Razão Cruzada e Schwarziana

Ali Tahzibi
ICMC-USP

Sure thing! Here's a joke about Stokes' theorem: Why did the mathematician break up with the physicist?

Sure thing! Here's a joke about Stokes' theorem: Why did the mathematician break up with the physicist?

Because they couldn't handle the curl of their relationship!

Sure thing! Here's a joke about Stokes' theorem: Why did the mathematician break up with the physicist?

Because they couldn't handle the curl of their relationship!

Schwarziana é um gênero de
abelha sem ferrão presente
Na América do sul, mais
específicamente no Brasil,
Argentina e Paraguai.

Schwarziana é um gênero de abelha sem ferrão presente Na América do sul, mais específicamente no Brasil, Argentina e Paraguai.

$$Sf := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

Razão Cruzada

- Coentro

Razão Cruzada

$$r(A,B,C,D) = \frac{AC.BD}{BC.AD}$$

- Coentro

Razão Cruzada

$$r(A,B,C,D) = \frac{AC.BD}{BC.AD}$$

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}$$

- Coentro

Razão Cruzada

$$r(A,B,C,D) = \frac{AC.BD}{BC.AD}$$

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}$$

$$\frac{AD.BC}{CD.AA}$$

- Coentro

Razão Cruzada

$$r(A, B, C, D) = \frac{AC.BD}{BC.AD}$$

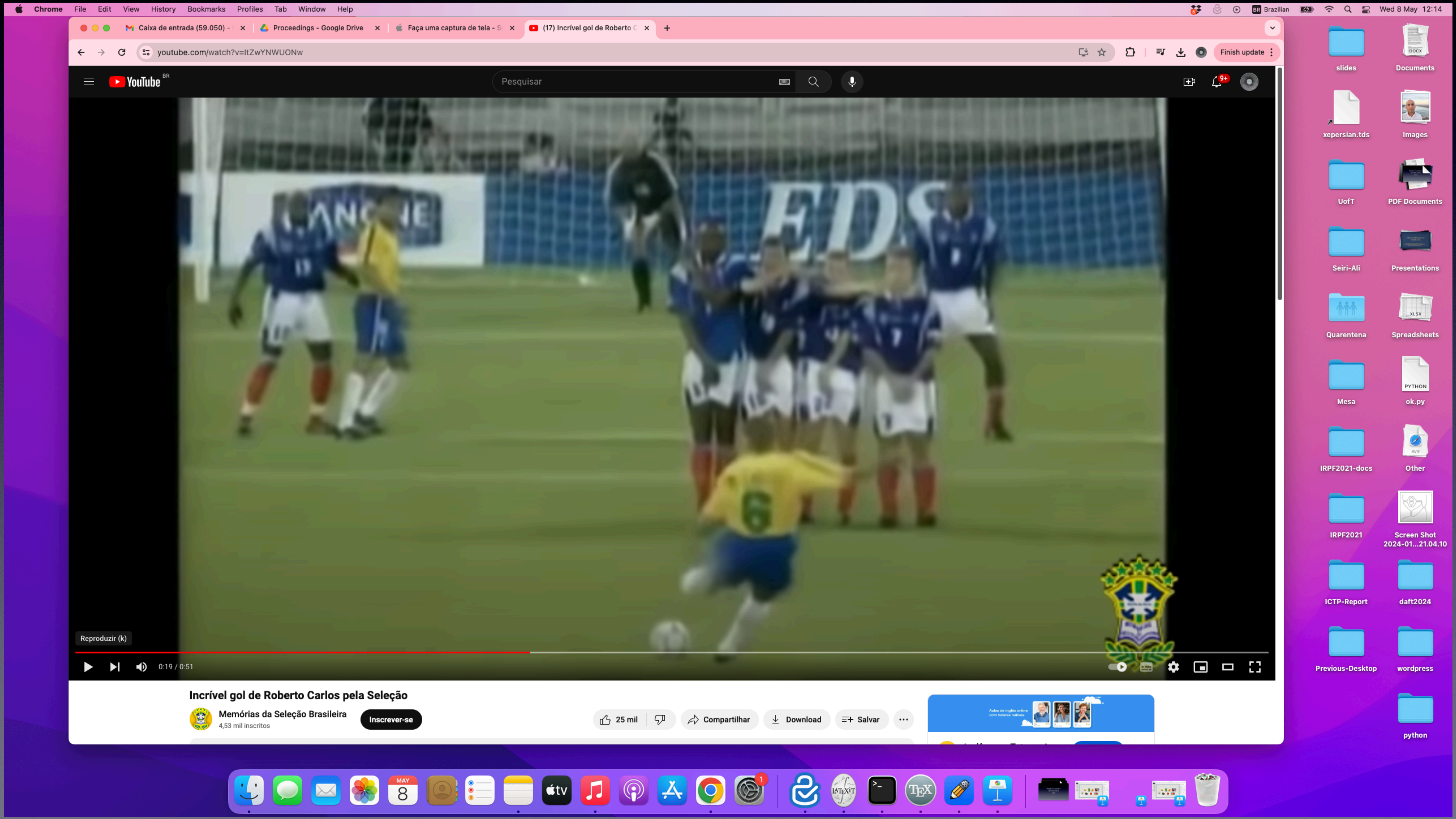
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}$$

