
Grau

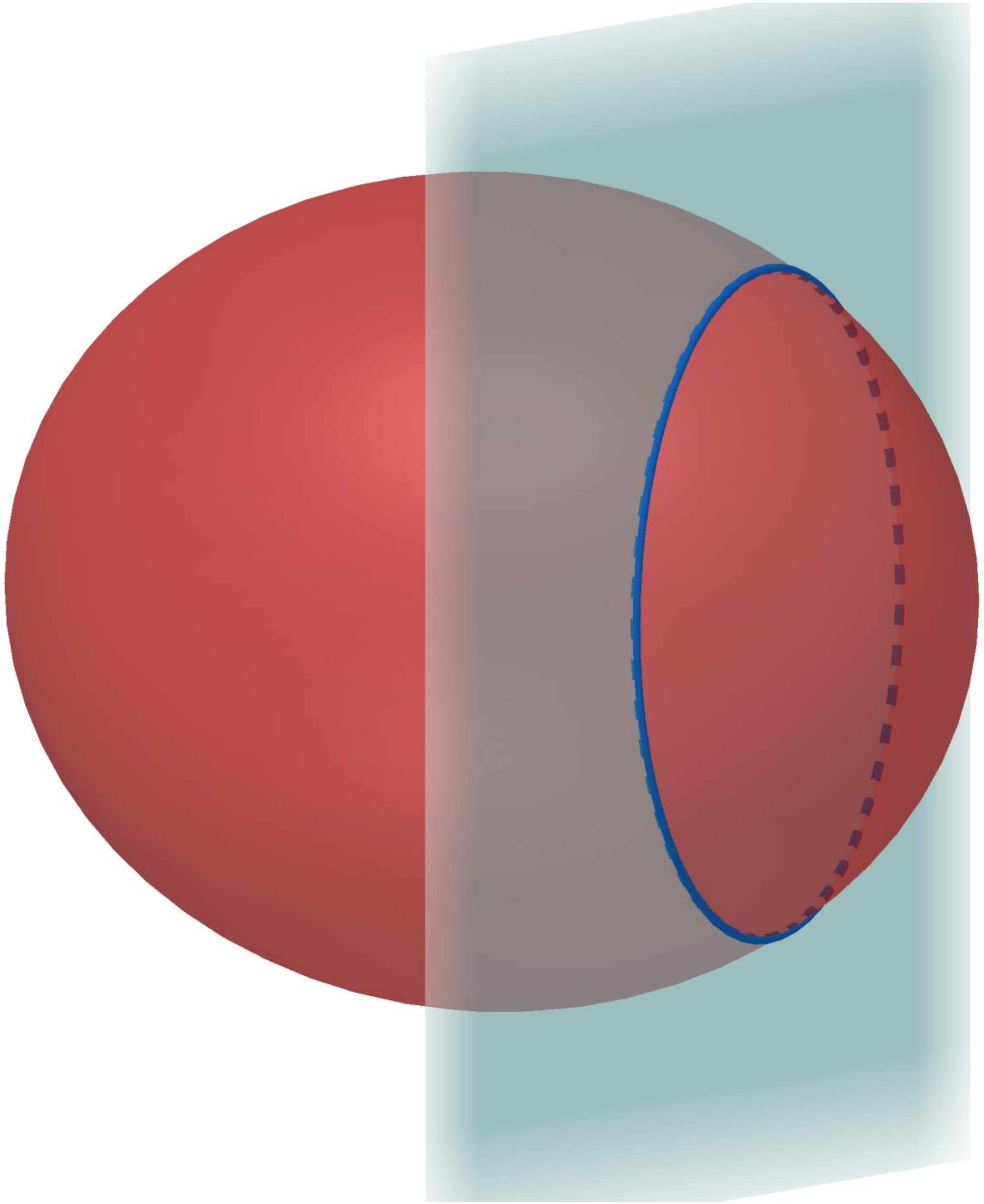
Se X é uma variedade de dimensão m, então seu grau é dado por

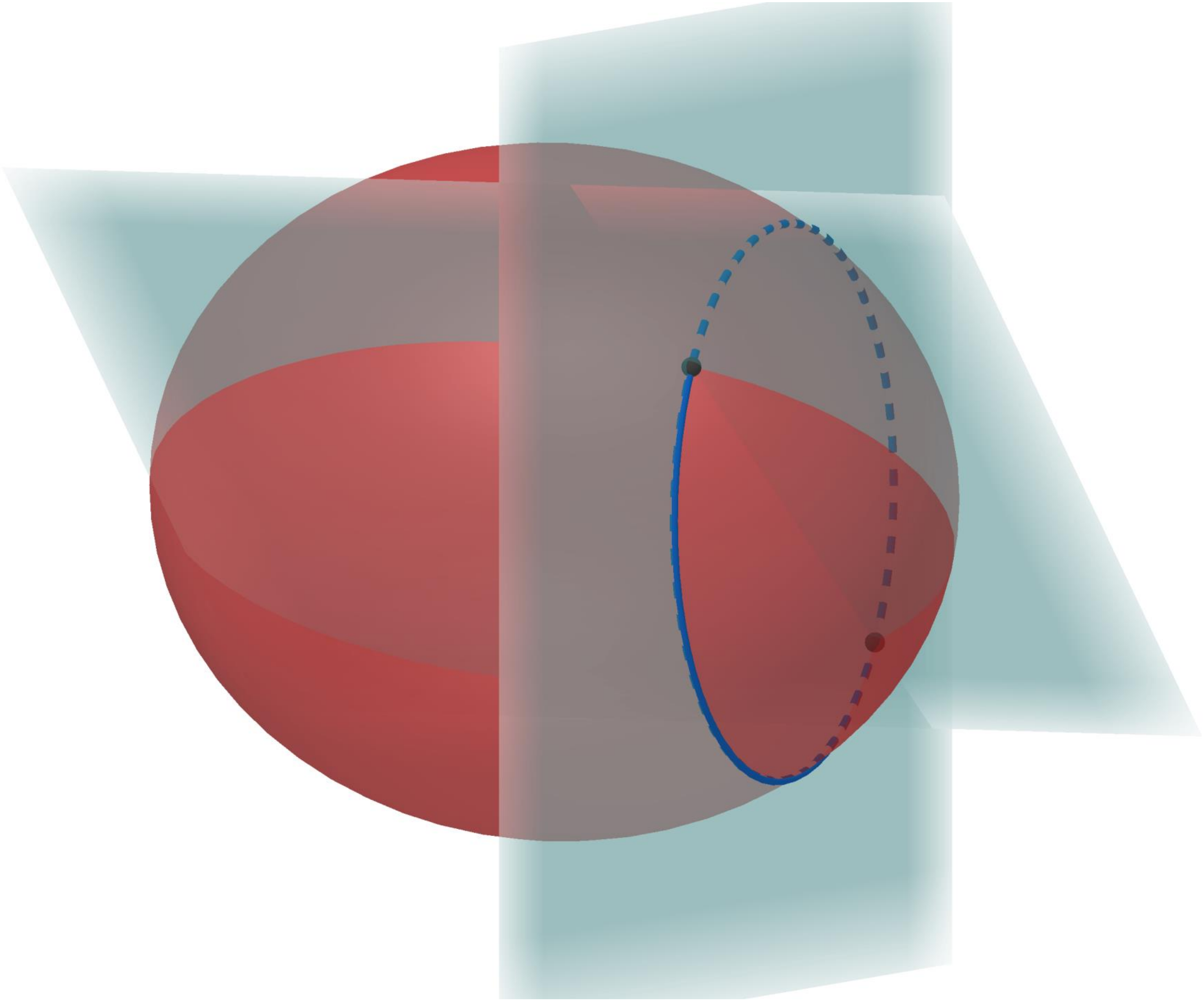
$$deg(X) = |X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_m|$$

onde $H_1, \cdots, H_m$ são m hiperplanos genéricos.









Teorema de Bézout

Se $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{P}^n$ são variedades de codimensões $c_1, \ldots, c_k$ com $\sum c_i \leq n$, e que se intersectam genericamente transversalmente, então

$$\deg(X_1 \cap \cdots \cap X_k) = \prod \deg(X_i).$$

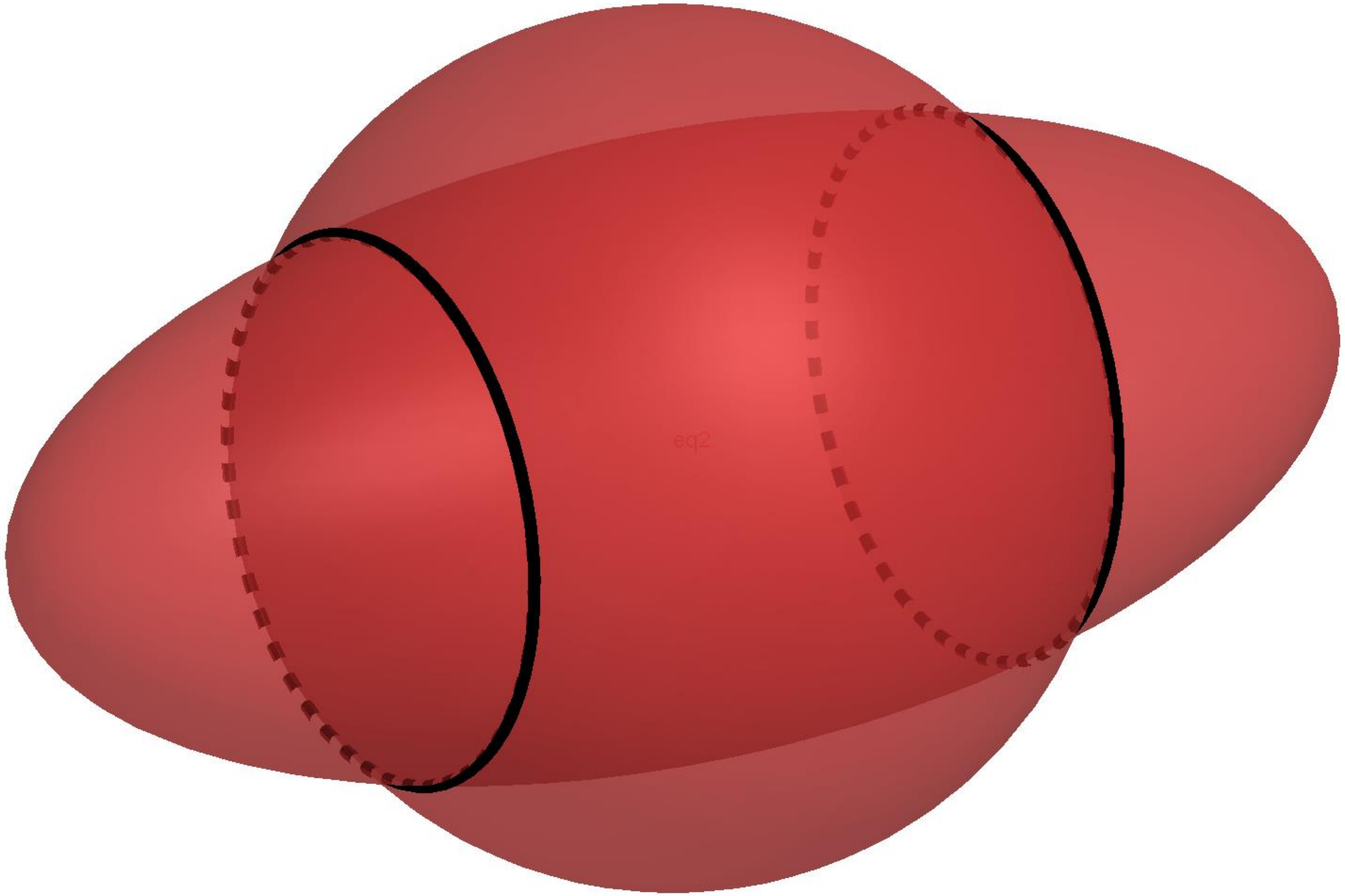
Teorema de Bézout

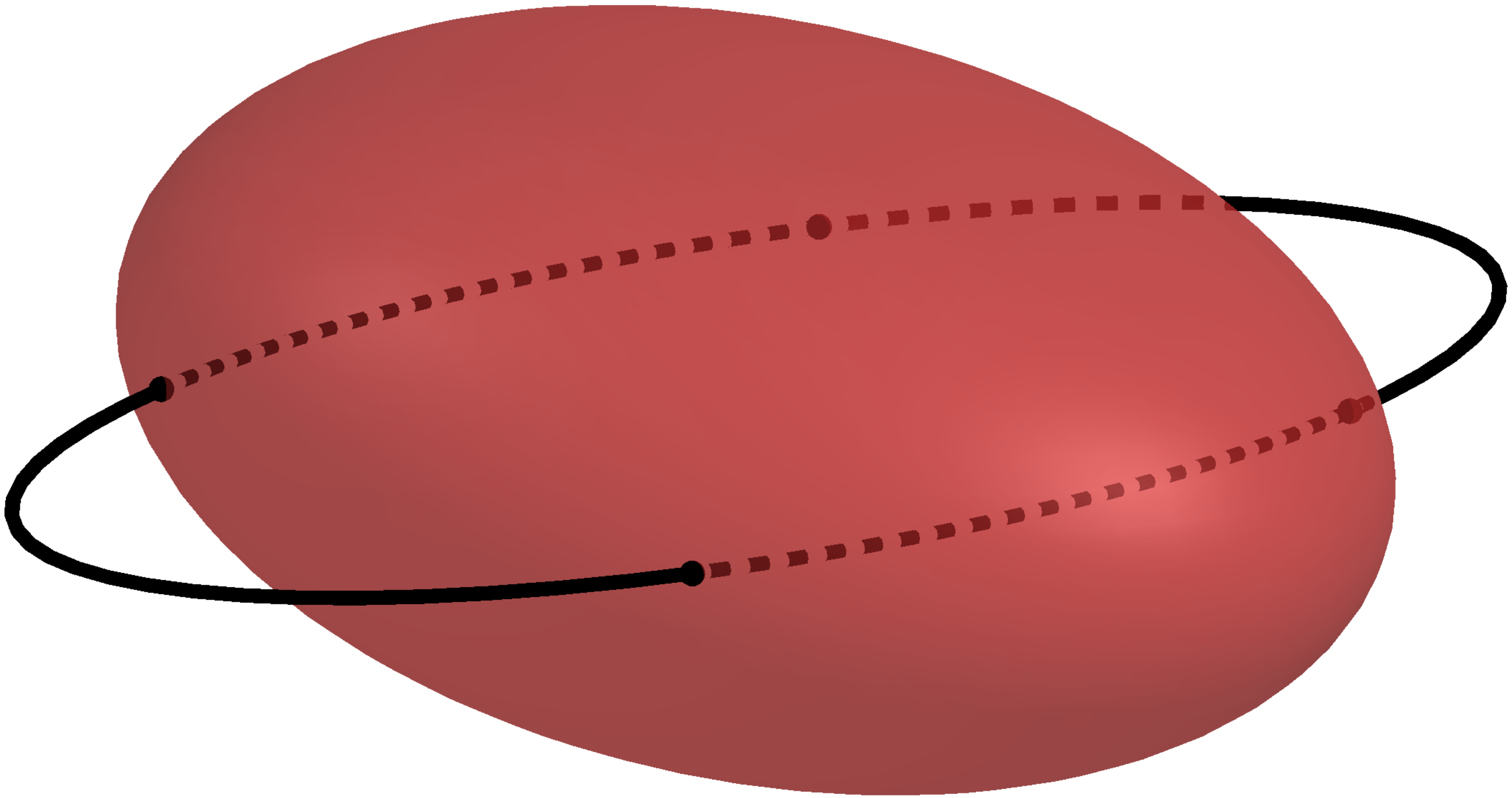
Se $X_1, \ldots, X_k \subset \mathbb{P}^n$ são variedades de codimensões $c_{1,} \ldots, c_k$ com $\sum c_i \leq n$, e que se intersectam genericamente transversalmente, então

$$\deg(X_1 \cap \cdots \cap X_k) = \prod \deg(X_i).$$

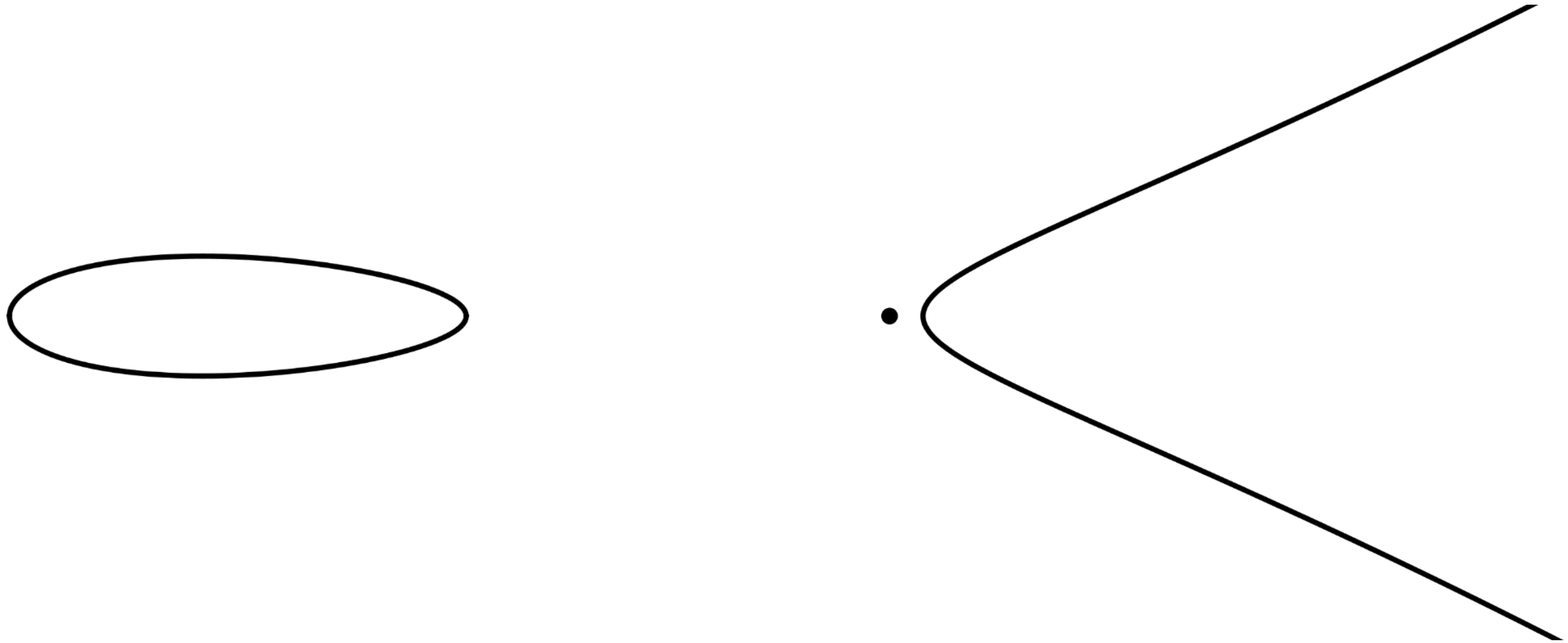
Em particular, se duas variedades $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ possuem dimensões complementares e se intersectam transversalmente, então

