Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Teorema das Cinco Cores

Alfredo Rogério Jorge

O problema

Dado um mapa num plano, dividido em regiões, é possível colorir cada uma das regiões de forma que:

- Regiões vizinhas tenham cores diferentes, e
- Utilizando não mais do que cinco cores?

História

1852: A conjectura foi proposta pela primeira vez por Francis Guthrie. Ao tentar colorir o mapa dos condados da Inglaterra, observou que apenas quatro cores diferentes eram necessárias.

1878: A primeira referência sobre o Teorema das Quatro Cores publicada é de Arthur Cayley. Um dos matemáticos mais famosos de seu tempo, levantou a questão para a Companhia Matemática de Londres e perguntou se alguém tinha resolvido a Conjectura das Quatro Cores.

1879: Alfred Bray Kempe anunciou na revista Nature que tinha uma demonstração da conjectura. Kempe era um advogado que trabalhou em Londres e que tinha estudado matemática com Cayley em Cambridge. A partir desse momento, Kempe ganhou muito prestígio e foi nomeado membro da Royal Society.

História

1880: Outra prova do Teorema das Quatro Cores, feita por Peter Guthrie Tait.

1890: Percy Heawood mostra que estava incorreta a prova de Kempe. Kempe aceita o erro perante a Sociedade Matemática de Londres e se declarou incompetente para resolver o erro em sua demonstração.

1890: Além de expor a falha na prova de Kempe, Heawood provou o Teorema das Cinco Cores e generalizou a Conjectura das Quatro Cores.

1891: Julius Petersen mostra que estava incorreta a prova de Tait.

História

1976: O Teorema das Quatro Cores foi finalmente comprovado por Kenneth Appel e Haken Wolfgang na Universidade de Illinois.

Usaram mais de 1.200 horas do computador mais rápido que havia para demonstrar a conjectura.

Os mais otimistas afirmam que para que Appel e Haken pudessem provar a conjuctura à mão, levariam 100 mil anos, dedicando-se 60 horas por semana.

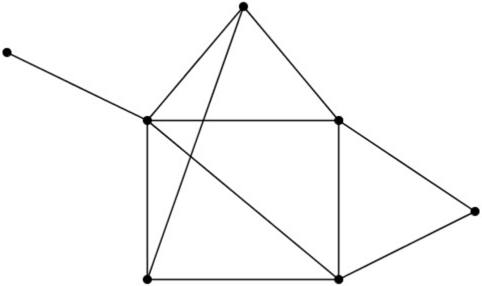
É um dos primeiros casos na história da matemática no qual o computador teve um impacto tão forte: ele permitiu um resultado para o problema que havia sido proposto há mais de um século.

O resultado trouxe grande aflição no mundo da matemática, não porque espera-se que o resultado seja falso, mas porque foi o primeiro caso em que a máquina (em algum sentido) estava batendo o homem.

Definição de grafo

Um grafo é um par (V,A), em que V é um conjunto de vértices e A um conjunto de arestas.

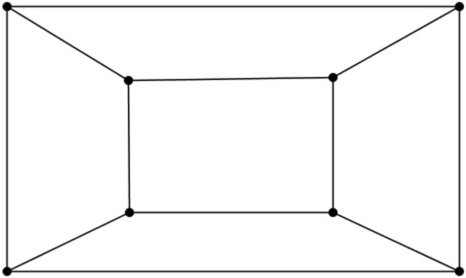
Exemplo:



Definição de grafos planar

Um grafo G é dito planar se pode ser desenhado no plano sem que as curvas que representam as arestas se cruzem.

Exemplo:



Alguns conceitos de grafos

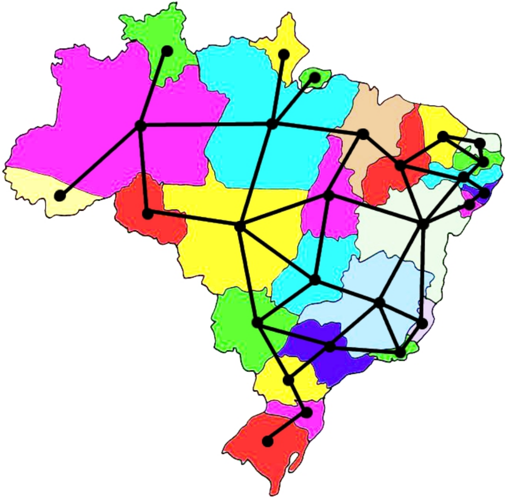
Vértices e arestas

- Denotaremos por n o número de vértices de um grafo G e por m o número de arestas.
- Chamamos o grau de um vértice $(g(v))$ o número de arestas que saem de v.