$$\frac{AD.BC}{CD.AA}$$

• • •

- Coentro

Gol do RC


Chrome File Edit View History Bookmarks Profiles Tab Window Help
Wed 8 May 12:14
Caixa de entrada (59.050)
Proceedings - Google Drive
Faça uma captura de tela
(17) Incrível gol de Roberto
youtube.com/watch?v=ItZwYNWUONw
Finish update
Pesquisar
Reproduzir (k)
0:19 / 0:51
Incrível gol de Roberto Carlos pela Seleção
Memórias da Seleção Brasileira
4,53 mil inscritos
Inscrever-se
25 mil
Compartilhar
Download
Salvar
slides
Documents
xepersian.tds
Images
UofT
PDF Documents
Seiri-Ali
Presentations
Quarentena
Spreadsheets
Mesa
ok.py
IRPF2021-docs
Other
IRPF2021
Screen Shot 2024-01...21.04.10
ICTP-Report
daft2024
Previous-Desktop
wordpress
python

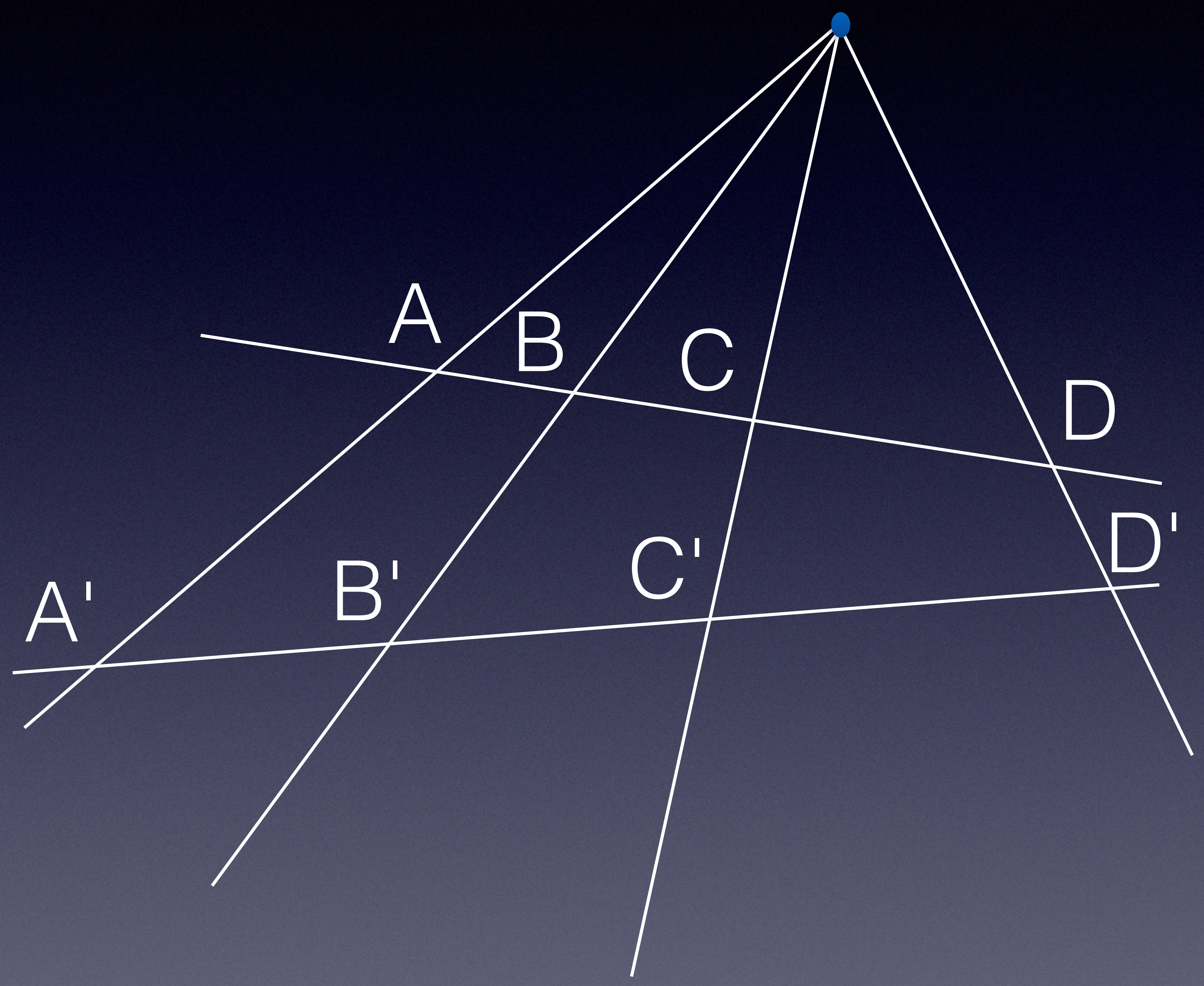
Razão Cruzada

- Razão (simples)

$$(A, B; C) = \frac{AC}{BC}$$

- Razão Cruzada

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B; C)}{A, B; D} = \frac{AC.BD}{BC.AD}$$