$$|X \cap Y| = \deg(X) \cdot \deg(Y)$$


eq2

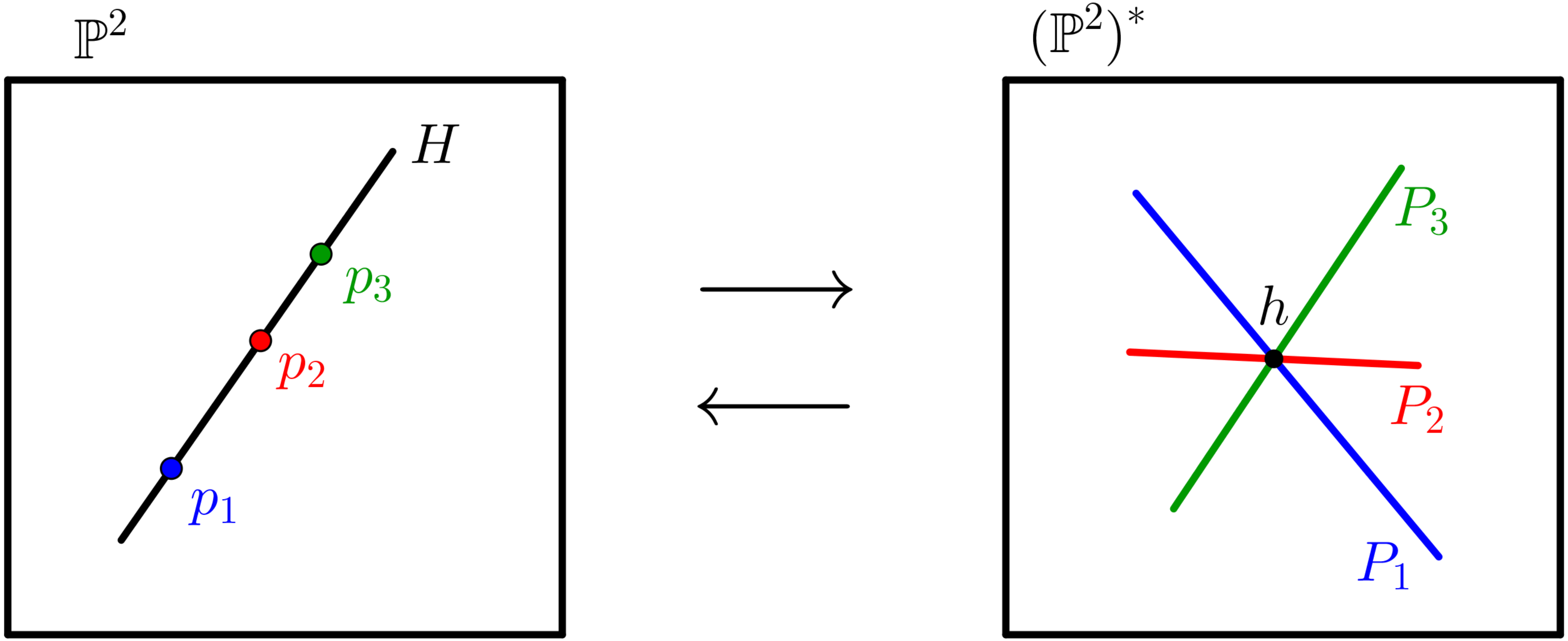


Dada uma cúbica suave C e um ponto genérico p em $\mathbb{P}^2$, quantas das retas que passam por p são tangentes a C?



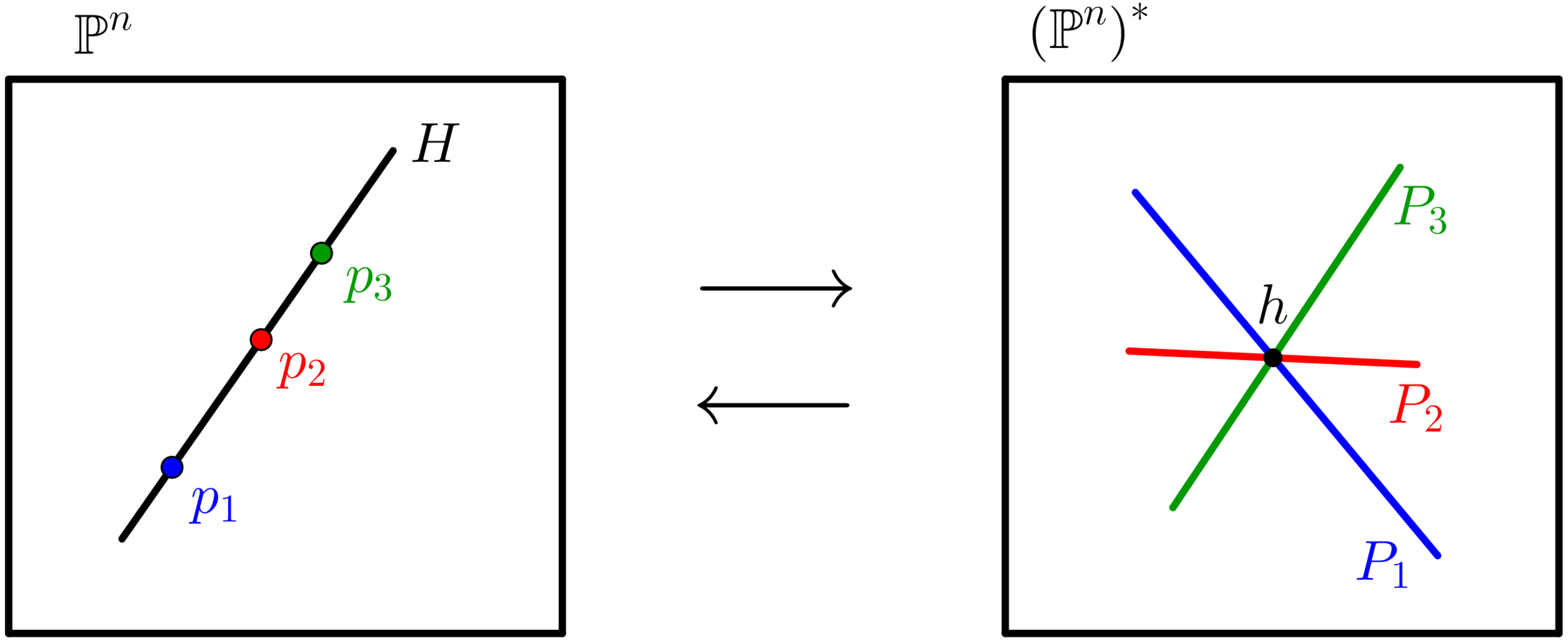
Em dimensão 3: Quantos planos contendo uma reta L genérica são tangentes a uma dada hipersuperfície cúbica suave?

Dualidade Ponto-Reta em $\mathbb{P}^2$



$$H : aX + bY + cZ = 0 \longleftrightarrow [a : b : c] = h$$

Dualidade em $\mathbb{P}^n$



$$H : a_0X_0 + \cdots a_nX_n = 0 \longleftrightarrow [a_0 : \cdots : a_n] = h$$

Hipersuperfície Dual

Seja $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave de grau d.
Para cada ponto p de F, o espaço tangente a F no ponto p é dado por

$$T_pX : \frac{\partial F}{\partial X_0}(p)X_0 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_n}(p)X_n = 0.$$

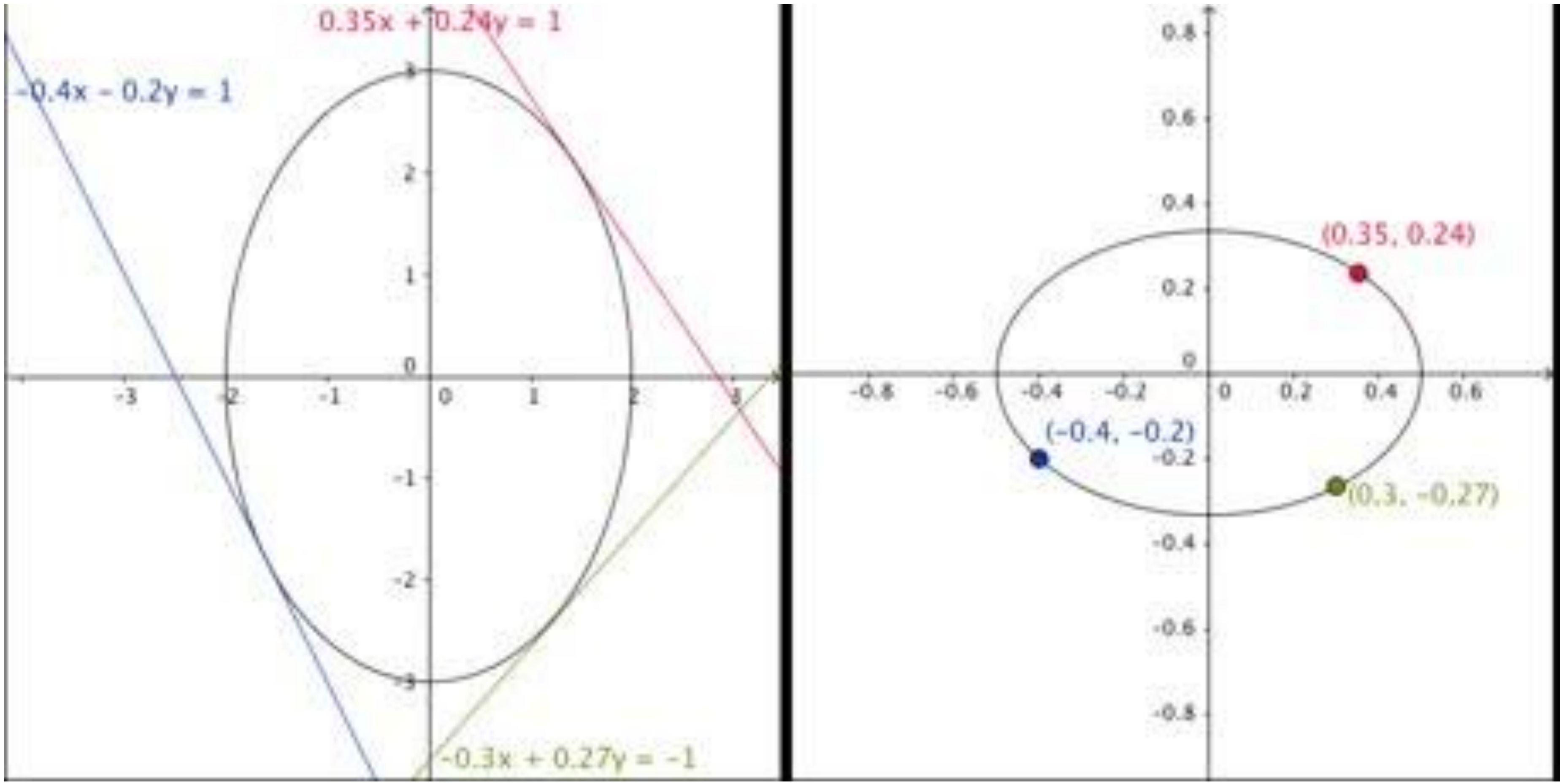
Hipersuperfície Dual

Seja $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície suave de grau d.
Para cada ponto p de F, o espaço tangente a F no ponto p é dado por

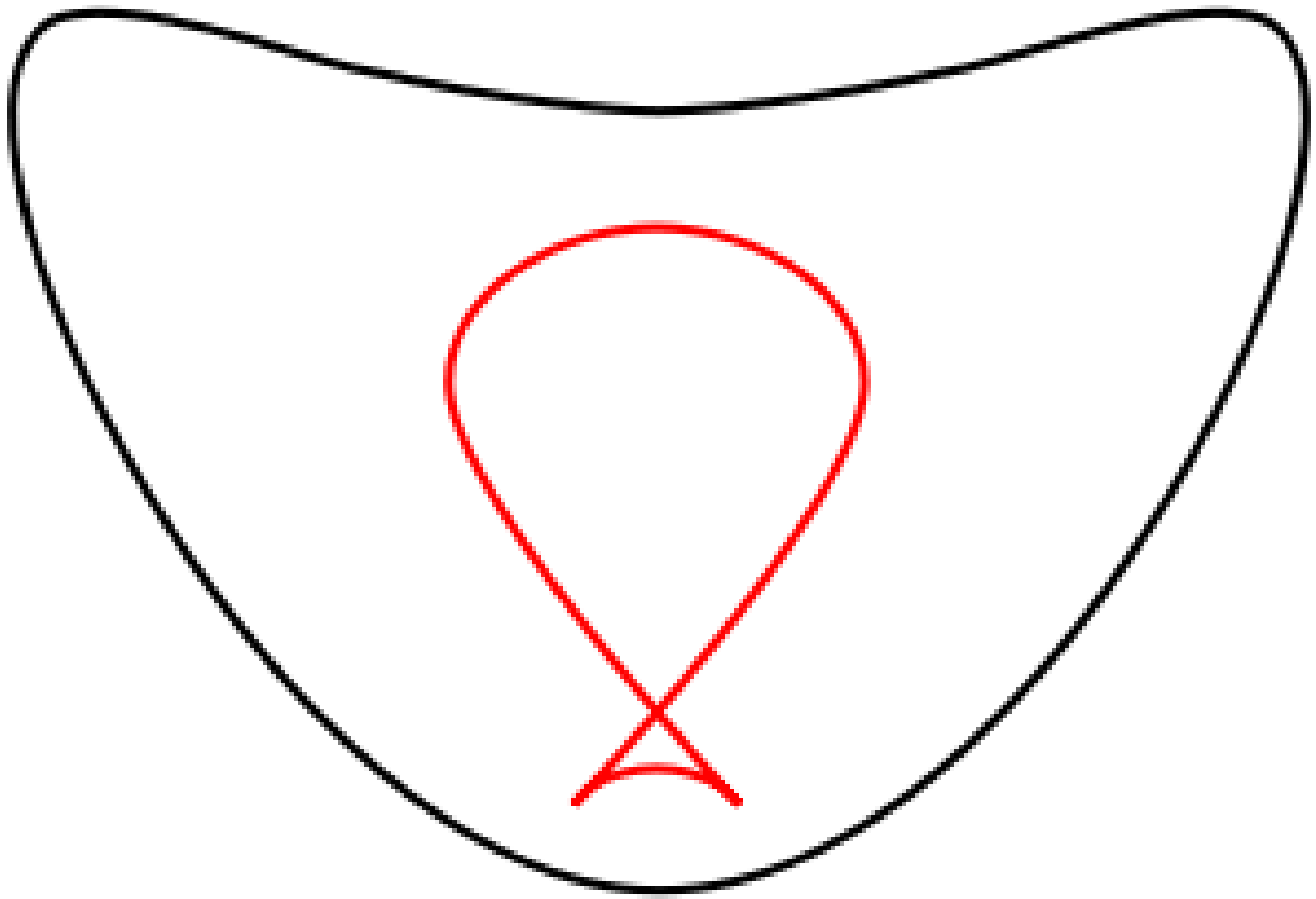
$$T_pX : \frac{\partial F}{\partial X_0}(p)X_0 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_n}(p)X_n = 0.$$

Pela dualidade, associamos cada ponto p de X ao ponto correspondente ao espaço tangente no dual:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F : F &\longrightarrow \quad F^* \subset (\mathbb{P}^n)^* \\ p &\mapsto \left[\frac{\partial F}{\partial X_0}(p) : \cdots : \frac{\partial F}{\partial X_n}(p)\right] \end{aligned}$$

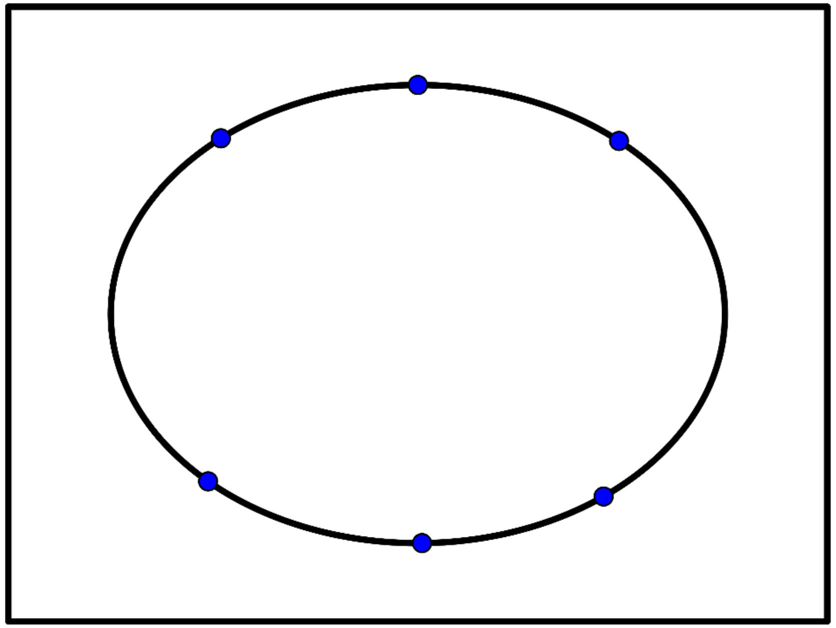


0.35x + 0.24y = 1
-0.4x - 0.2y = 1
-0.3x + 0.27y = -1
(0.35, 0.24)
(-0.4, -0.2)
(0.3, -0.27)