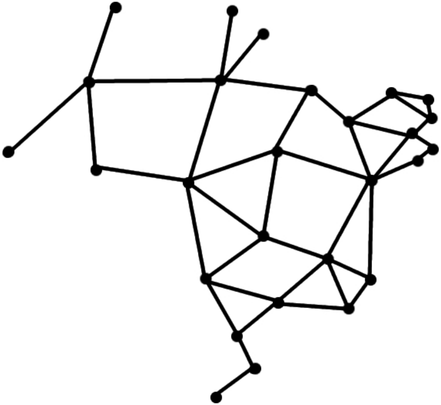
$$\sum_{v \in G} g(v) = 2m.$$

Enunciado do Teorema das Cinco Cores

Enunciado do Teorema das Cinco Cores



Enunciado do Teorema das Cinco Cores



Enunciado do Teorema das Cinco Cores

Teorema das Cinco Cores

Dado um grafo num plano, é possível colorir cada um dos vértices de forma que:

- Vértices vizinhos tenham cores diferentes e
- Utilizando não mais do que cinco cores?

Prova do Teorema das Cinco Cores

Considere um grafo planar G.

Iniciamos nossa demonstração com uma importante relação, a qual será utilizada juntamente com a fórmula de Euler ($2 = n - m + f$) para mostrar que existe pelo menos um vértice com no máximo 5 vizinhos.

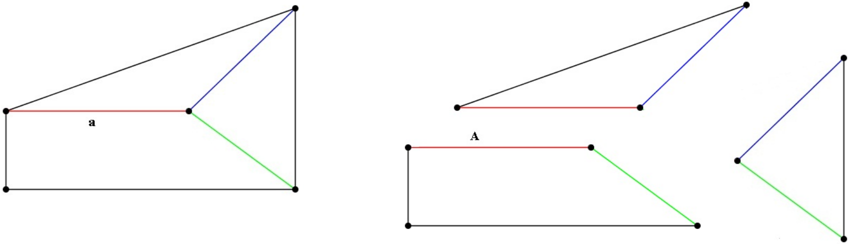
A relação é dada por:

Relação entre arestas e faces

Cada face de um grafo planar é delimitada por pelo menos 3 arestas, e cada aresta limita no máximo 2 faces. Então

$$\frac{2}{3}m \geq f.$$

Para entender esse resultado vamos tomar um grafo G e a partir dele chegar na relação $2m \geq 3f$.



Da figura temos que $2a \geq A$ e $A \geq 3f$.
Assim, $2m \geq 3f$.

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$
- $2 \leq n - m + \frac{2}{3}m$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$
- $2 \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $6 \leq 3n - 3m + 2m$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$
- $2 \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $6 \leq 3n - 3m + 2m$
- $6 \leq 3n - m$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$
- $2 \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $6 \leq 3n - 3m + 2m$
- $6 \leq 3n - m$
- $m \leq 3n - 6$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$
- $2 \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $6 \leq 3n - 3m + 2m$
- $6 \leq 3n - m$
- $m \leq 3n - 6$
- $2m \leq 6n - 12$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos primeiro mostrar que temos pelo menos 1 vértice com no máximo 5 vizinhos. Pela fórmula de Euler temos:

- $2 = n - m + f$
- $2 \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $6 \leq 3n - 3m + 2m$
- $6 \leq 3n - m$
- $m \leq 3n - 6$
- $2m \leq 6n - 12$

$$\sum_{v \in G} g(v) \leq 6n - 12$$

Prova do Teorema das Cinco Cores

Agora, suponha que cada vértice de G tem grau maior ou igual a 6.

Sabemos que se cada vértice tem grau maior ou igual a 6, a somatória dos graus resultaria em

$$\sum_{v \in G} g(v) \geq 6n.$$

Portanto, temos uma contradição, já que

$$\sum_{v \in G} g(v) \leq 6n - 12.$$

Assim, deve haver algum vértice com no máximo 5 vizinhos.

Prova do Teorema das Cinco Cores

Considere n o número de vértices do grafo que queremos colorir. Lembramos que possuímos 5 cores. Então, se:

- $n=0$
  Não pintamos nenhum vértice.
- $n=1$
  Pintamos o vértice com uma cor entre as cinco que possuímos.
- $n=2$
  Escolhemos duas cores entre as cinco.
- $n=3$
  Escolhemos três cores entre as cinco.
- $n=4$
  Escolhemos quatro cores entre as cinco.
- $n=5$
  Pintamos cada vértice com uma cor.