$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Permutações

$$r = (A,B;C,D) = (B,A;D,C) = (D,C;B,A) = (C,D;A,B)$$

$$(A,B;D,C) = \frac{1}{r}$$

$$(A,C;B,D) = 1 - r$$

$$(A,D;C,B) = \frac{r}{r-1}$$

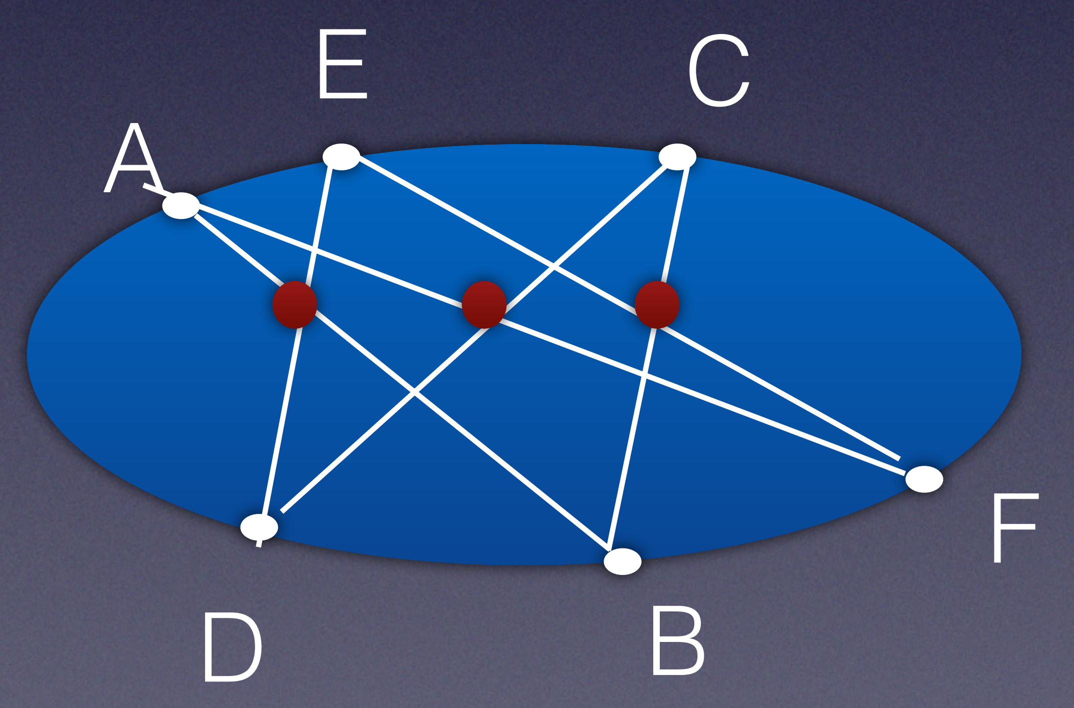
$$(A,C;D,B) = \frac{1}{1-r}$$

$$(A,D;B,C) = \frac{r-1}{r}$$

Seções cônicas

- A,B,C, D pontos numa seção cônica, (EA,EB,EC,ED) independe de E na seção.