Pascal

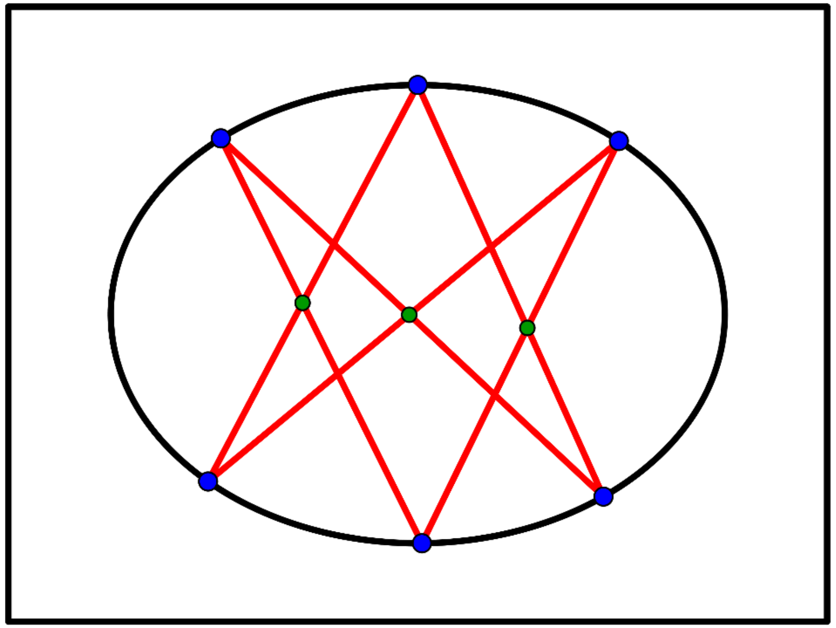
$\mathbb{P}^2$



Teorema de Pascal

Pascal

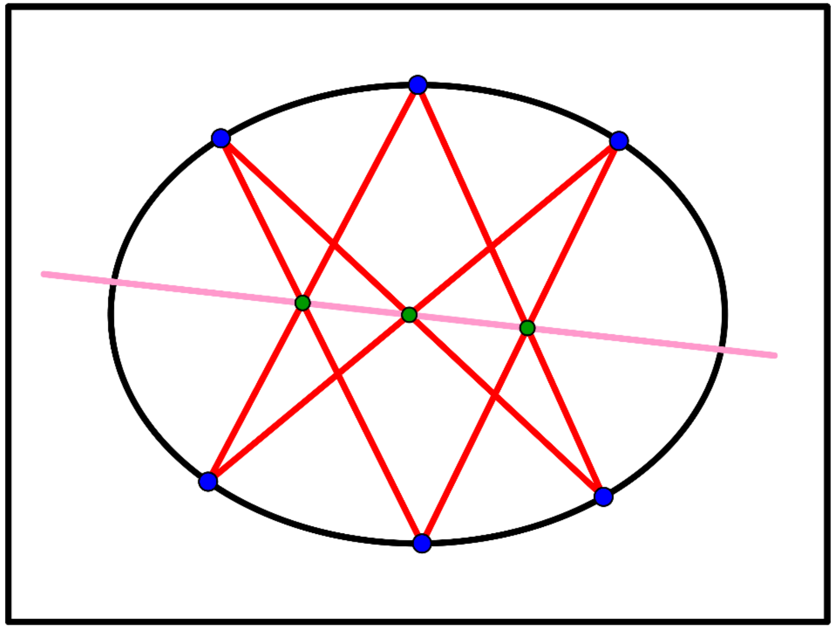
$\mathbb{P}^2$



Teorema de Pascal

Pascal

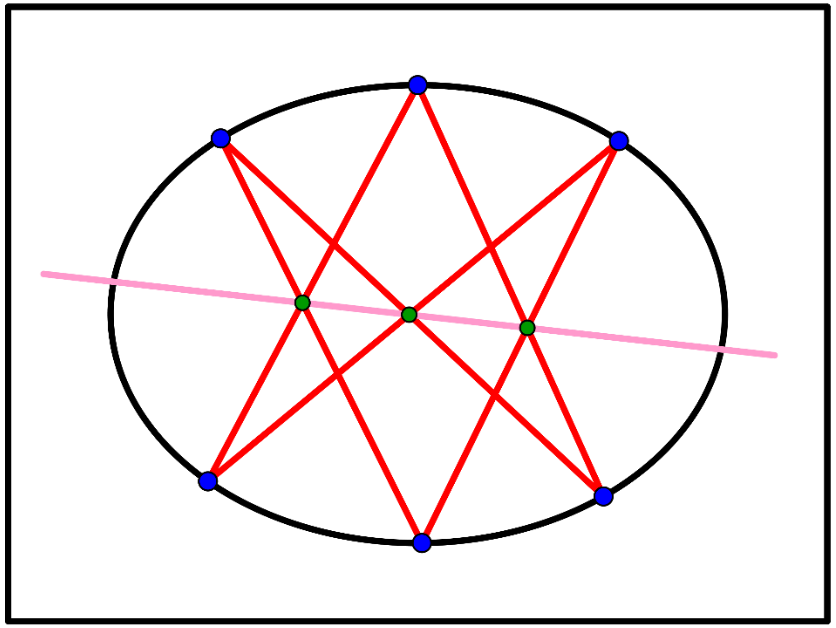
$\mathbb{P}^2$



Teorema de Pascal

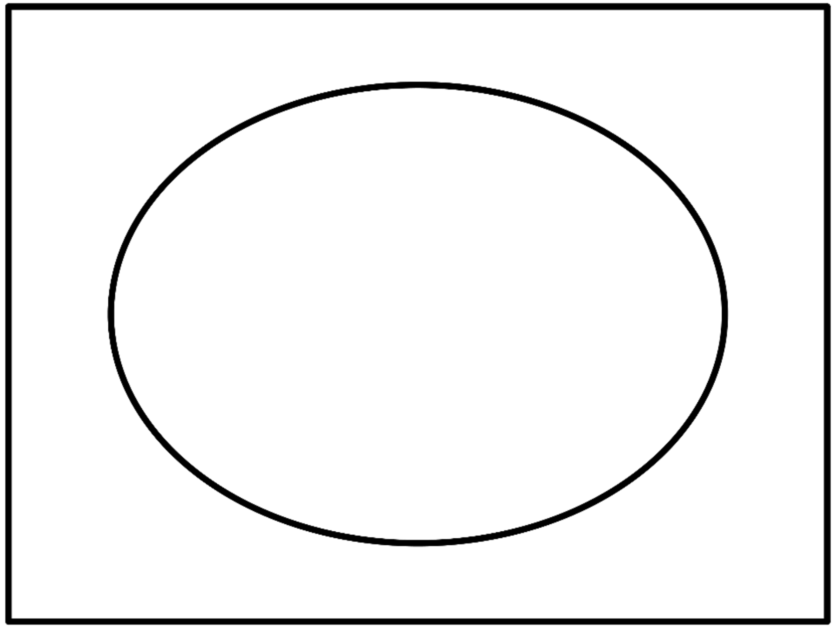
Pascal -

$\mathbb{P}^2$



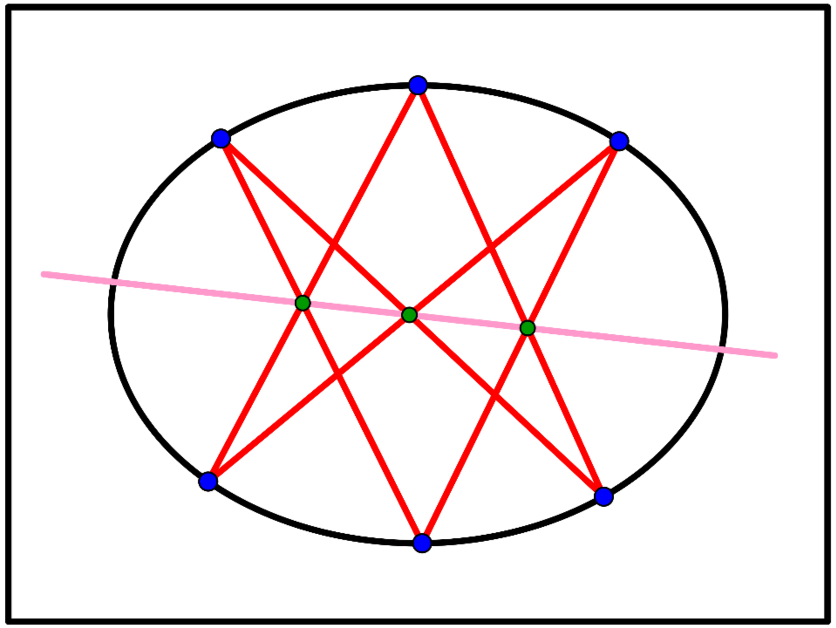
Teorema de Pascal

$\mathbb{P}^2$



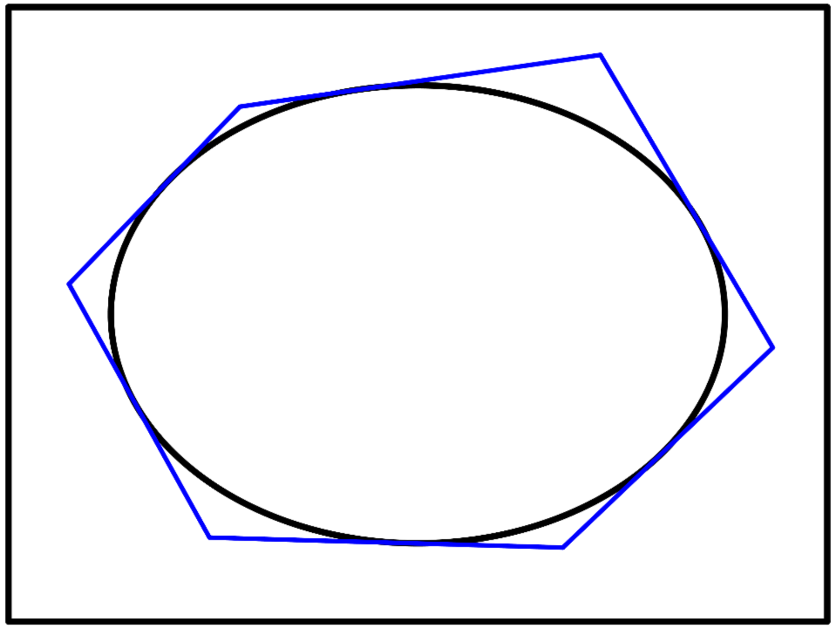
Pascal -

$\mathbb{P}^2$



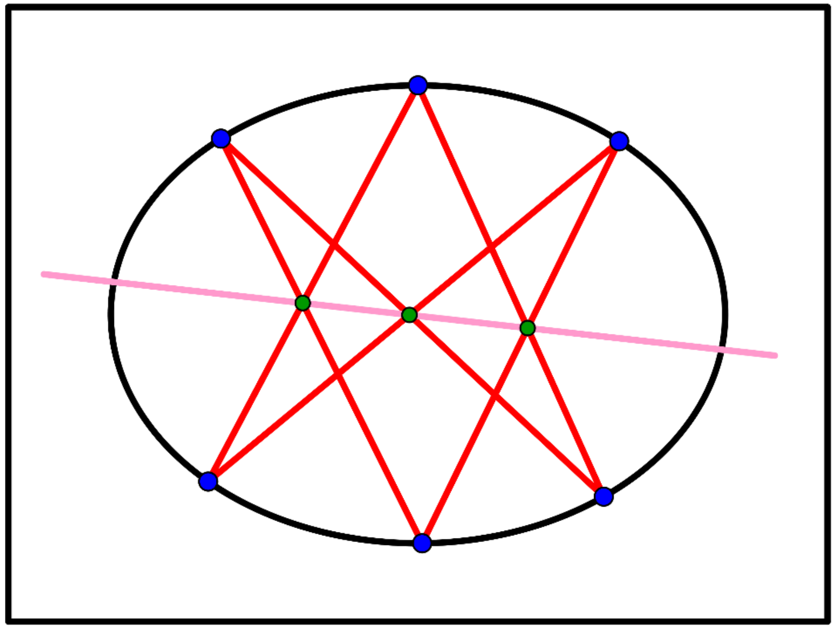
Teorema de Pascal

$\mathbb{P}^2$



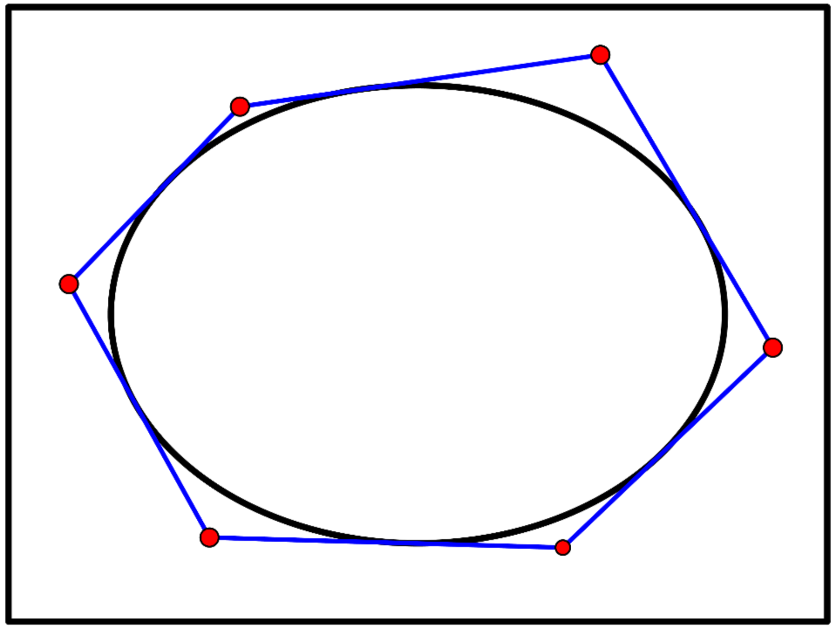
Pascal -

$\mathbb{P}^2$



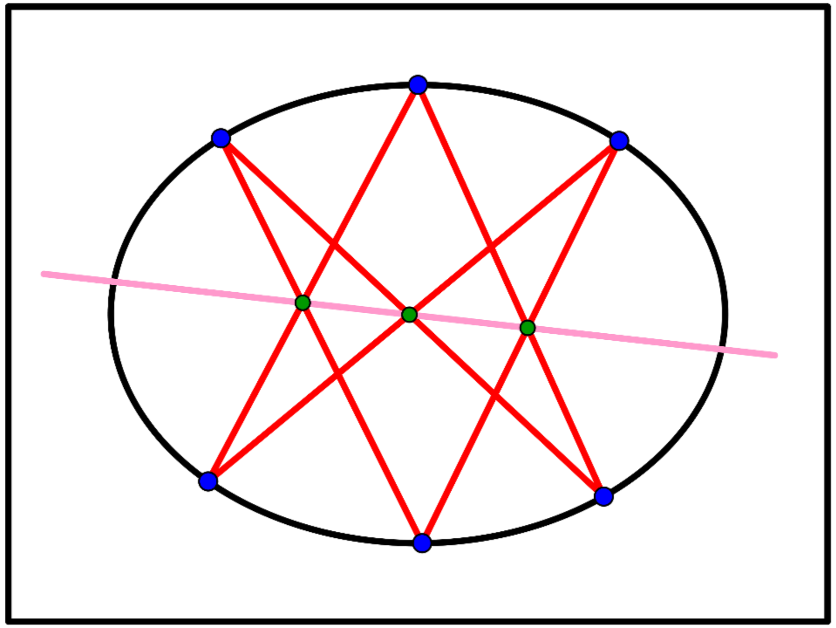
Teorema de Pascal

$\mathbb{P}^2$



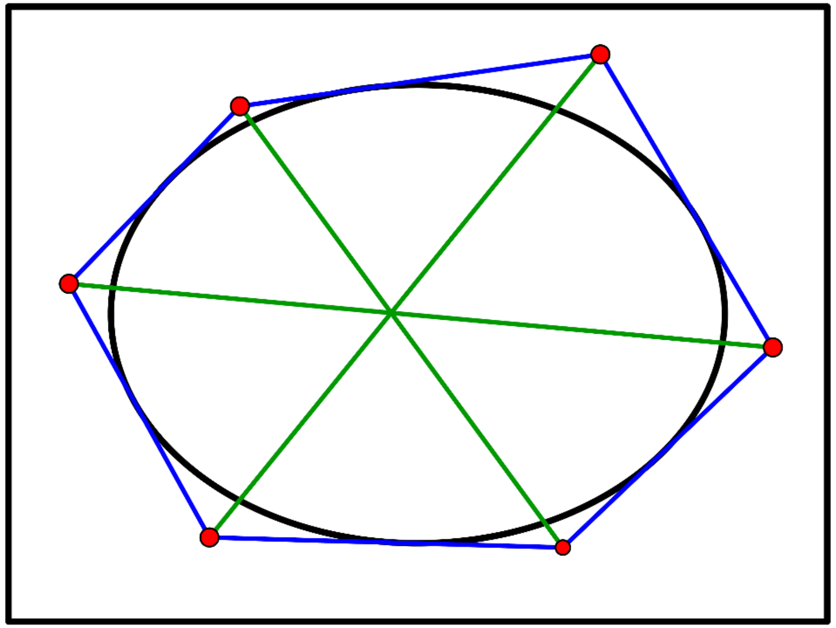
Pascal -

$\mathbb{P}^2$



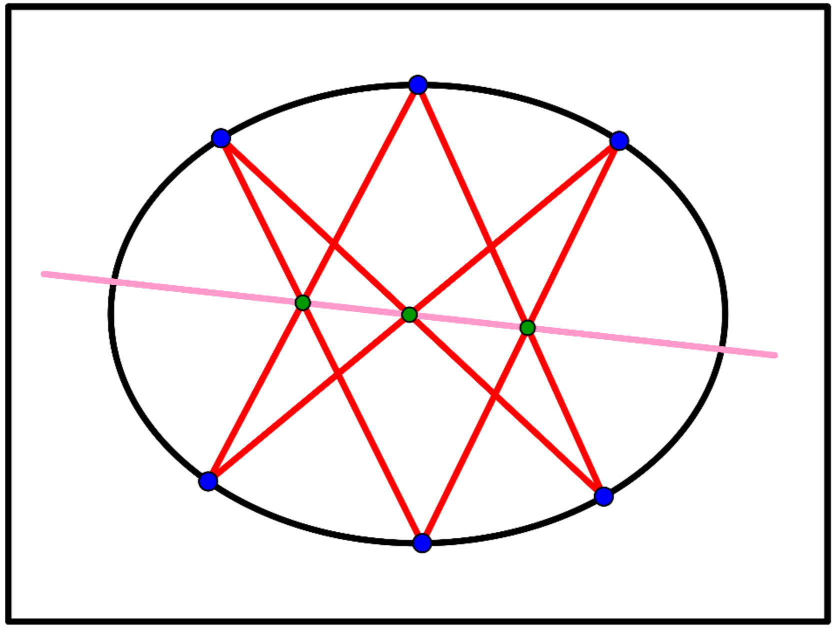
Teorema de Pascal

$\mathbb{P}^2$



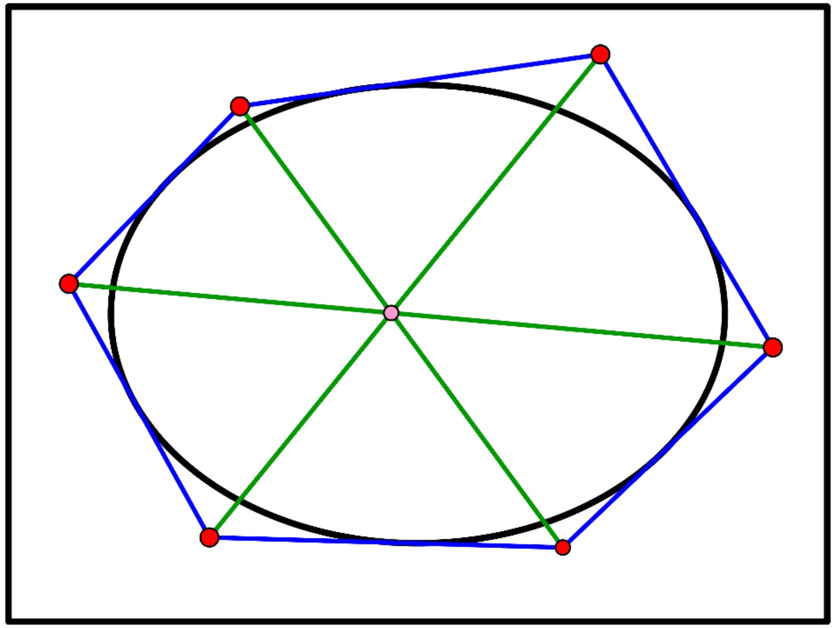
Pascal - Brianchon

$\mathbb{P}^2$



Teorema de Pascal

$\mathbb{P}^2$



Teorema de Brianchon

Grau da Hipersuperfície Dual

Proposição. Se $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície suave de grau $d > 1$, então a dual de X é uma hipersuperfície de grau $d(d-1)^{n-1}$.

Grau da Hipersuperfície Dual

Proposição. Se $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície suave de grau $d > 1$, então a dual de X é uma hipersuperfície de grau $d(d-1)^{n-1}$.

Prova.

$$deg(X^*) = |X^* \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}|$$

Grau da Hipersuperfície Dual

Proposição. Se $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície suave de grau $d >1$, então a dual de X é uma hipersuperfície de grau $d(d-1)^{n-1}$.

Prova.

$$deg(X^*) = |X^* \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}|$$

Fato: $\mathcal{G}_X : X \to X^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ é birracional.

Grau da Hipersuperfície Dual

Proposição. Se $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície suave de grau $d > 1$, então a dual de X é uma hipersuperfície de grau $d(d-1)^{n-1}$.

Prova.

$$deg(X^*) = |X^* \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}|$$

Fato: $\mathcal{G}_X : X \to X^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ é birracional. Logo,

$$|X^* \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}| = |X \cap \mathcal{G}_X^{-1}(H_1) \cap \cdots \cap \mathcal{G}_X^{-1}(H_{n-1})|$$

Grau da Hipersuperfície Dual

Proposição. Se $X : (F = 0) \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície suave de grau $d > 1$, então a dual de X é uma hipersuperfície de grau $d(d-1)^{n-1}$.