Prova do Teorema das Cinco Cores

Temos agora o caso n ≥ 6.

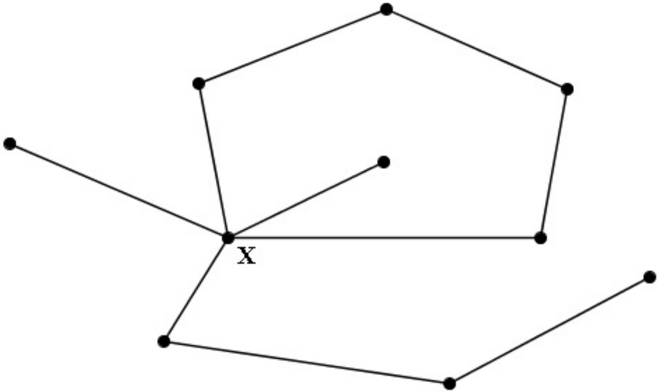
Utilizaremos indução no número de vértices para mostrar que é possível colorir os vértices de G com apenas 5 cores.

A hipótese de indução é: dado que é possível colorir um grafo com $n - 1$ vértices com 5 cores, vamos mostrar que podemos colorir um grafo com n vértices também com 5 cores.

Prova do Teorema das Cinco Cores

Chamaremos o vértice que possui 5 vizinhos de x.

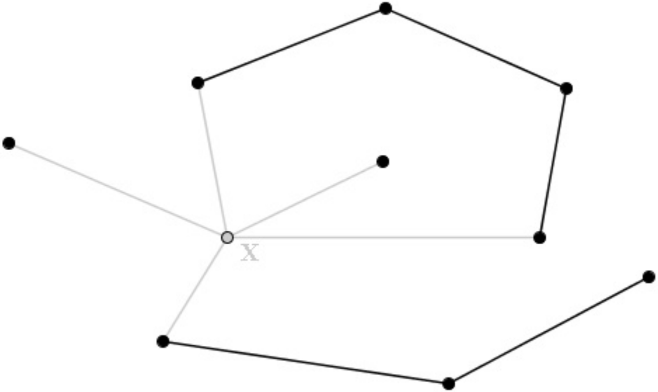
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

Vamos remover o vértice x de G para criar outro grafo, G'. Como este grafo tem $n-1$ vértices, ele pode ser pintado com as 5 cores.

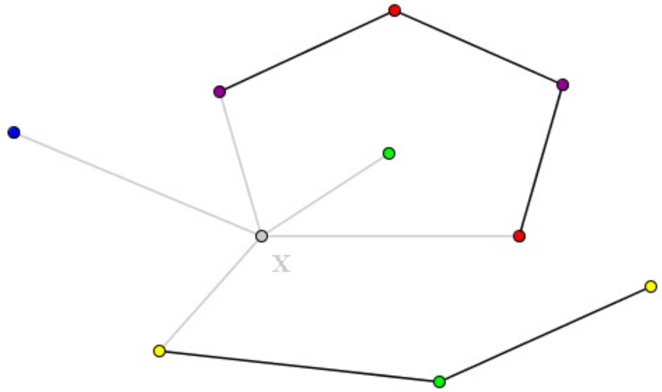
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

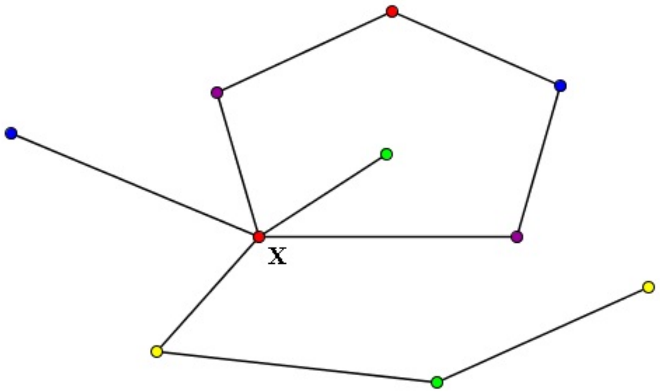
Vamos remover o vértice x de G para criar outro grafo, G'. Como este grafo tem $n-1$ vértices, ele pode ser pintado com as 5 cores.