- Teorema de Pascal



Möbius

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0$$

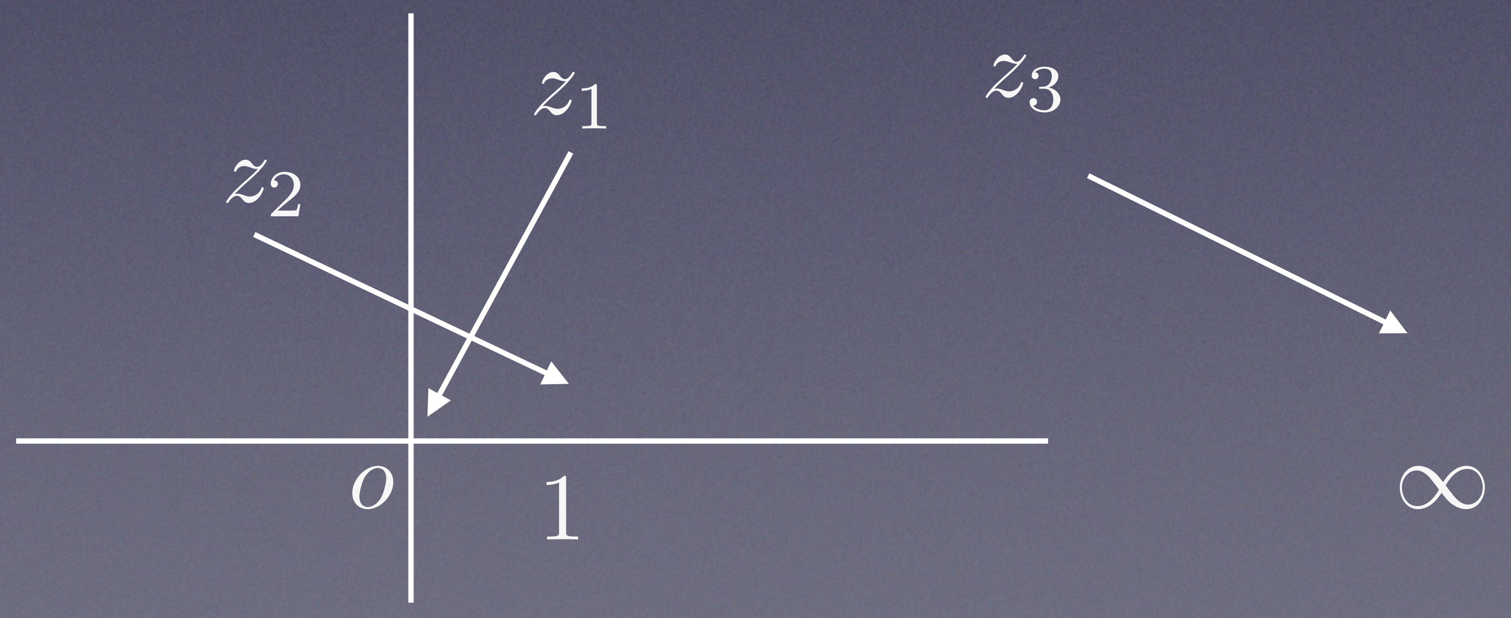
f preserva razão cruzada

Se f fixar 3 pontos na esfera de Riemann, então f=Id

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}$$

$(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$

Duas triplas na espera de Riemann, então existe única Möbius que $f(z_i) = w_i$



$h(z) := [z_1, z_2, z, z_3], g(z) = [w_1, w_2, z, w_3]$

$g^{-1} \circ h(z_i) = w_i$

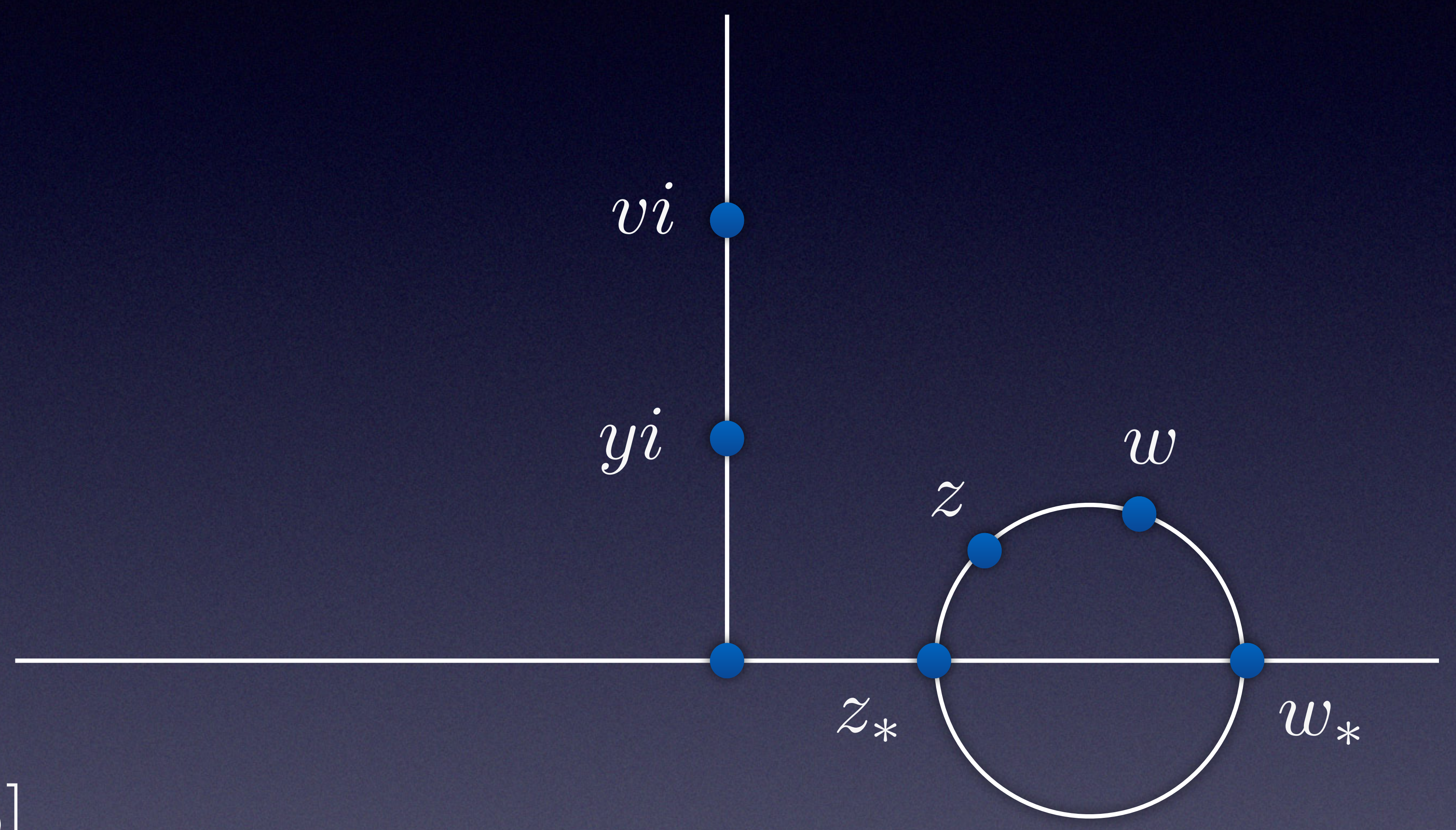
Modelo de Poincaré, Geometria hiperbólica