Prova.

$$deg(X^*) = |X^* \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}|$$

Fato: $\mathcal{G}_X : X \to X^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$ é birracional. Logo,

$$|X^* \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}| = |X \cap \mathcal{G}_X^{-1}(H_1) \cap \cdots \cap \mathcal{G}_X^{-1}(H_{n-1})|$$

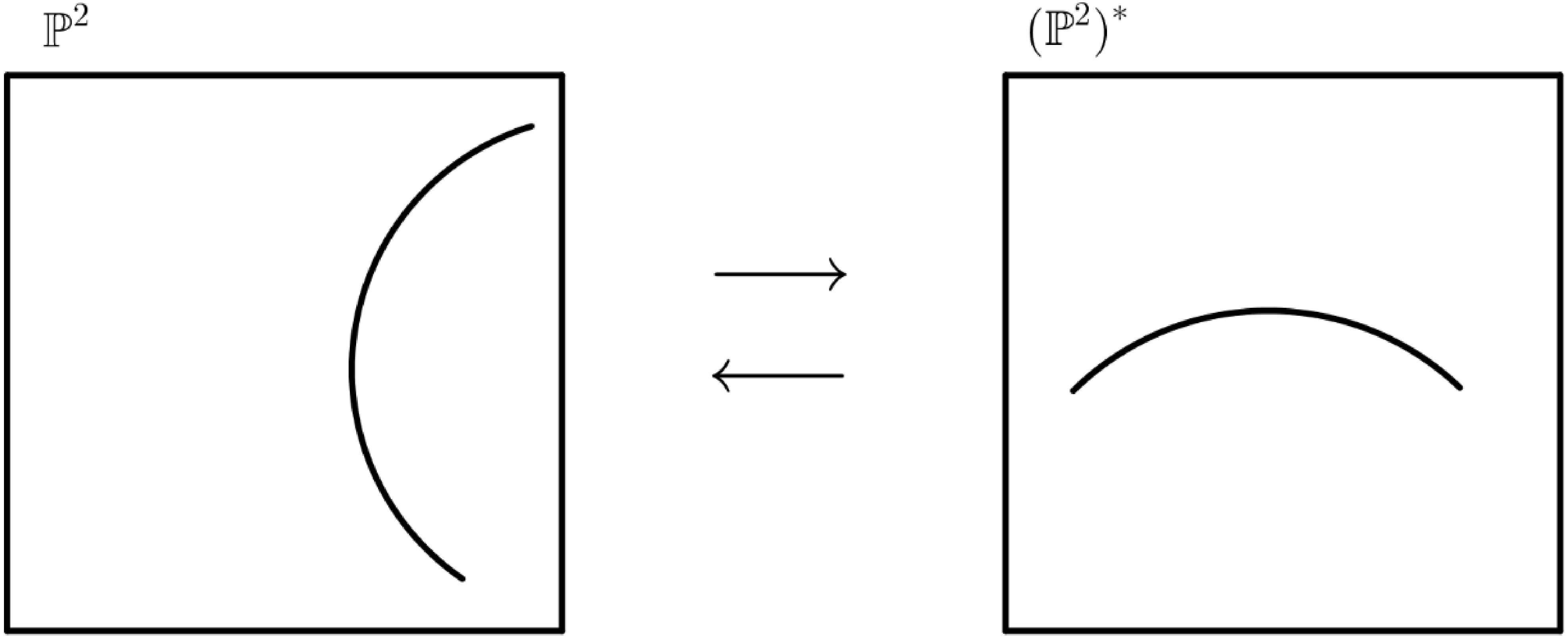
Note que se $H_i : a_0 X_0 + \cdots + a_n X_n = 0$, então

$$\mathcal{G}_X^{-1}(H_1) : a_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(p) + \cdots + a_n \frac{\partial F}{\partial X_n}(p) = 0$$

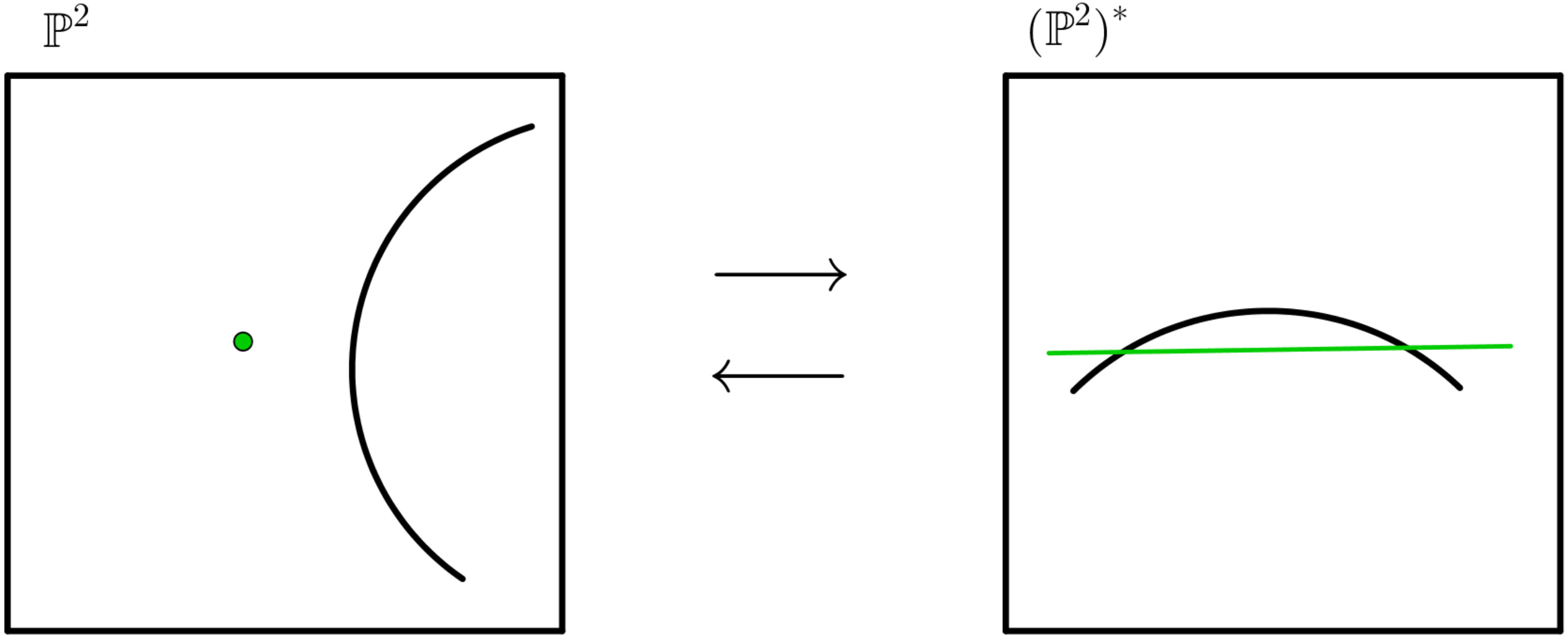
Logo, cada pré-imagem é uma hipersuperfície de grau d - 1, e portanto, pelo Teorema de Bézout,

$$deg(X^*) = |X \cap \mathcal{G}_X^{-1}(H_1) \cap \cdots \cap \mathcal{G}_X^{-1}(H_{n-1})| = d(d-1)^{n-1}.$$

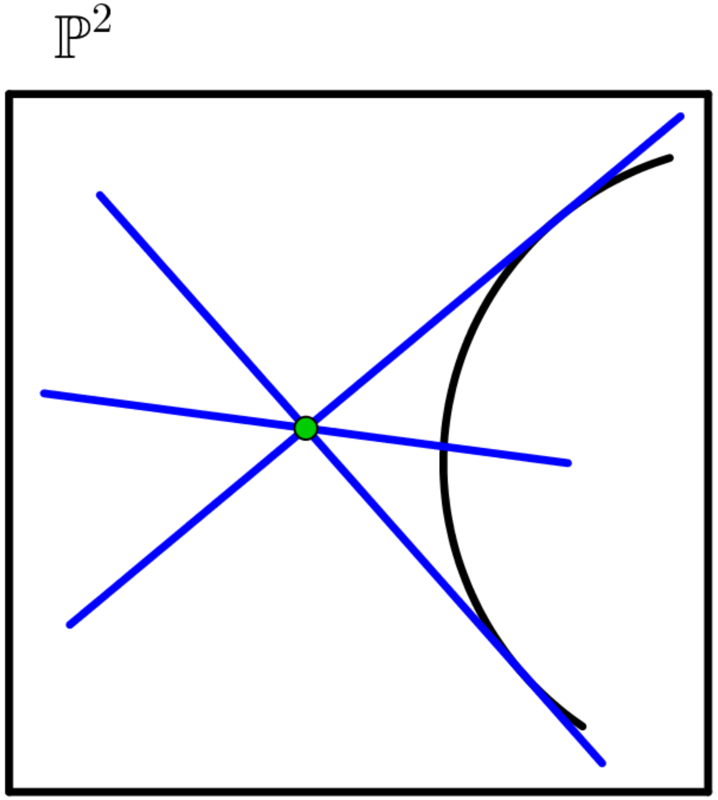
Quantas retas que passam pelo ponto são tangentes à cúbica?



Quantas retas que passam pelo ponto são tangentes à cúbica?

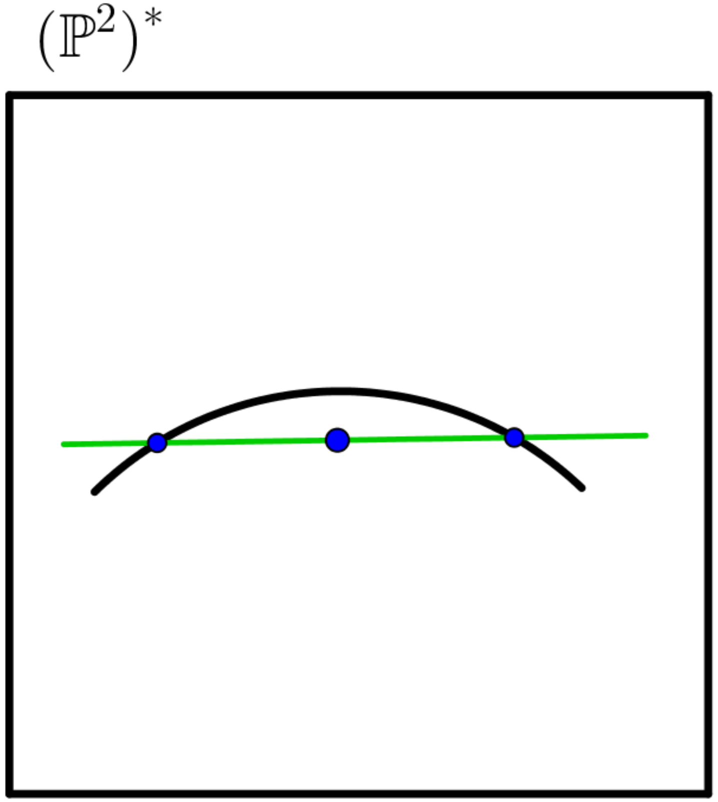


Quantas retas que passam pelo ponto são tangentes à cúbica?