Exemplo:



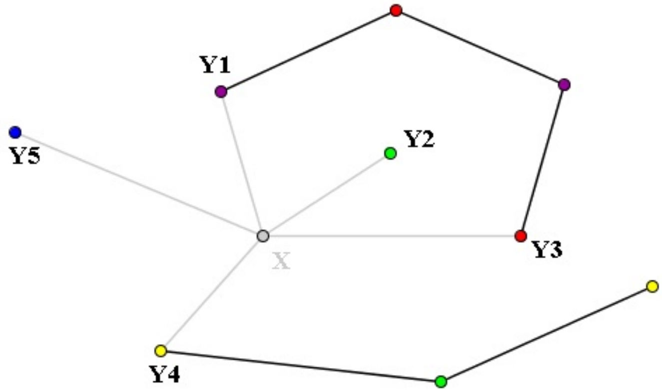
Se alguma cor não for conectada a x, pintamos ele com a cor que sobrou.

Exemplo:



Se todas as cinco cores forem conectadas a x, examinamos os cinco vértices adjacentes a x. Chamamos estes vértices de y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 (no sentido horário).

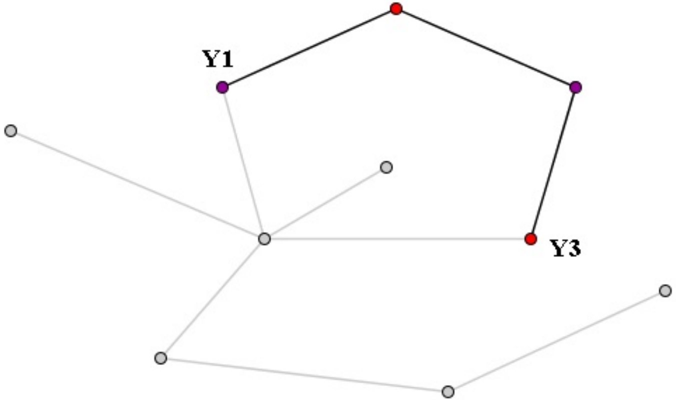
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

Considere agora o subgrafo $G_{1,3}$ de G' constituido pelos vértices pintados com as cores 1 e 3 e as arestas que estão ligadas com os vértices de cores 1 e 3.

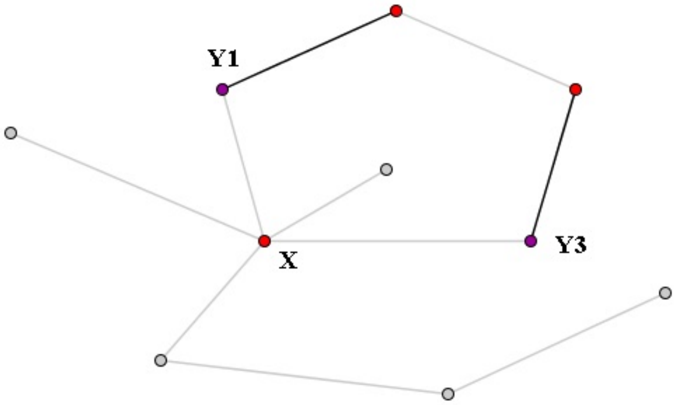
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

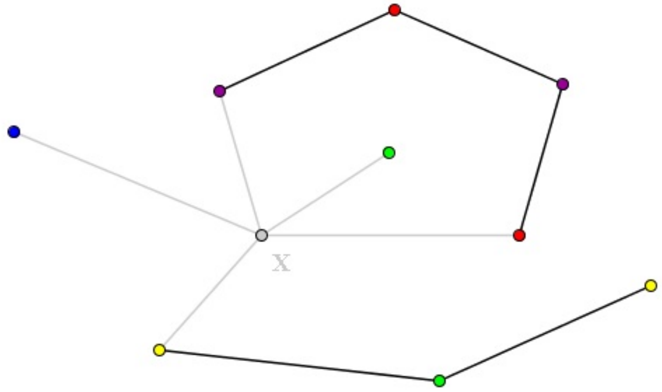
Se não houver um caminho entre y_1 e y_3 em $G_{1,3}$, então nós mudamos as cores 1 e 3. Desta forma, uma destas cores ficará disponível para pintar o vértice x.

Exemplo:



Analisando o grafo novamente.