$[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é real, se somente se, os pontos pertencem a um círculo ou reta

$$H := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$$

$$ds = \frac{|dz|}{Im(z)}$$

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0$$



$$\rho(z, w) = \rho(g(z), g(w)) = \rho(yi, vi) = \log(\frac{v}{y}) = \log[0, yi, vi, \infty]$$

$$= \log[z_*, z, w, w_*]$$

Schwarzian derivative

$$Sf := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

Schwarziana

$$M(z_0) = f(z_0), M^{'}(z_0) = f^{'}(z_0), M^{''}(z_0) = f^{''}(z_0)$$

$$M^{-1} \circ f(z - z_0) = z_0 + (z - z_0) + \frac{1}{6} a (z - z_0)^3 + \cdots$$

$$a = Sf(z_0)$$

$$f \in C^3 : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$Sf < 0, Sg < 0 \to S(f \circ g) < 0$$

$$Sf < 0 \rightleftarrows Sf^{-1} > 0$$

$$Sf < 0 \rightleftarrows \phi(y) := \frac{1}{\sqrt{|f'(y)|}}$$ Convexo $\phi'' > 0$

$$Sf = 0 \rightleftarrows f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$u''(x) + I(x)u(x) = 0$$

$$u_1, u_2, \phi = \frac{u_1}{u_2}$$

$$I = 1/2S(\phi)$$

Cayley atribui a Schwarz

$$u''(x) + I(x)u(x) = 0$$

$$u_1, u_2, \phi = \frac{u_1}{u_2}$$

$$I = 1/2S(\phi)$$

Cayley atribui a Schwarz

Schwarz atribuiu a Lagrange

$$u^{''}(x) + I(x)u(x) = 0$$

$$u_1, u_2, \phi = \frac{u_1}{u_2}$$

$$I = 1/2S(\phi)$$

Cayley atribui a Schwarz

$$u^{''}(x) + I(x)u(x) = 0$$

$$u_1, u_2, \phi = \frac{u_1}{u_2}$$

$$I = 1/2S(\phi)$$

Schwarz atribuiu a Lagrange

Sylvester leu (Cartes géographiques) mas não achou Schwarziana

Cayley atribui a Schwarz

Schwarz atribuiu a Lagrange