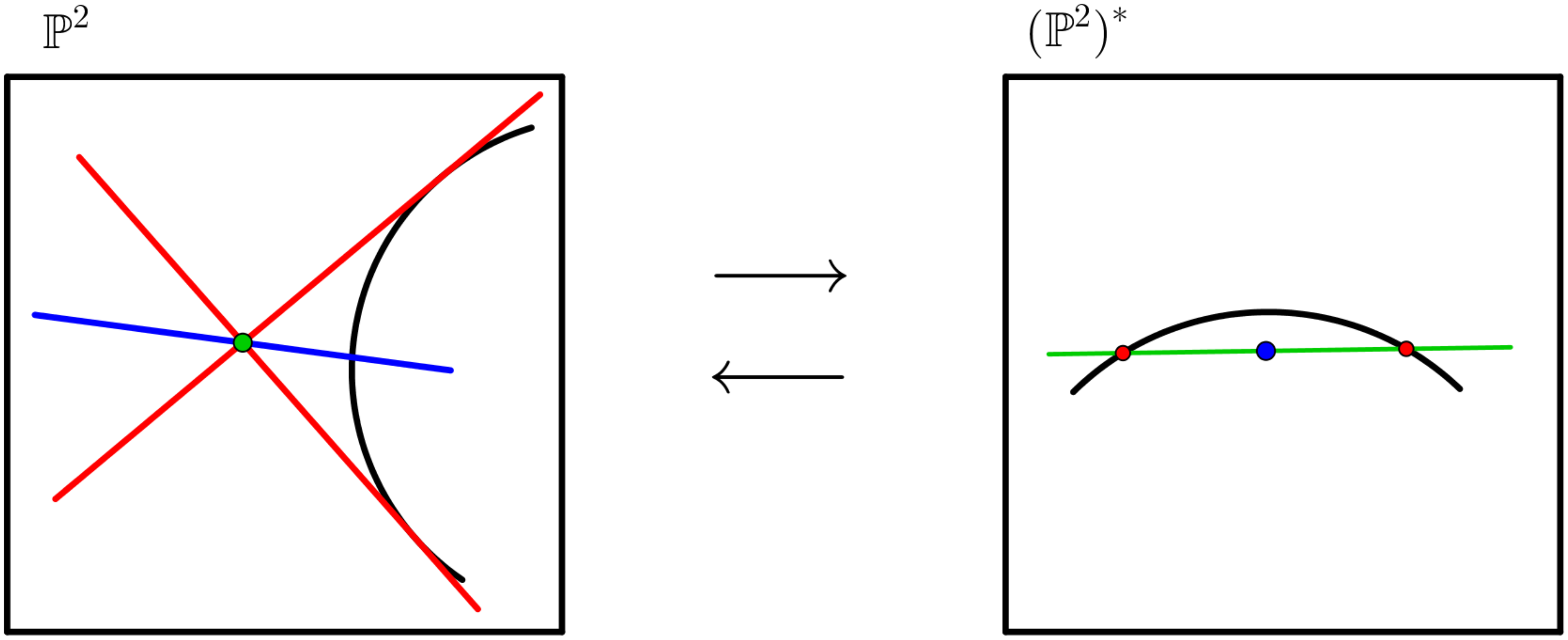


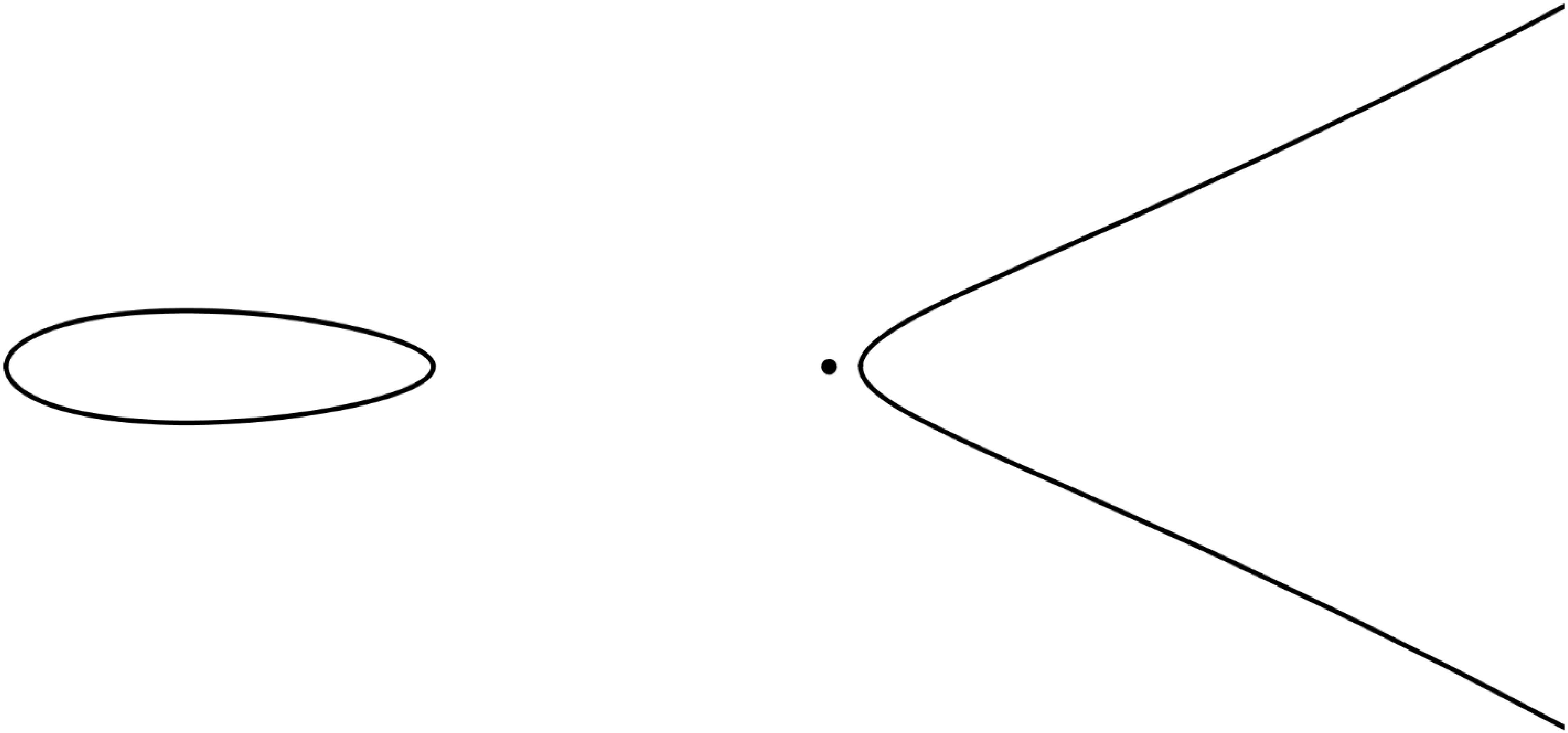
$\longrightarrow$

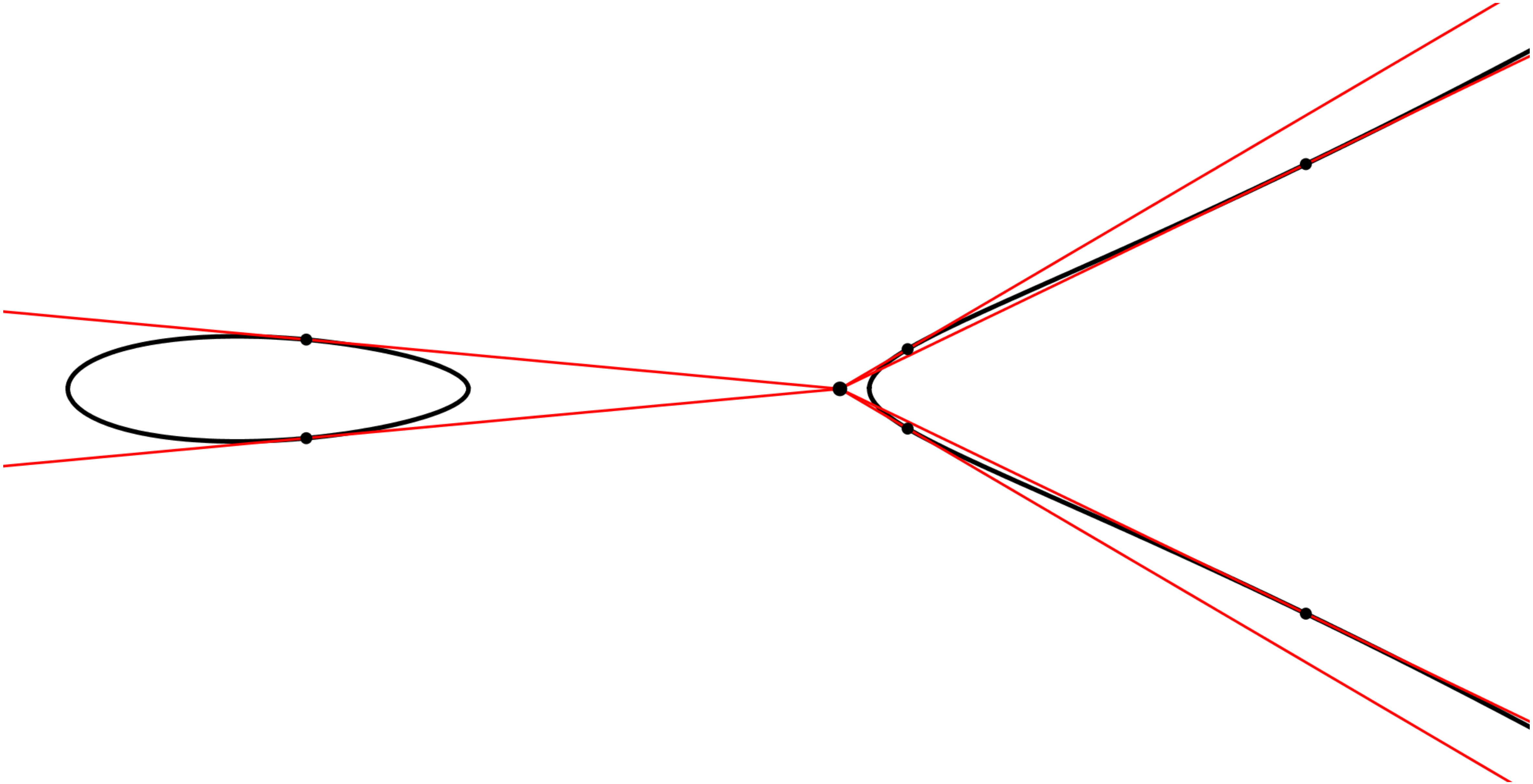
$\longleftarrow$

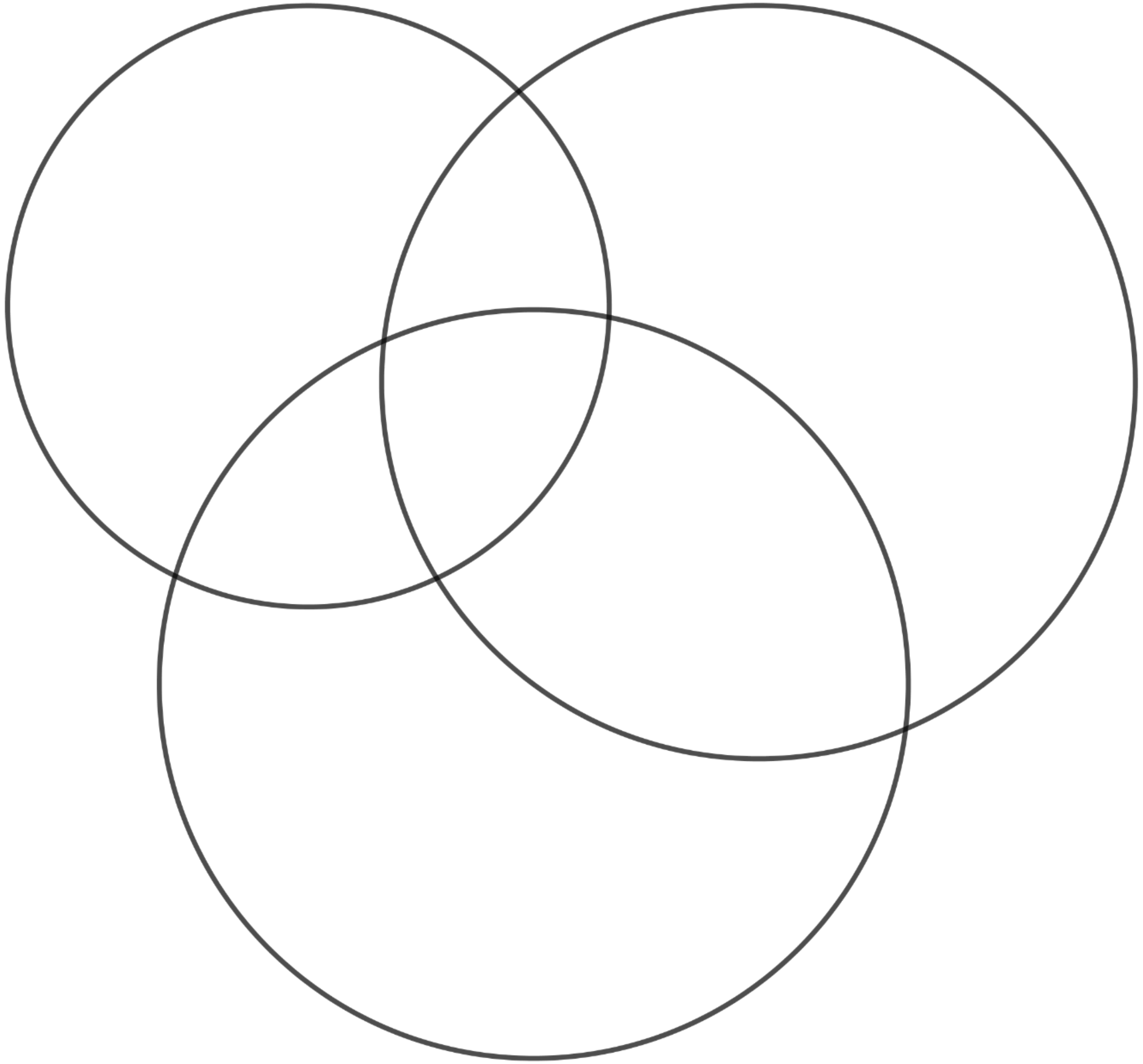


Quantas retas que passam pelo ponto são tangentes à cúbica?









O que é um círculo?

O que é um círculo?

Tomando $Z = 0$ na equação do círculo homogeneizada

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = r^2 Z^2$$

O que é um círculo?

Tomando $Z = 0$ na equação do círculo homogeneizada

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = r^2 Z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm iy$$

obtemos que todo círculo passa pelos *pontos circulares* no infinito

$$\circ_+ = [1 : i : 0] \quad \circ_- = [1 : -i : 0]$$

O que é um círculo?

Tomando $Z = 0$ na equação do círculo homogeneizada

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = r^2 Z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm iy$$

obtemos que todo círculo passa pelos *pontos circulares* no infinito

$$\circ_+ = [1 : i : 0] \qquad \circ_- = [1 : -i : 0]$$

Reciprocamente, uma cônica suave que passa por estes dois pontos pode ser escrita como uma equação de um círculo.

O que é um círculo?

Tomando $Z = 0$ na equação do círculo homogeneizada

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = r^2 Z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm iy$$

obtemos que todo círculo passa pelos *pontos circulares* no infinito

$$\circ_+ = [1 : i : 0] \quad \circ_- = [1 : -i : 0]$$

Reciprocamente, uma cônica suave que passa por estes dois pontos pode ser escrita como uma equação de um círculo.

Definição. Um círculo em $\mathbb{P}^2$ é uma cônica que passa pelos dois pontos circulares.

Espaço dos Círculos

$$\{\text{cônicas em } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^5$$

$$a_0X^2 + a_1Y^2 + a_2Z^2 + a_3XY + a_4XZ + a_5YZ \leftrightarrow [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$$

Espaço dos Círculos

$$\{\text{cônicas em } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^5$$

$$a_0X^2 + a_1Y^2 + a_2Z^2 + a_3XY + a_4XZ + a_5YZ \leftrightarrow [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$$

$$\{\text{círculos em } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$$

$$aX^2 + aY^2 + cZ^2 + 0XY + eXZ + fYZ \leftrightarrow [a : a : c : 0 : e : f]$$

Espaço dos Círculos

$$\{\text{cônicas em } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^5$$

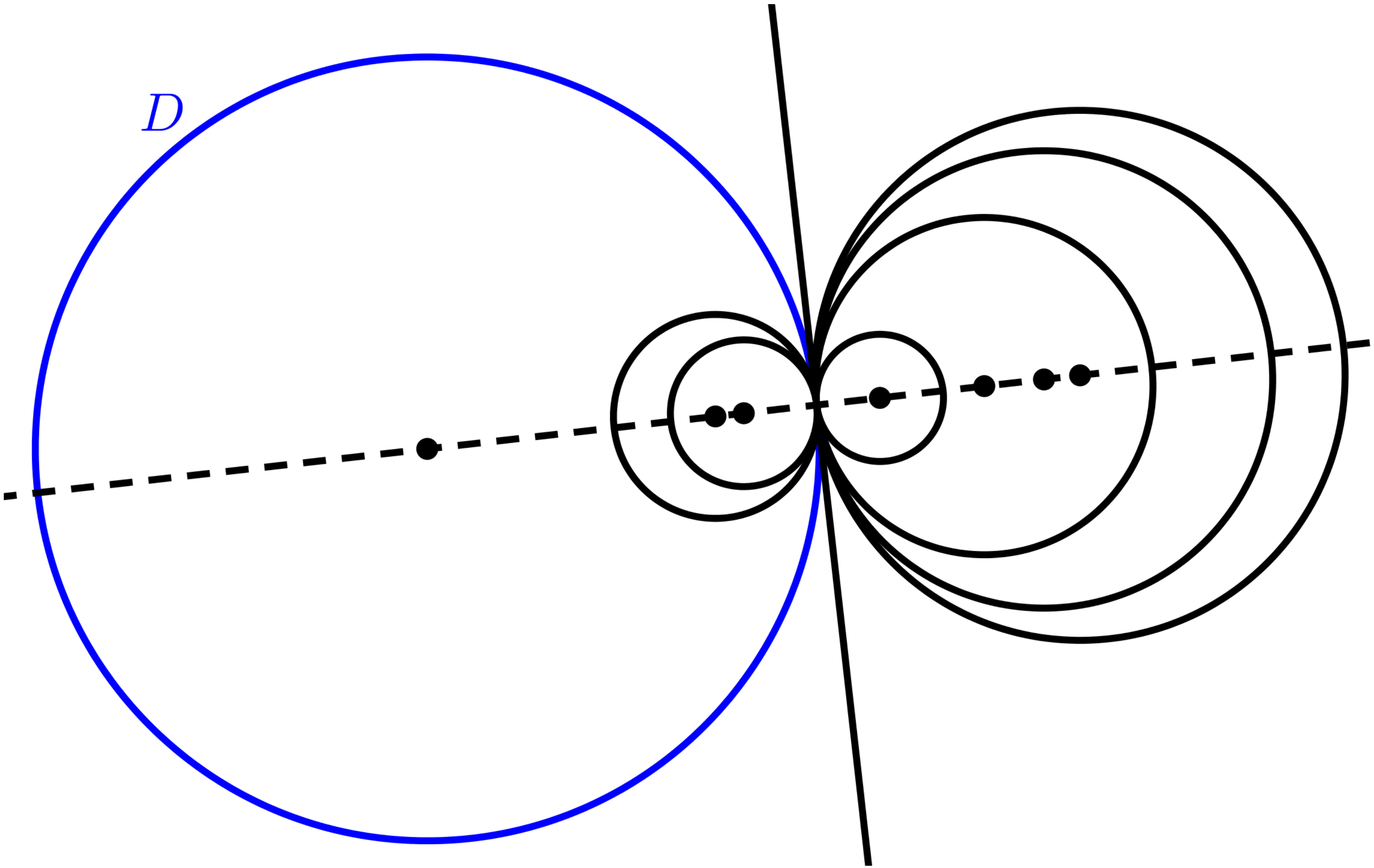
$$a_0X^2 + a_1Y^2 + a_2Z^2 + a_3XY + a_4XZ + a_5YZ \leftrightarrow [a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5]$$

$$\{\text{círculos em } \mathbb{P}^2\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$$

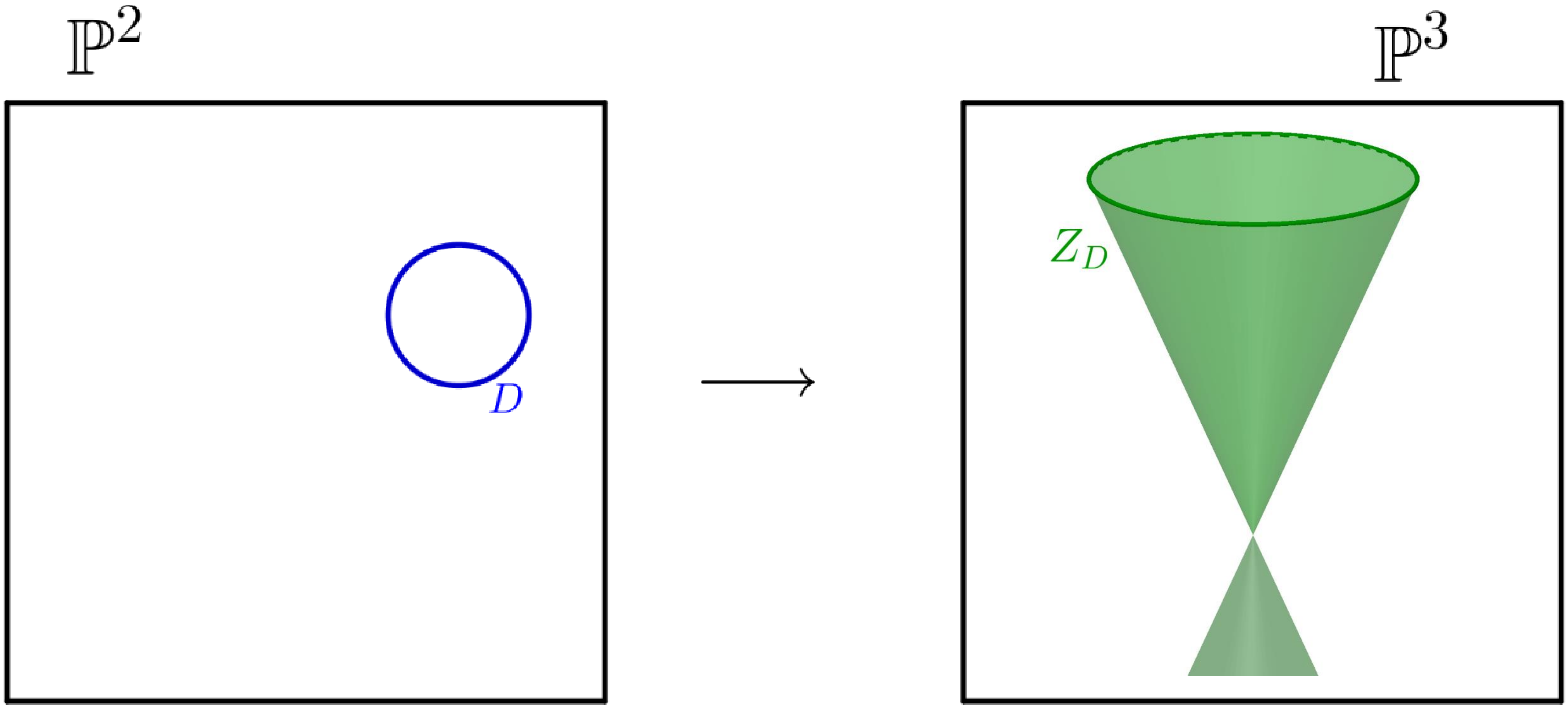
$$aX^2 + aY^2 + cZ^2 + 0XY + eXZ + fYZ \leftrightarrow [a : a : c : 0 : e : f]$$

Seja $Z_D \subset \mathbb{P}^3$ o conjunto dos círculos tangentes a um dado círculo suave D.