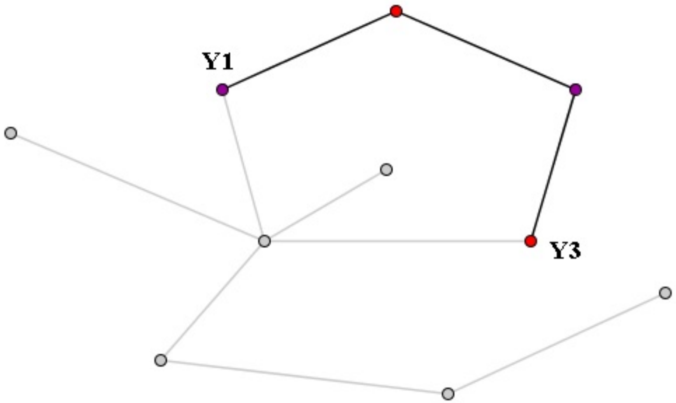
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

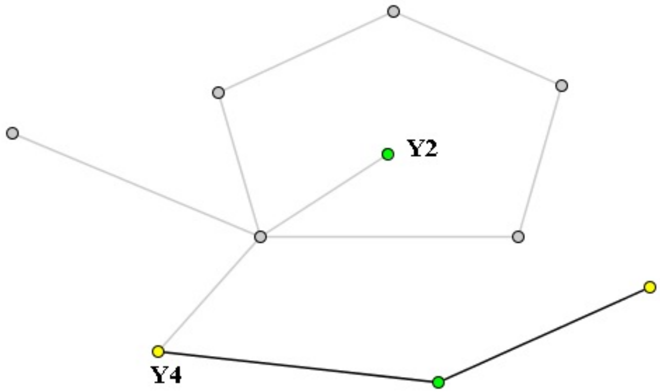
Se houver um caminho, não podemos mudar as cores.

Exemplo:



Vamos analisar o subgrafo $G_{2,4}$.

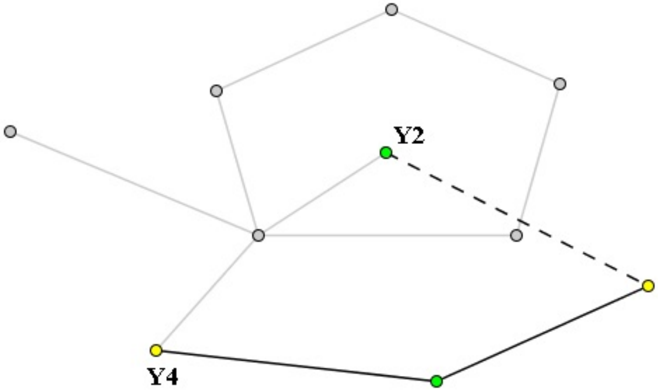
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

Temos que $G_{2,4}$ não apresenta caminho entre y_2 e y_4, pois se houvesse caminho não seria um grafo planar, como mostra a figura abaixo:

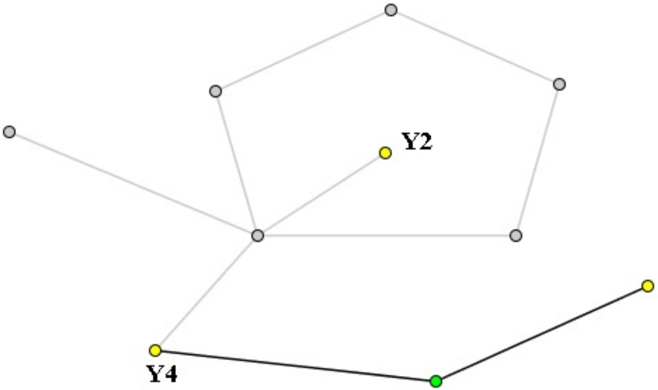
Exemplo:



Prova do Teorema das Cinco Cores

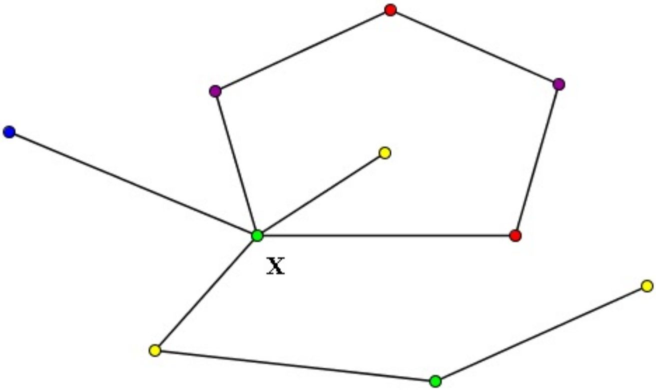
Dessa forma, podemos mudar a cor 2 para a cor 4.

Exemplo:



Com a cor restante (cor 2) podemos colorir o vértice x.

Exemplo:



Fim

Obrigado!