Sylvester leu (Cartes géographiques) mas não achou Schwarziana

$$u^{''}(x) + I(x)u(x) = 0$$

$$u_1, u_2, \phi = \frac{u_1}{u_2}$$

$$I = 1/2S(\phi)$$

Lei de Arnold: As descobertas são raramente atribuídas às pessoas corretas

Cayley atribui a Schwarz

Schwarz atribuiu a Lagrange

Sylvester leu (Cartes géographiques) mas não achou Schwarziana

$$u''(x) + I(x)u(x) = 0$$

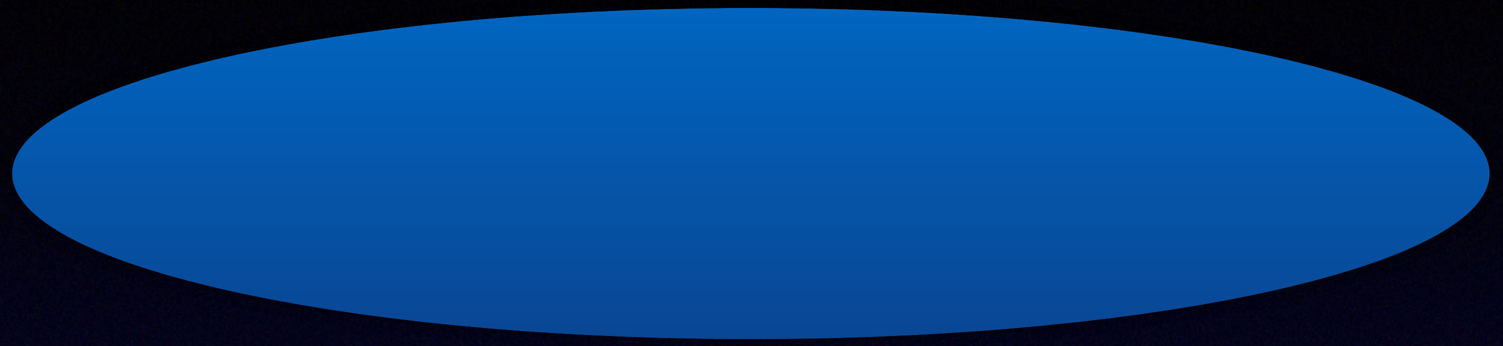
$$u_1, u_2, \phi = \frac{u_1}{u_2}$$

$$I = 1/2S(\phi)$$

Lei de Arnold: As descobertas são raramente atribuídas às pessoas corretas

Michael Berry: Nada jamais é descoberto pela primeira vez

Teorema deos quatro vértices: pelo menos 4 pontos extremo local de curvatura



E.Ghys: Todo difeomorfismo de reta projetiva tem pelo menos 4 pontos onde a Schwarziana se anula, ou seja a função é muito projetiva (3 jato), ou o Möbius osculante coincide até terceiro jato.

Circles osculantes, Teorema de P. Gauthrie Tait, o mesmo de tabela de nós!

E. Ghys: Todo difeomorfismo de reta projetiva tem pelo menos 4 pontos com Schwarziana nula, i.e 4-Mobius osculantes

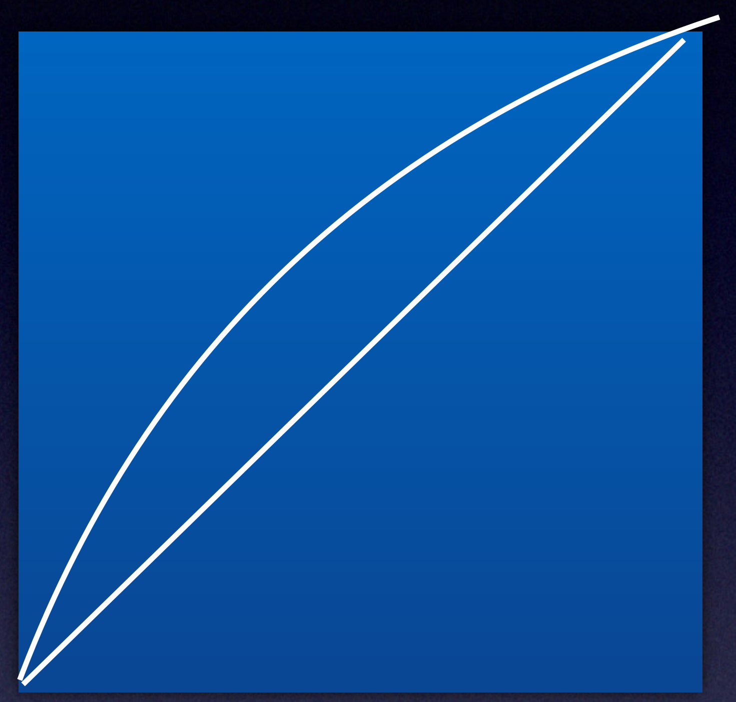
Dinâmica

Schwarziana negativa implica crescimento de razão cruzada

$$[f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)] > [x_1, x_2, x_3, x_4]$$

Lema1. Se Sf<0 tem dois pontos fixos então um é atrator

$f^{'}(0) \geq 1, f^{'}(1) \geq 1$ TVM $\exists y \in (0,1) : f^{'}(y) = 1$



$f^{'}$ Tem minimo local e então $\phi = \frac{1}{\sqrt{f^{'}}}$ Tem max local

Lema 2. Se tiver 3 pontos fixos, o do meio é repulsor. Nunca tem 4 fixos.