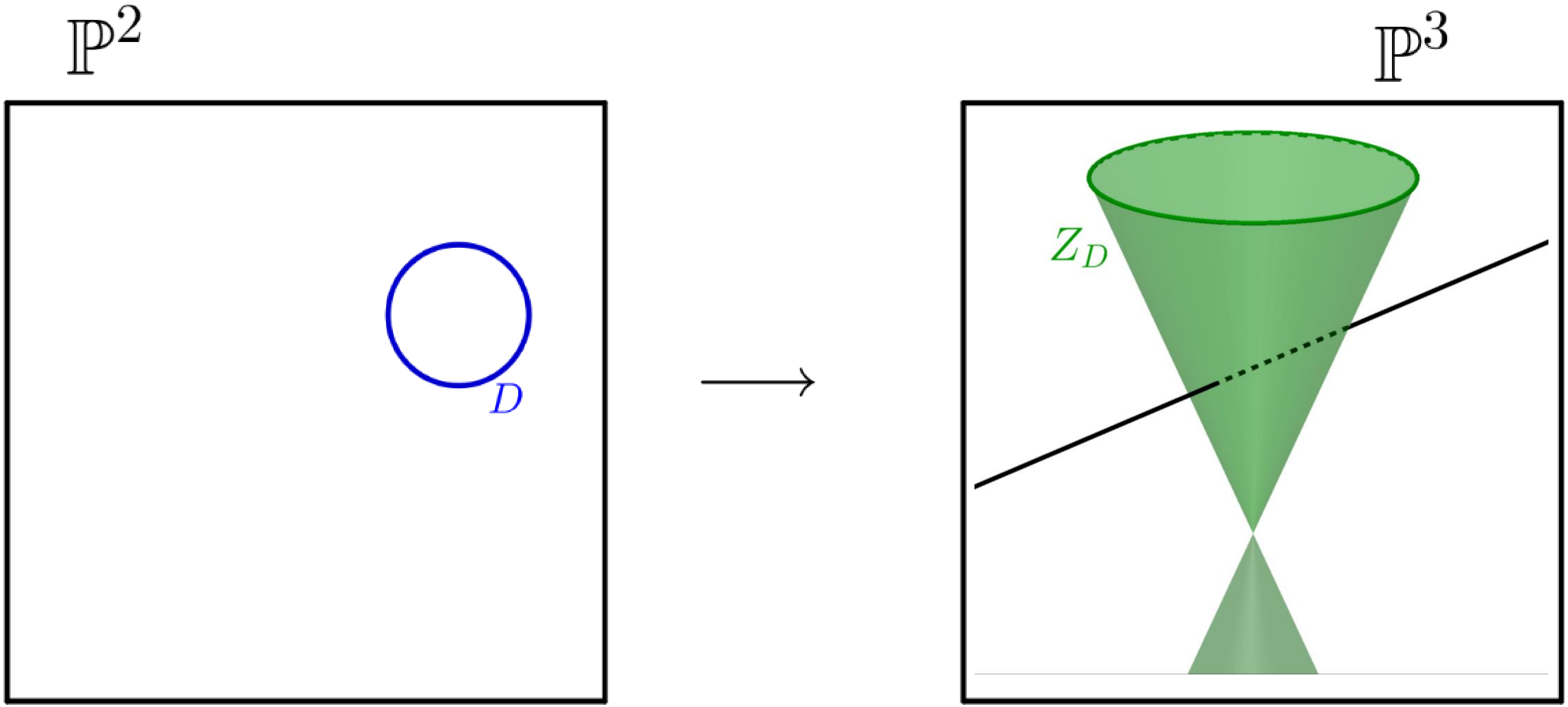
$$\dim Z_D = 2$$



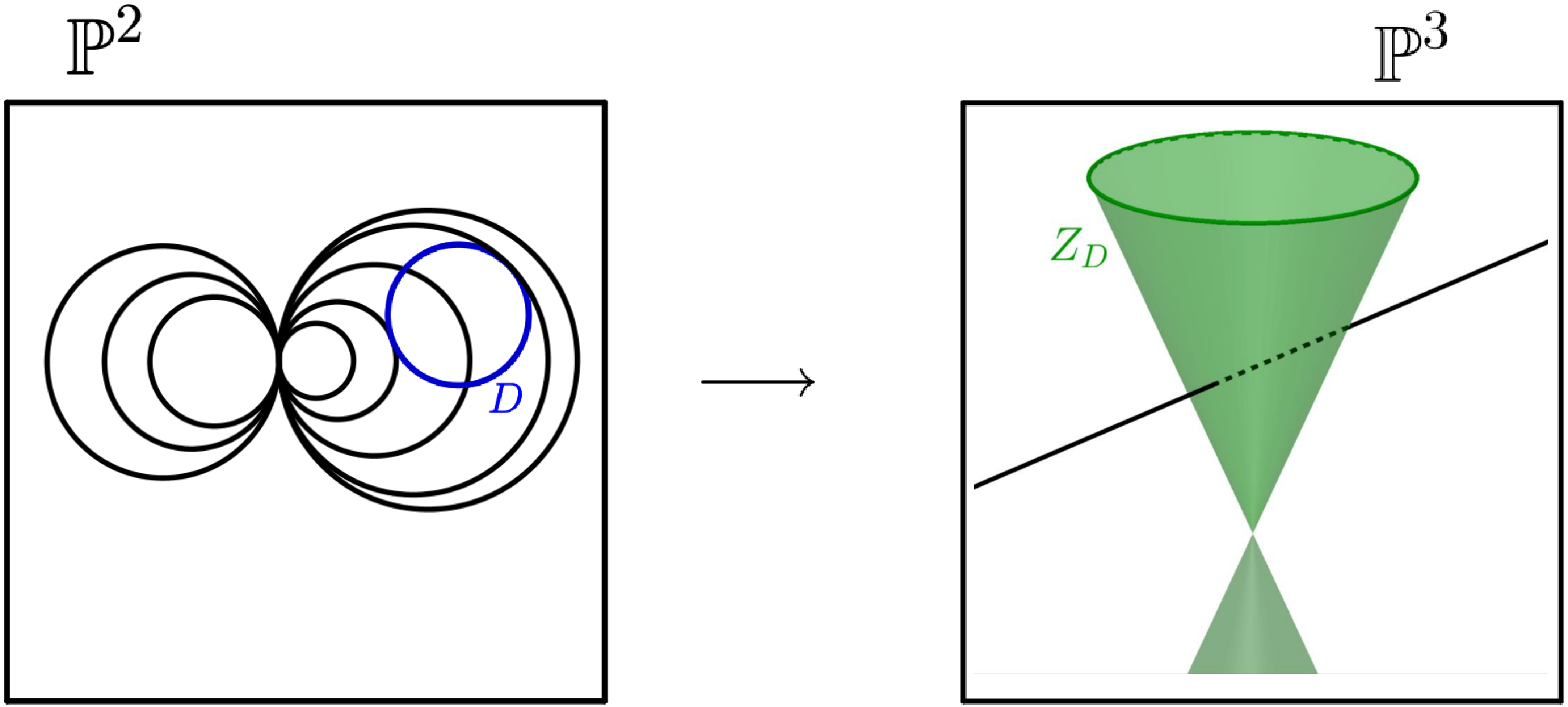
$$\deg Z_D = 2$$



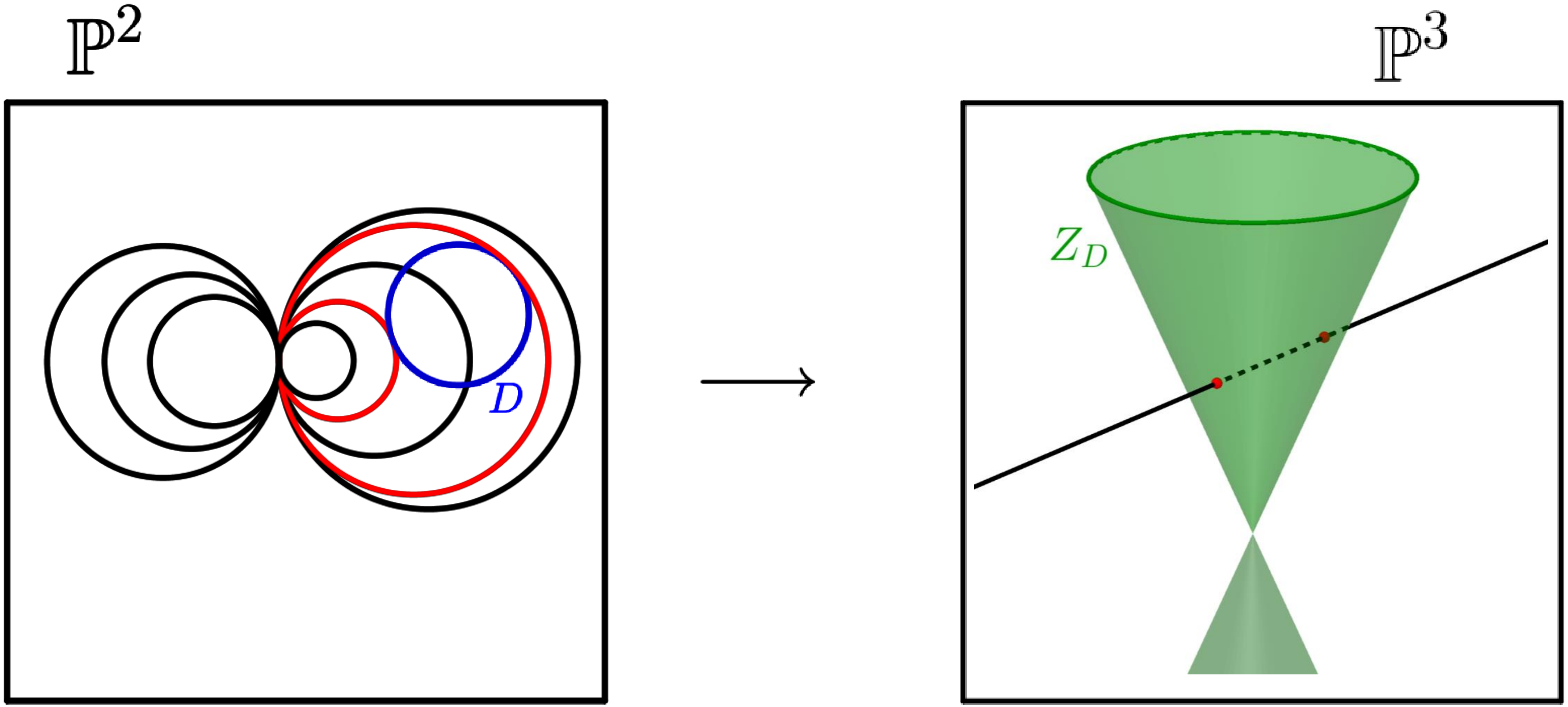
$$\mathbf{deg}\, Z_D = 2$$



$$\deg Z_D = 2$$



$$\deg Z_D = 2$$



Por Bézout...

Sejam D_1, D_2, D_3 os três círculos dados. Os círculos tangentes aos três correspondem aos pontos da intersecção

$$A = Z_{D_1} \cap Z_{D_2} \cap Z_{D_3}$$

Por Bézout...

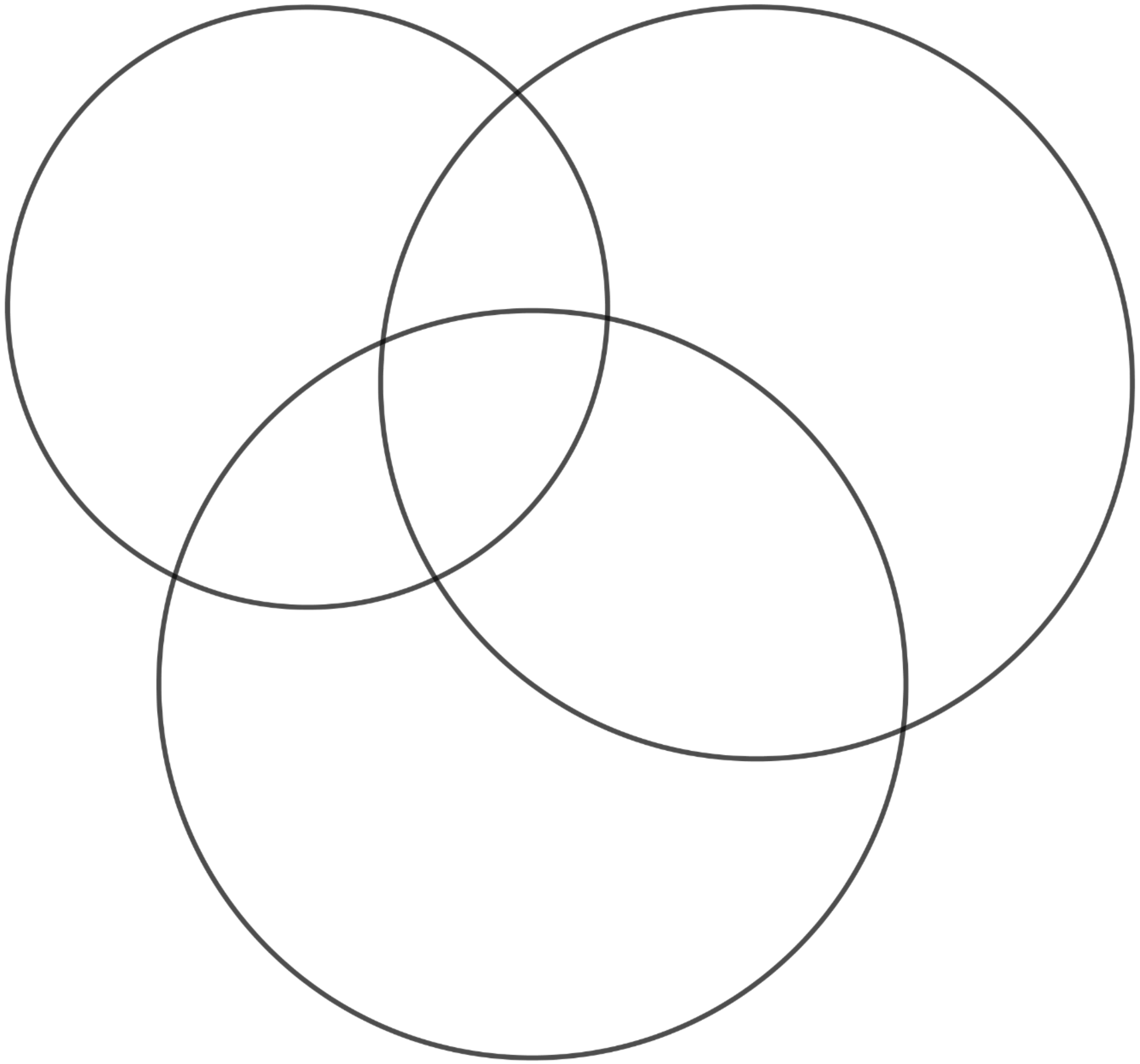
Sejam D_1, D_2, D_3 os três círculos dados. Os círculos tangentes aos três correspondem aos pontos da intersecção

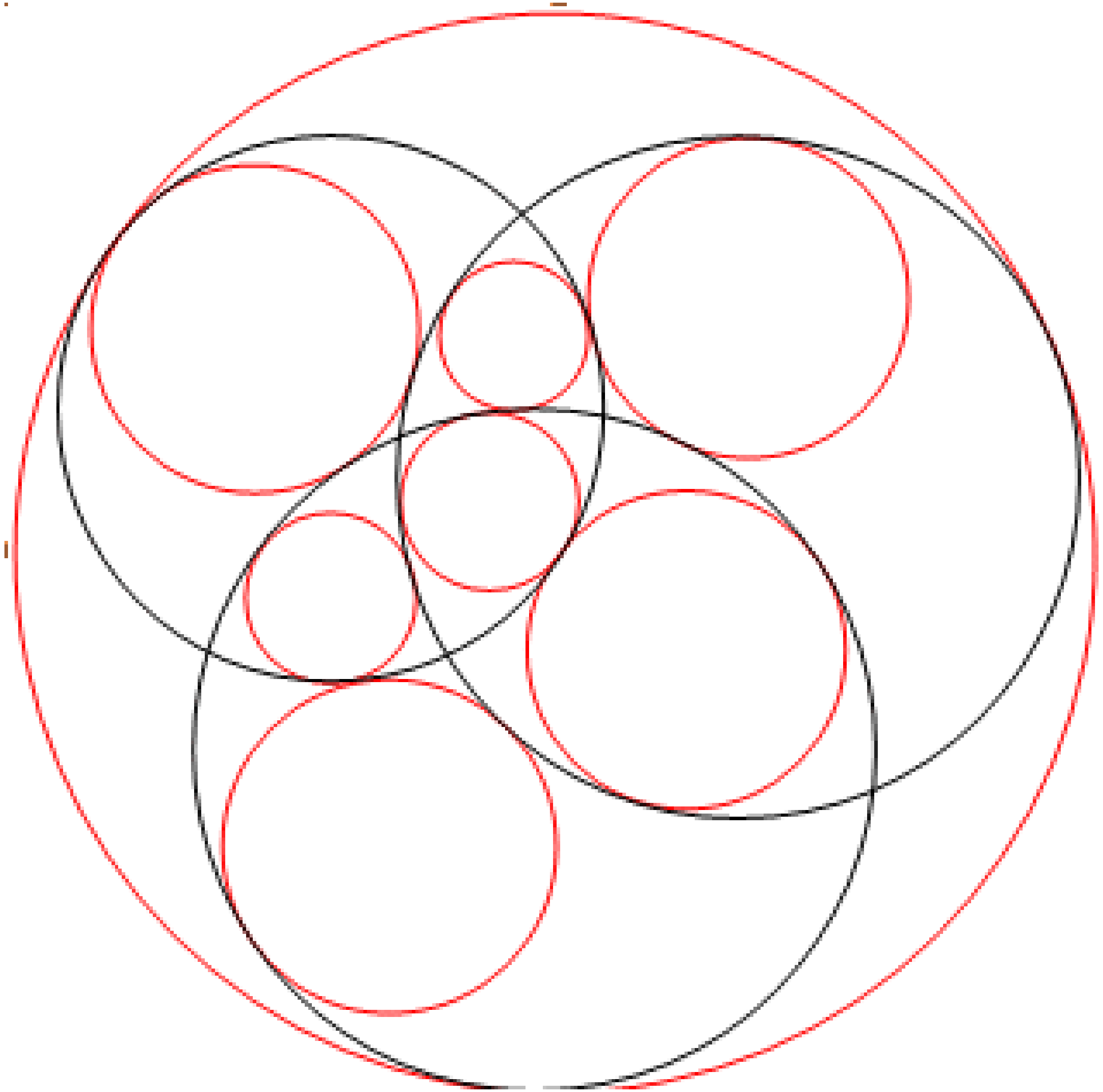
$$A = Z_{D_1} \cap Z_{D_2} \cap Z_{D_3}$$

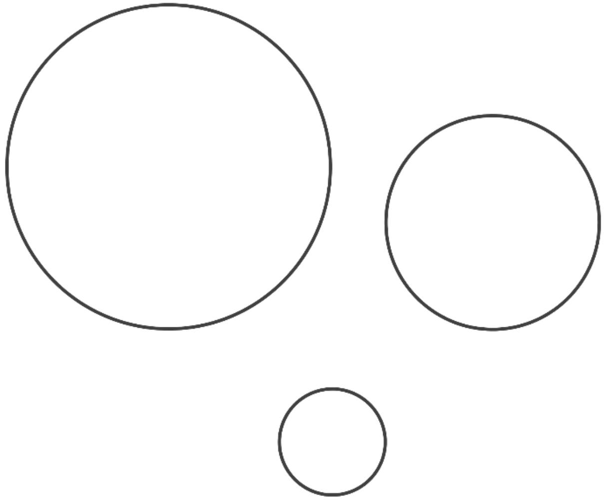
que pelo Teorema de Bézout, tem grau

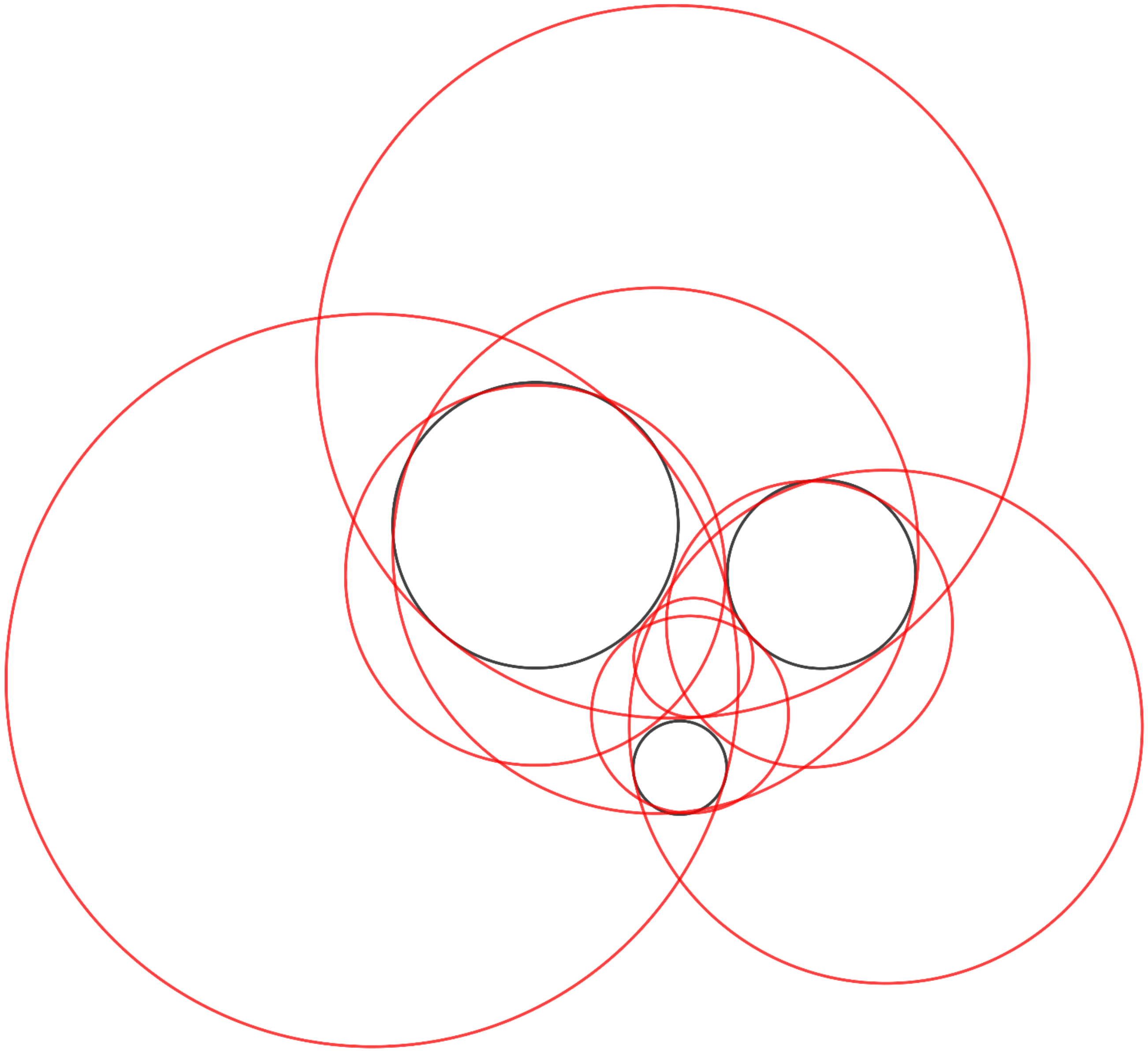
$$\deg(A) = 2^3 = 8.$$

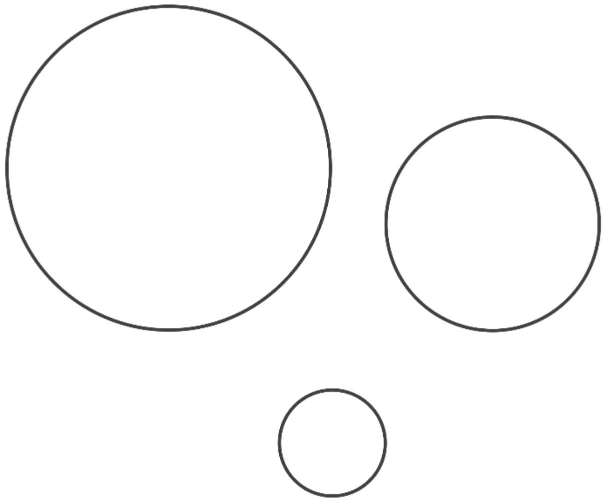
Portanto, existem 8 círculos tangentes aos três círculos dados.