$0 < \beta < 1, f(0) = 0, f(\beta) = \beta, f(1) = 1$

$f^{'}(y_1) = f^{'}(y_2) = 1$

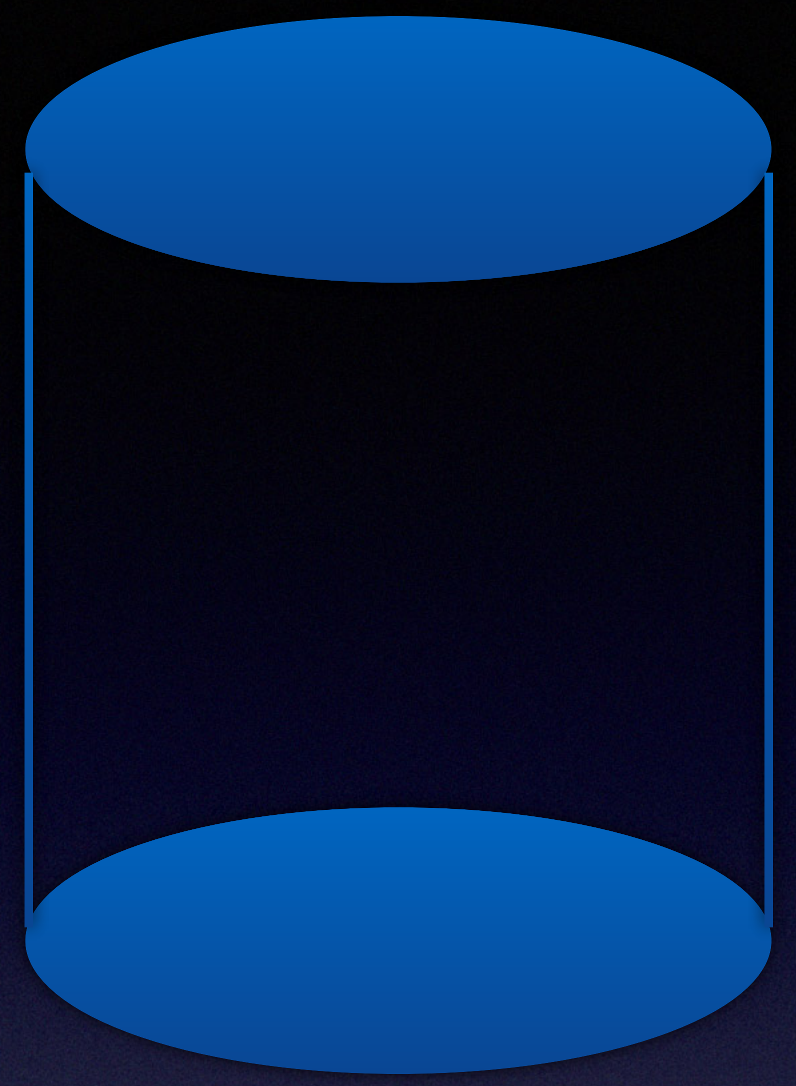
Se $f^{'}(\beta) \leq 1$ $\longrightarrow$ $f^{'}$ Tem minimo local

Conclua também que não tem quarto ponto fixo!

$$\frac{(f(y_2) - y_0)(y_3 - y_1)}{(y_1 - y_0)(y_3 - f(y_2))} > \frac{(y_2 - y_0)(y_3 - y_1)}{(y_1 - y_0)(y_3 - y_2)}$$