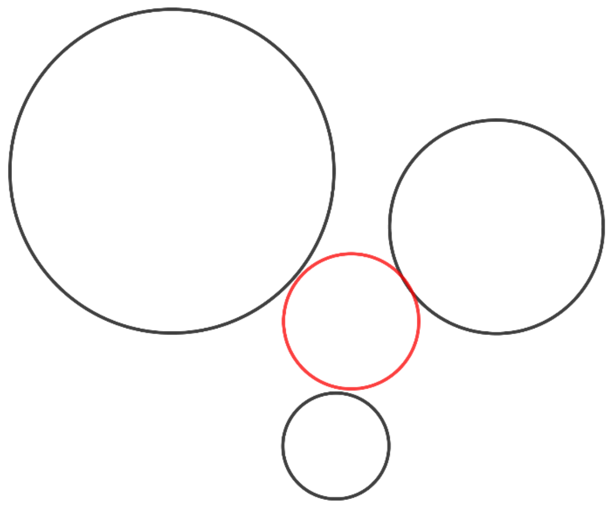


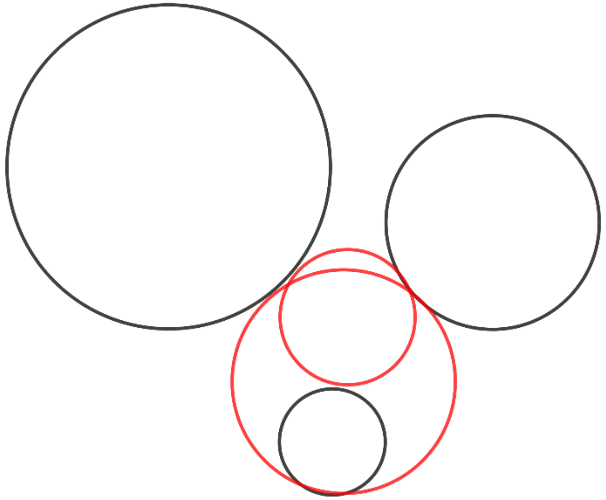


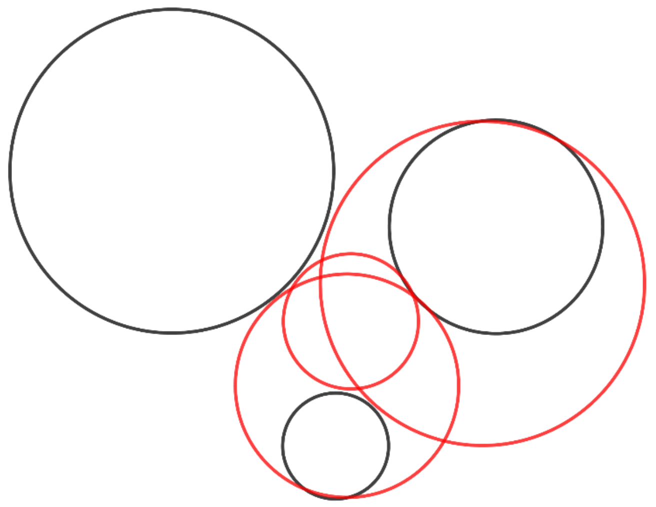


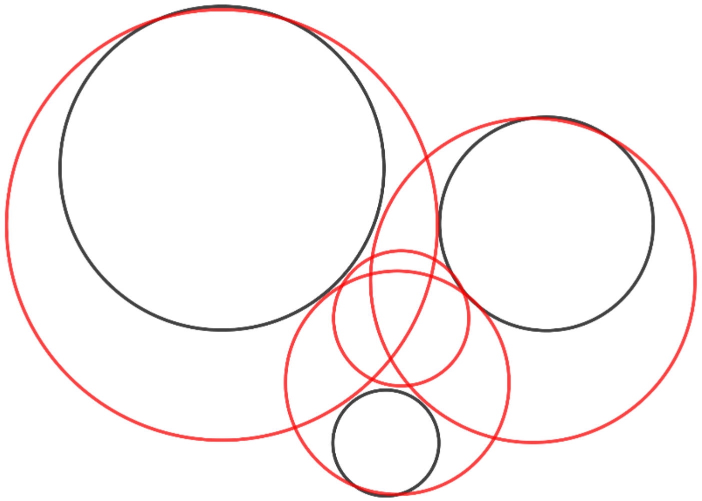


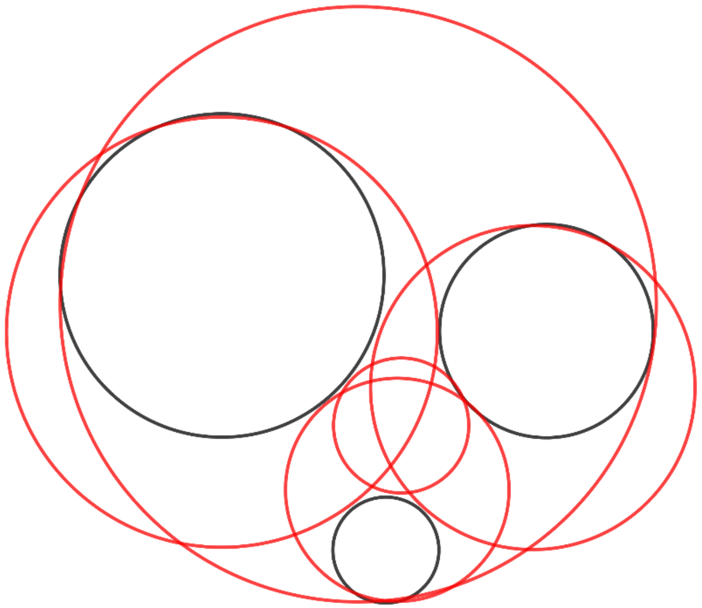


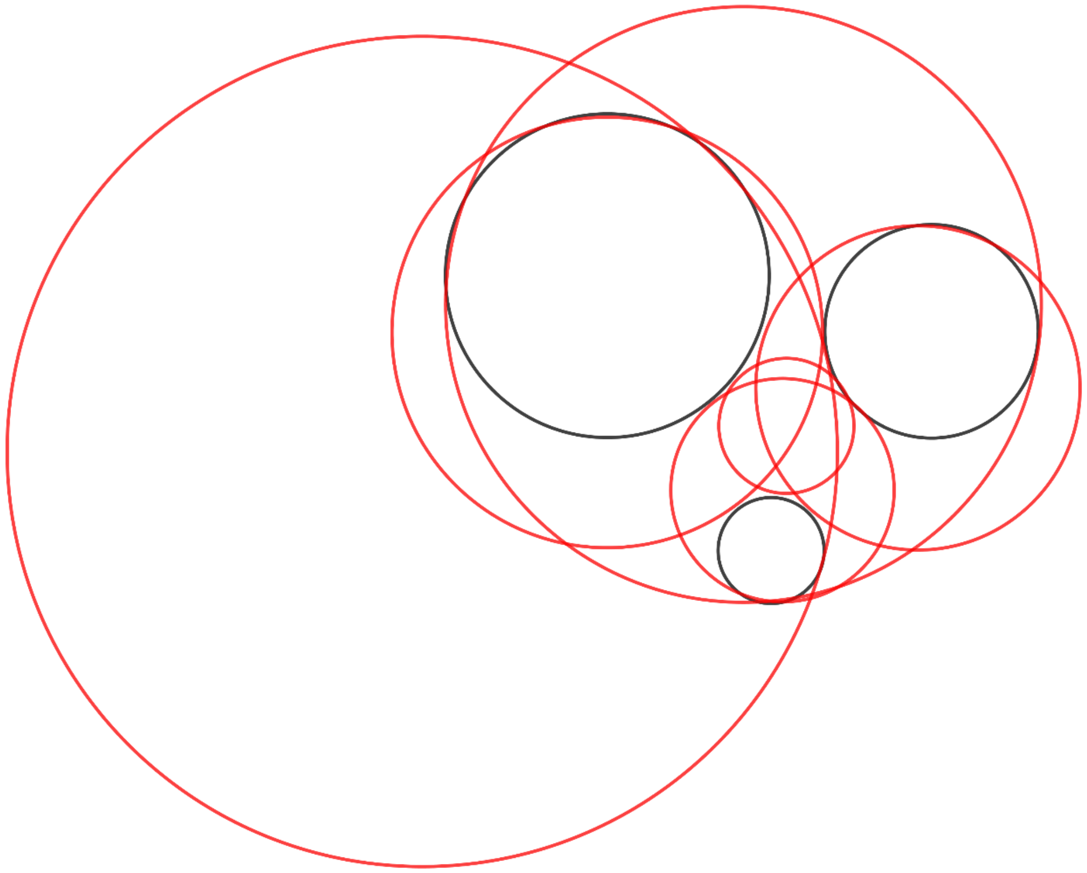


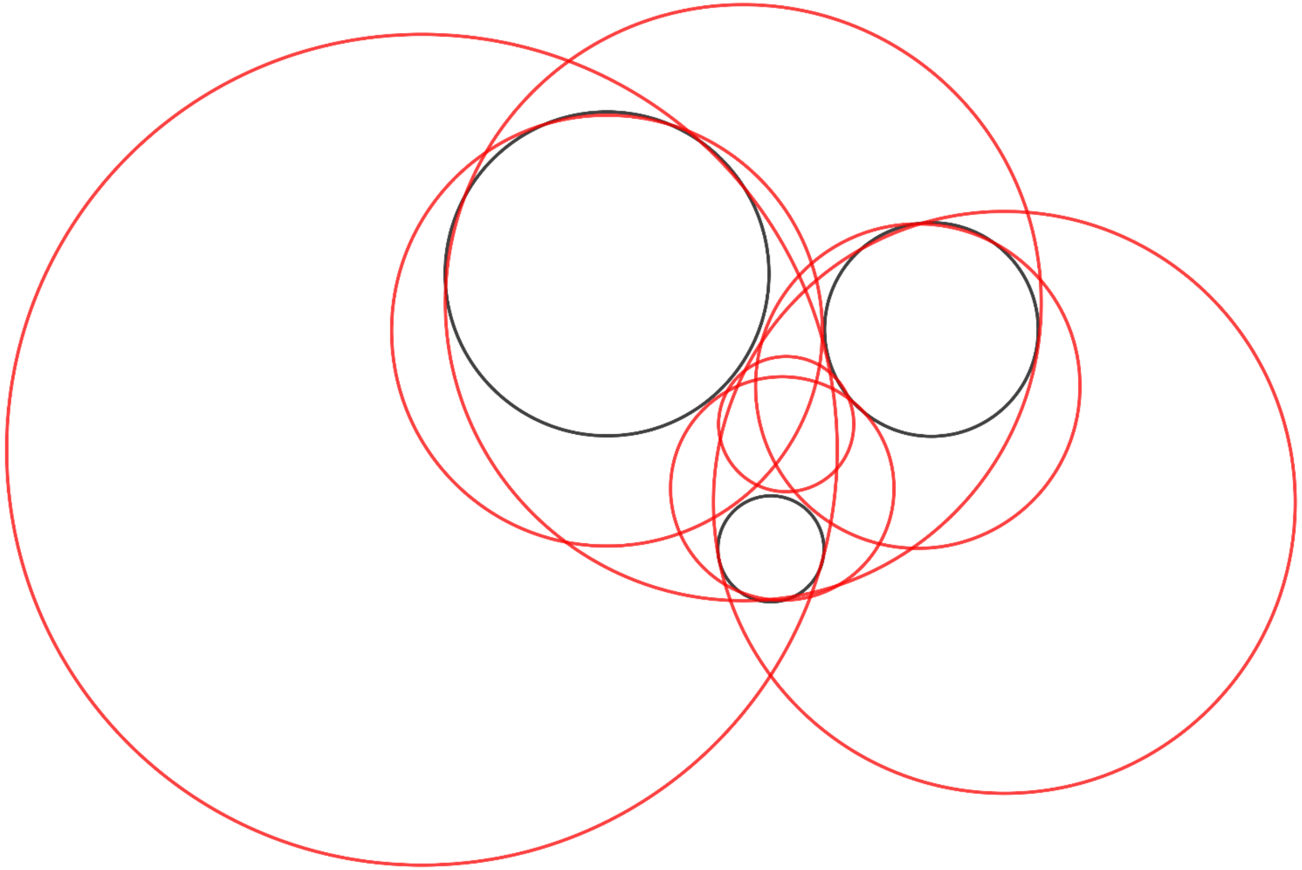


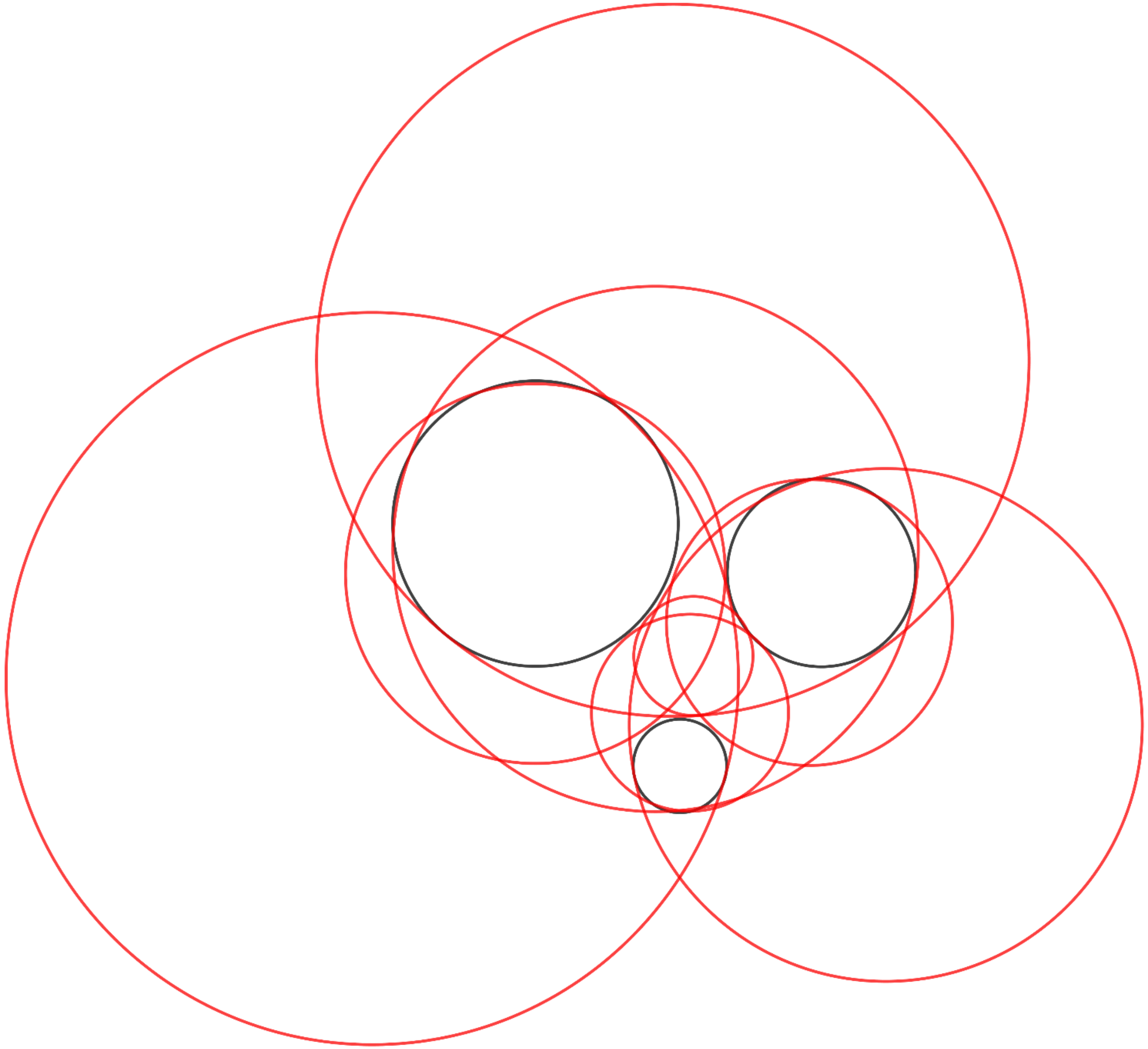






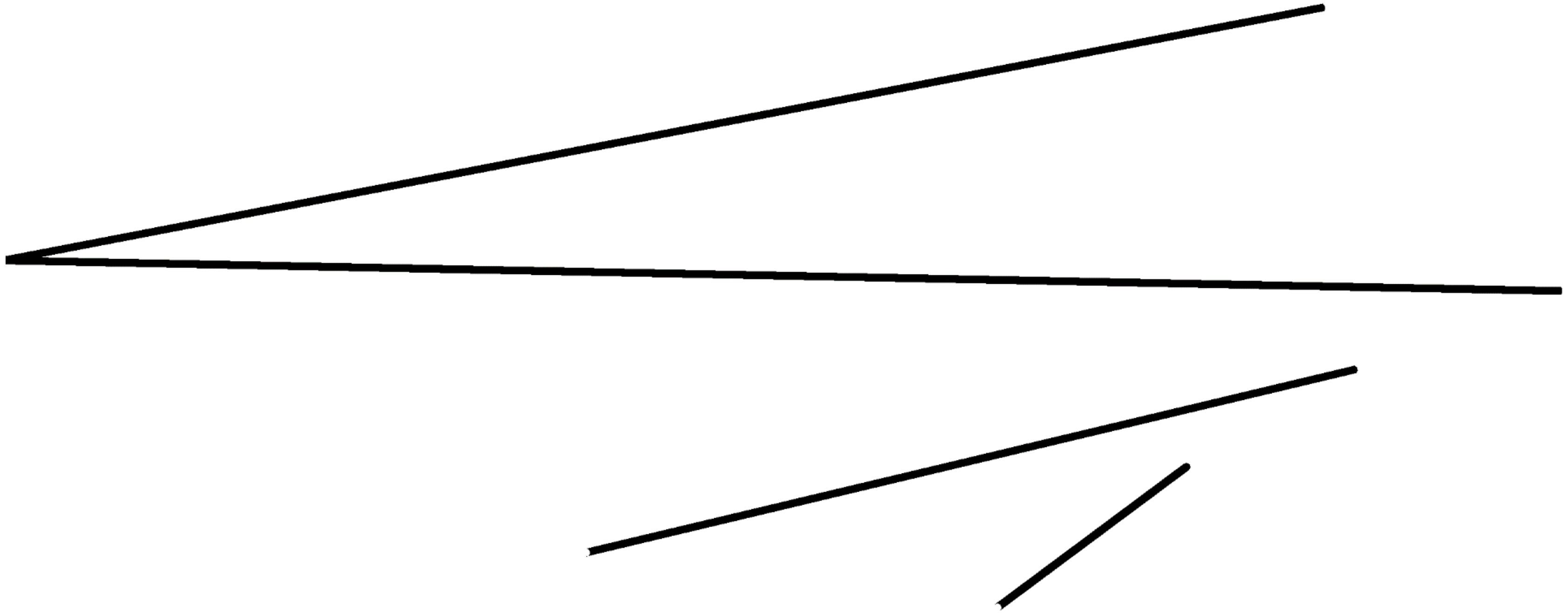






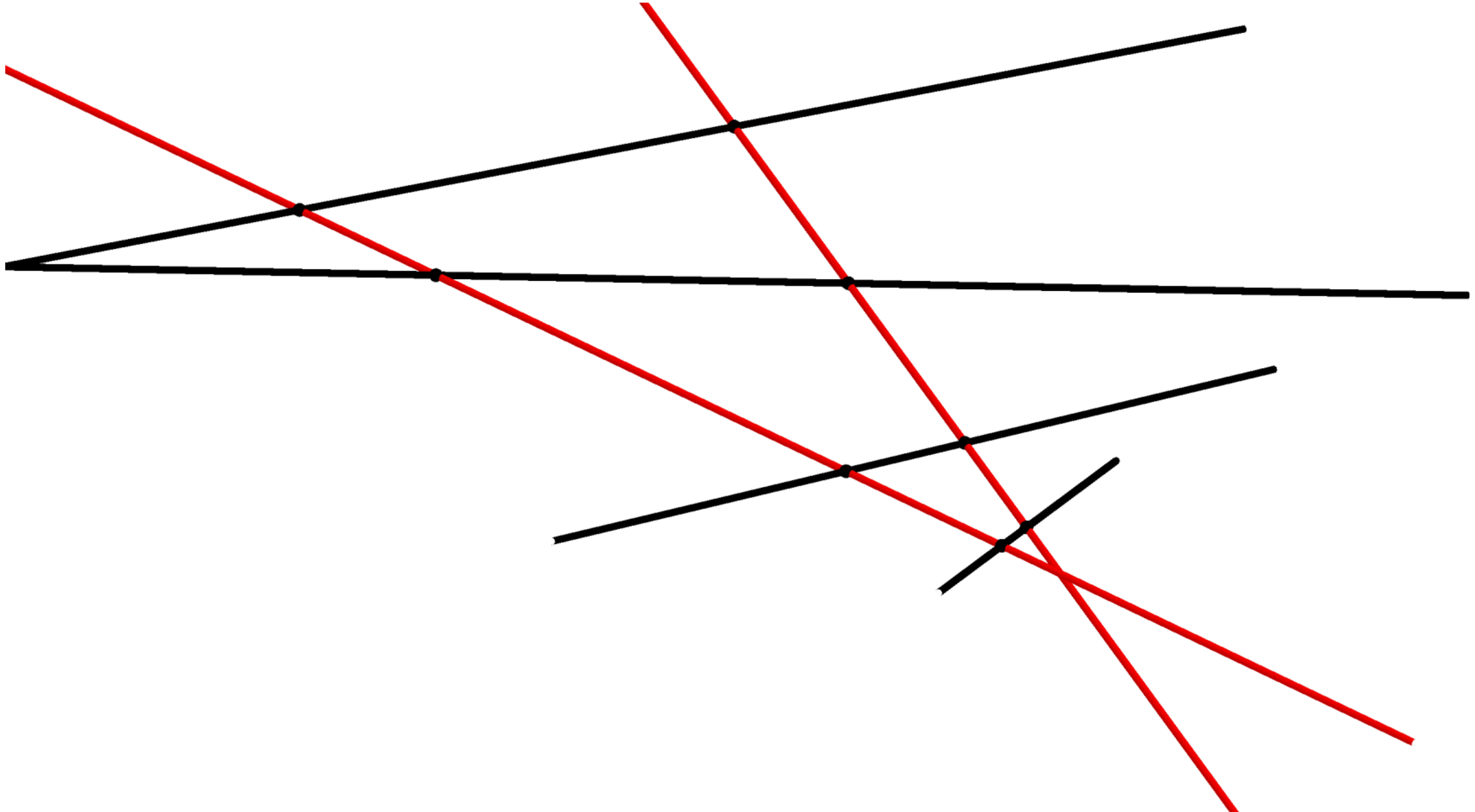
Outros problemas legais

- Quantas retas intersectam 4 retas gerais no espaço?



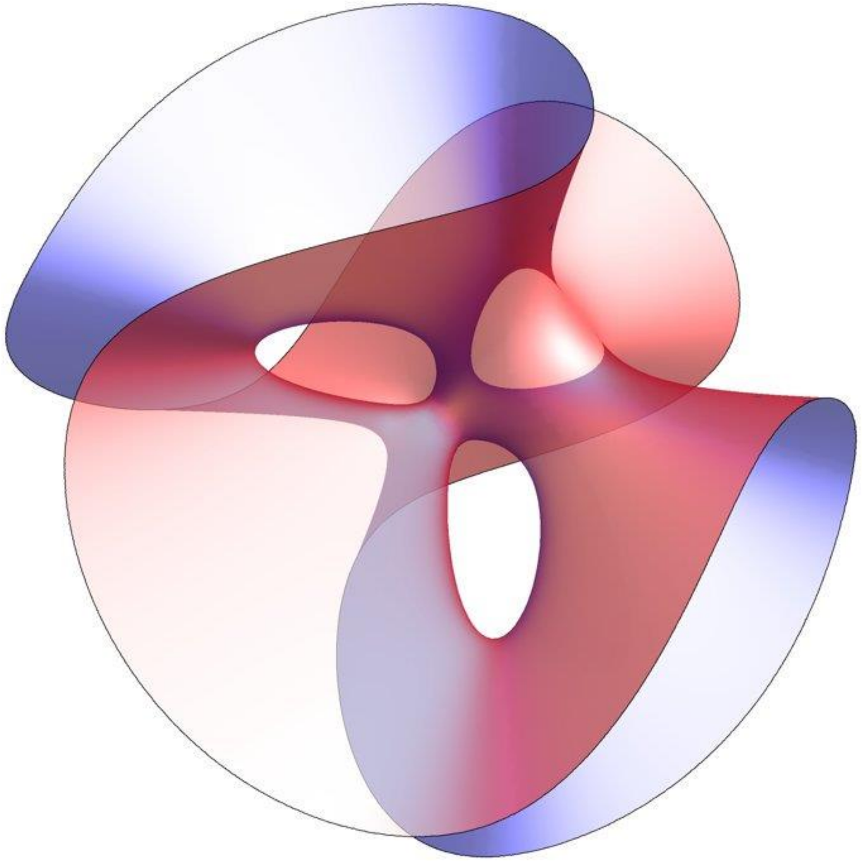
Outros problemas legais

- Quantas retas intersectam 4 retas gerais no espaço? 2



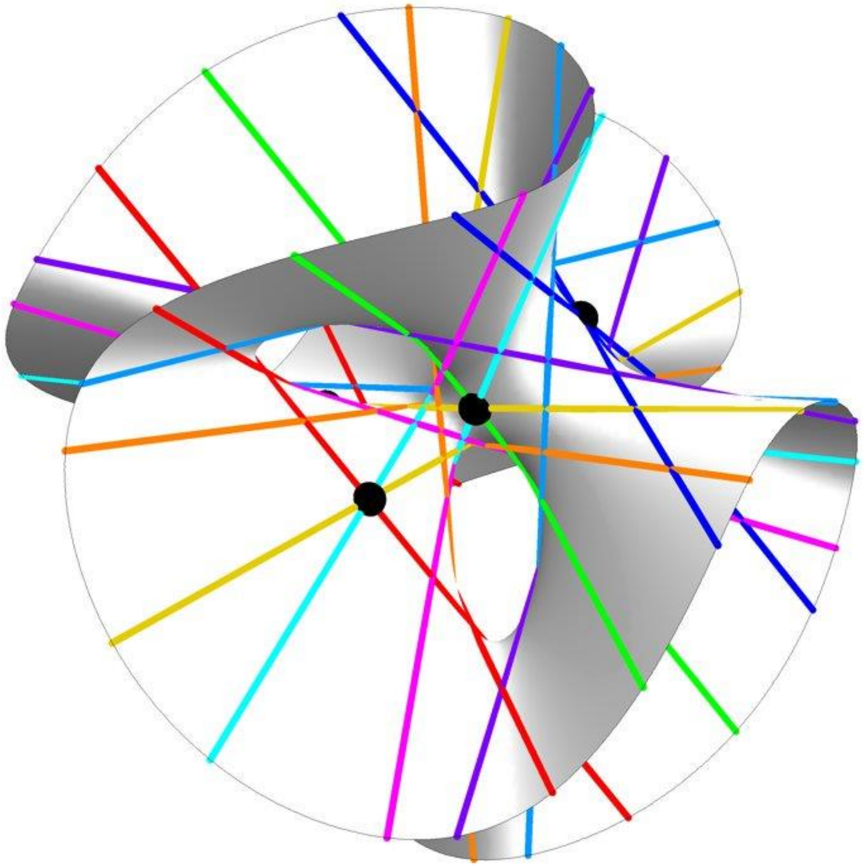
Outros problemas legais

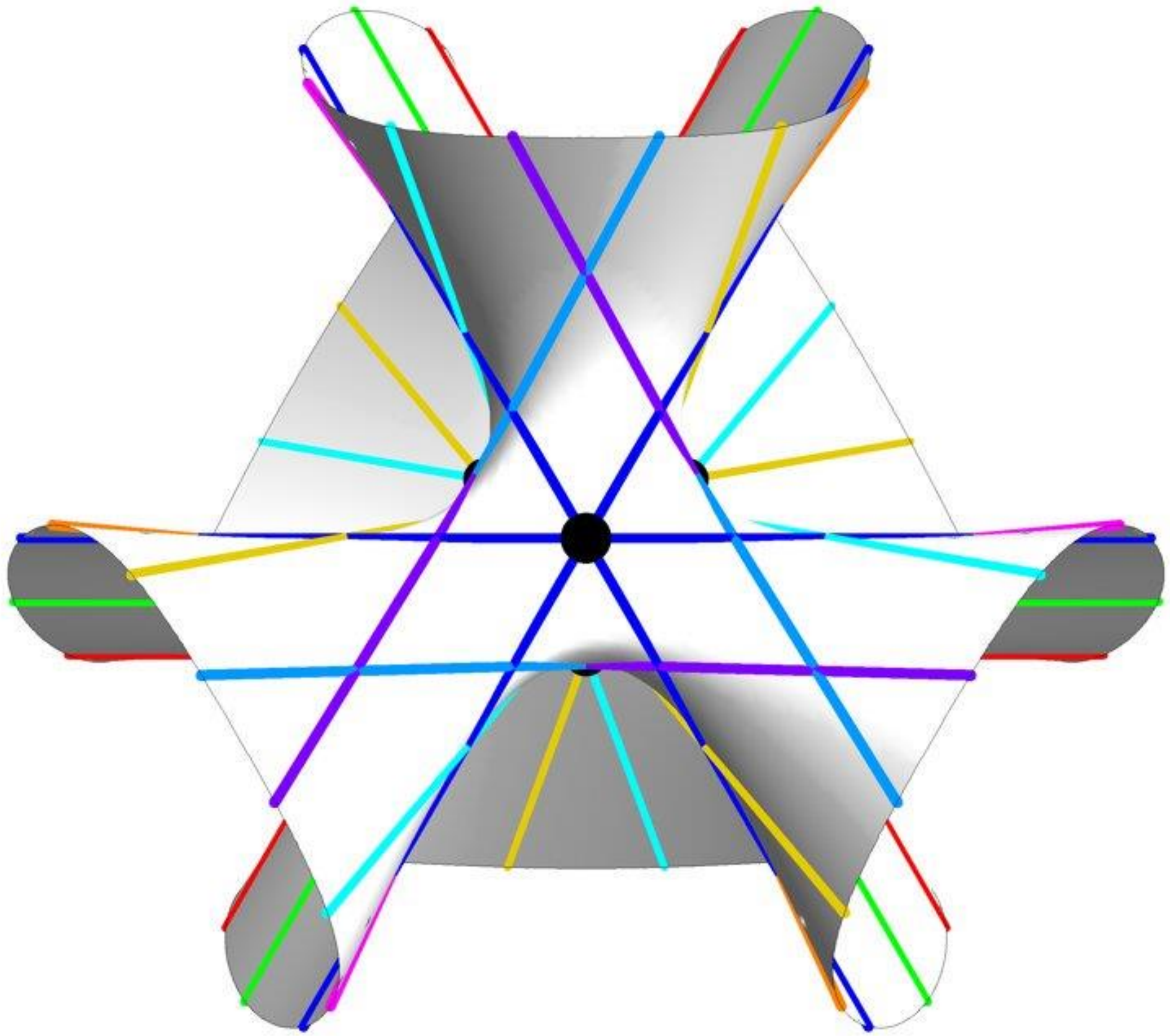
- Quantas retas estão contidas numa hipersuperfície cúbica em $\mathbb{P}^3$?

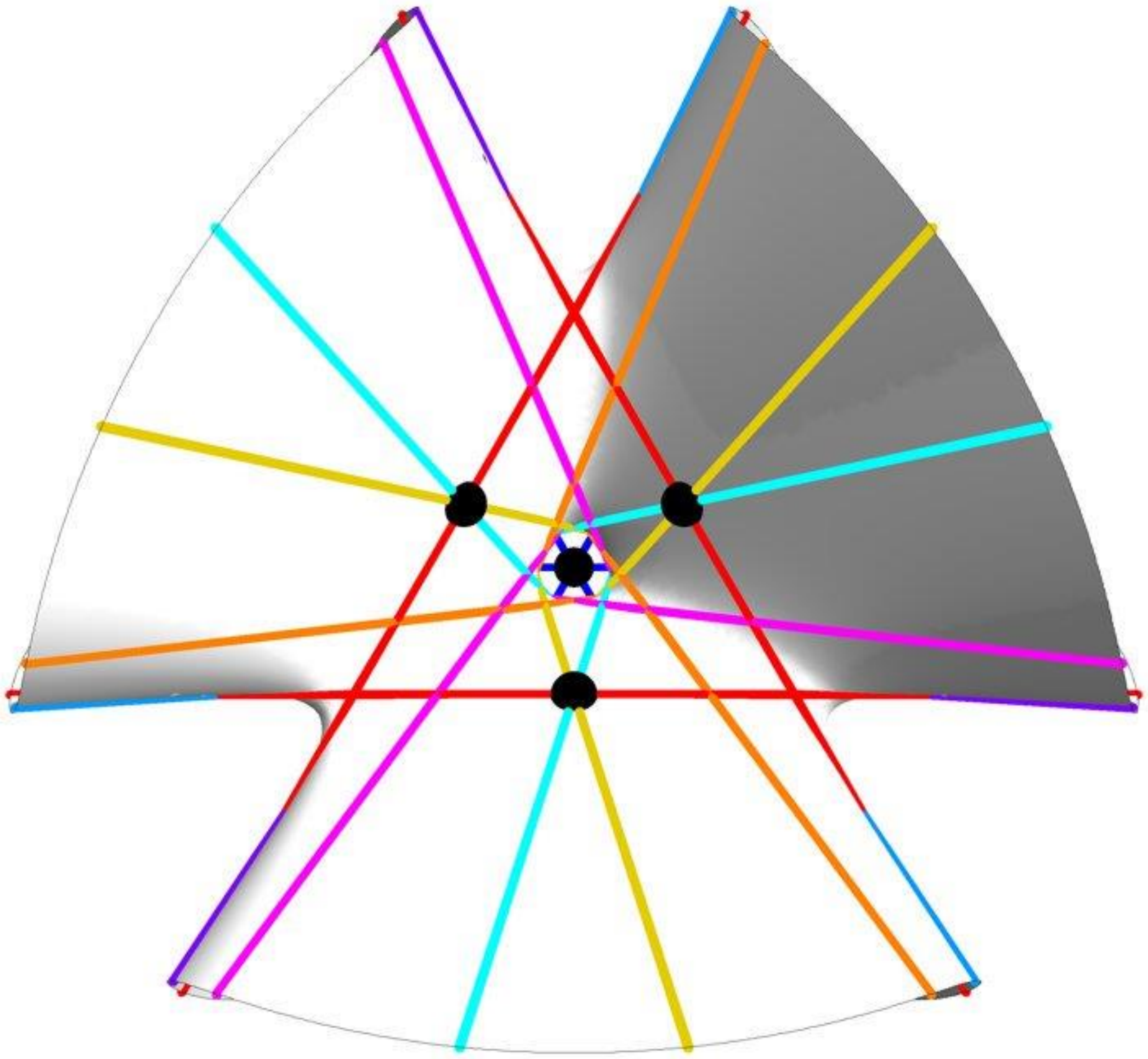


Outros problemas legais

- Quantas retas estão contidas numa hipersuperfície cúbica em $\mathbb{P}^3$? 27







Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais?

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais? 92, todas suaves.

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais? 92, todas suaves.
- Quantas cônicas são tangentes a 5 cônicas planas em posição geral?

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais? 92, todas suaves.
- Quantas cônicas são tangentes a 5 cônicas planas em posição geral? 3264.

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais? 92, todas suaves.
- Quantas cônicas são tangentes a 5 cônicas planas em posição geral? 3264.
- Existem exatamente 4407296 cônicas tangentes a 8 superfícies quádricas gerais.

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais? 92, todas suaves.
- Quantas cônicas são tangentes a 5 cônicas planas em posição geral? 3264.
- Existem exatamente 4407296 cônicas tangentes a 8 superfícies quádricas gerais.
- Quantas retas estão contidas numa hipersuperfícies geral de grau 37 em $\mathbb{P}^{20}$?

Outros problemas legais

- Existem 32 retas tangentes a 4 superfícies quádricas gerais.
- Quantas cônicas planas em $\mathbb{P}^3$ intersectam 8 retas gerais? 92, todas suaves.
- Quantas cônicas são tangentes a 5 cônicas planas em posição geral? 3264.
- Existem exatamente 4407296 cônicas tangentes a 8 superfícies quádricas gerais.
- Quantas retas estão contidas numa hipersuperfícies geral de grau 37 em $\mathbb{P}^{20}$? Exatamente

  $$479849240965383456367278060519107076039364076181726998551 5.$$

Referências

- D. Eisenbud, J. Harris, *“3264 and All That – A Second Course in Algebraic Geometry”*, Cambridge University Press, 2016.

- W. Fulton, *Intersection theory*, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.
- W. Fulton, *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, Addison Wesley (1974).
- I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Second Edition, Springer-Verlag, 1994.

- https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dual_curve
- https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal’s_theorem
- https://en.wikipedia.org/wiki/Brianchon’s_theorem
- https://en.wikipedia.org/wiki/Enumerative_geometry
- https://en.wikipedia.org/wiki/Intersection_theory