$Sf < 0 \rightarrow f^{'}(0)f^{'}(1) < 1$

F um difeomorfismo de intervalo preservando orientação



$$f_x(0) = 0, f_x(1) = 1$$

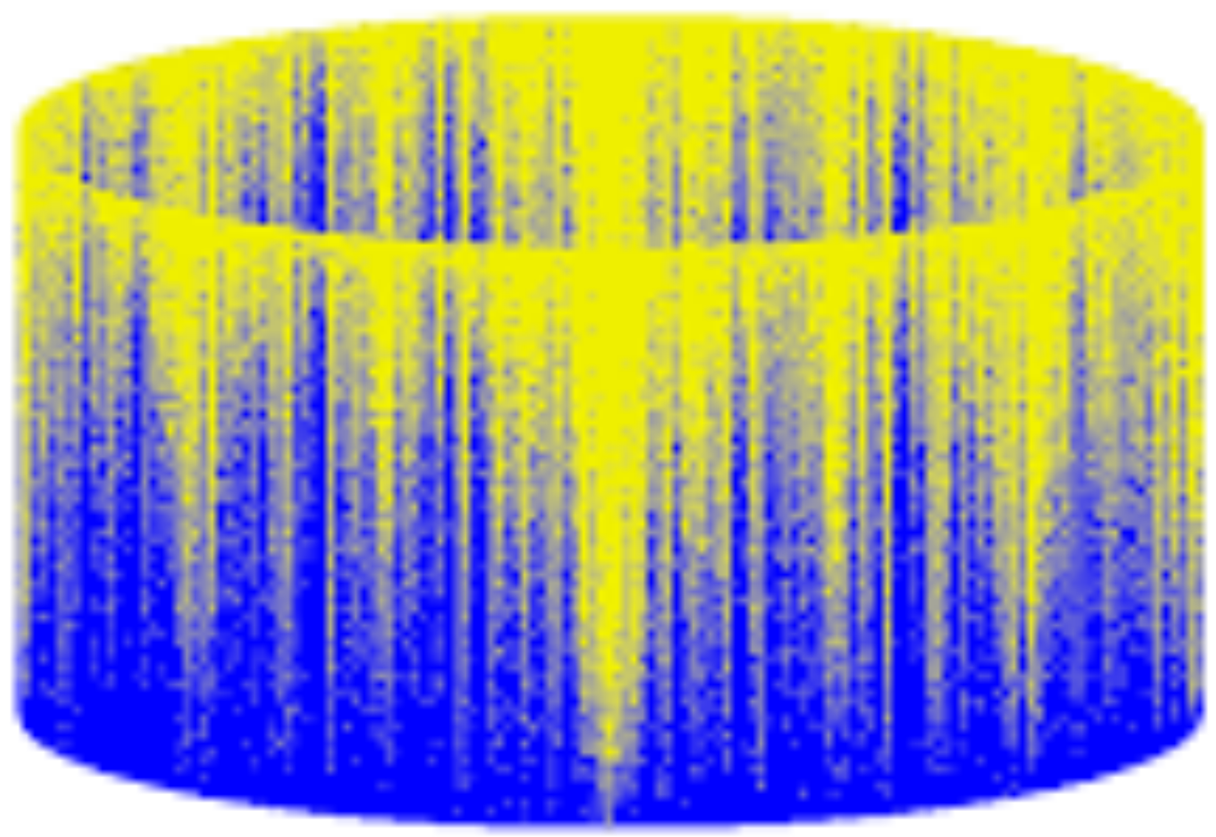
$$Sf_x < 0$$

Existe uma função mensurável cujo gráfico separa as bacias (medidas físicas)

$$F(x, y) = (3x, f_x(y))$$

As medidas empíricas convergem

$$e_n(x, y) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(x,y)}$$



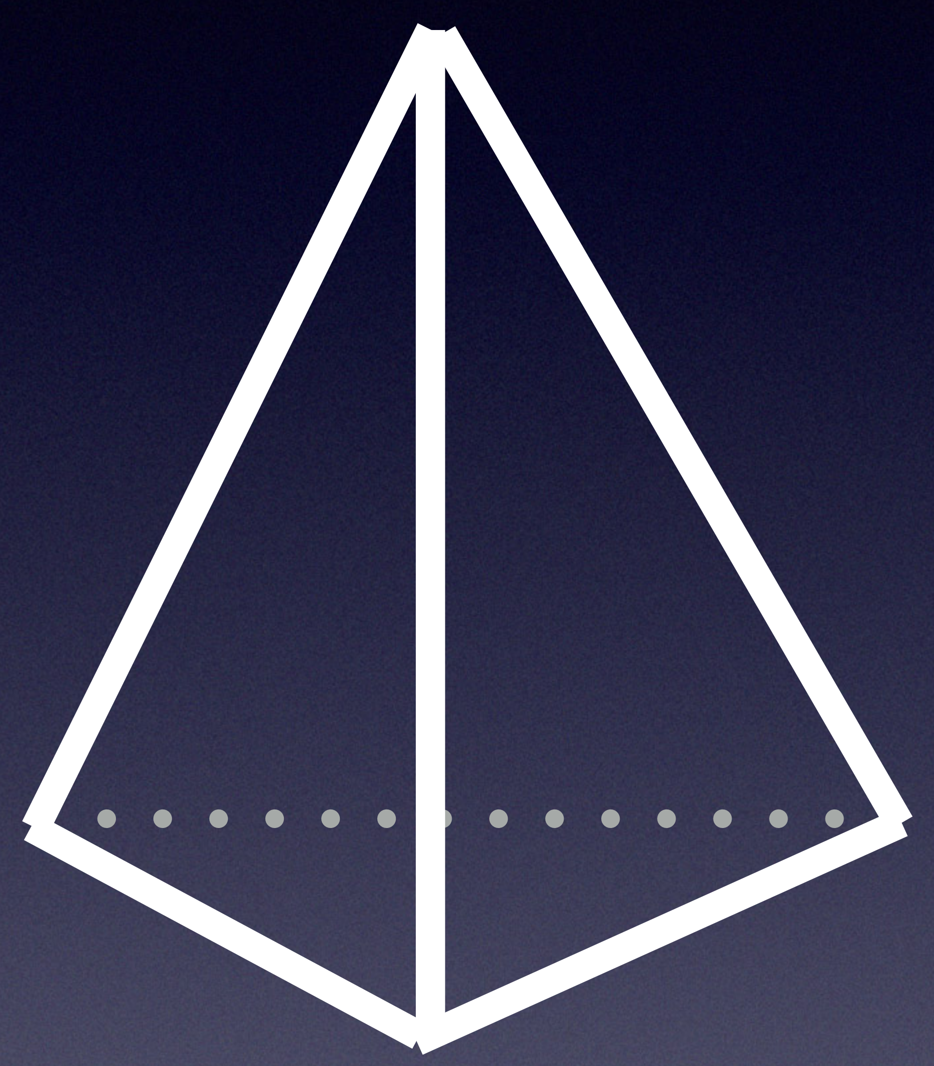
Schwarziana nula, implica passeio aleatório e comportamento histórico

$$e_n(x,y) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{F^j(x,y)}$$

Para um conjunto de medida Lebesgue total, as medidas empíricas não convergem

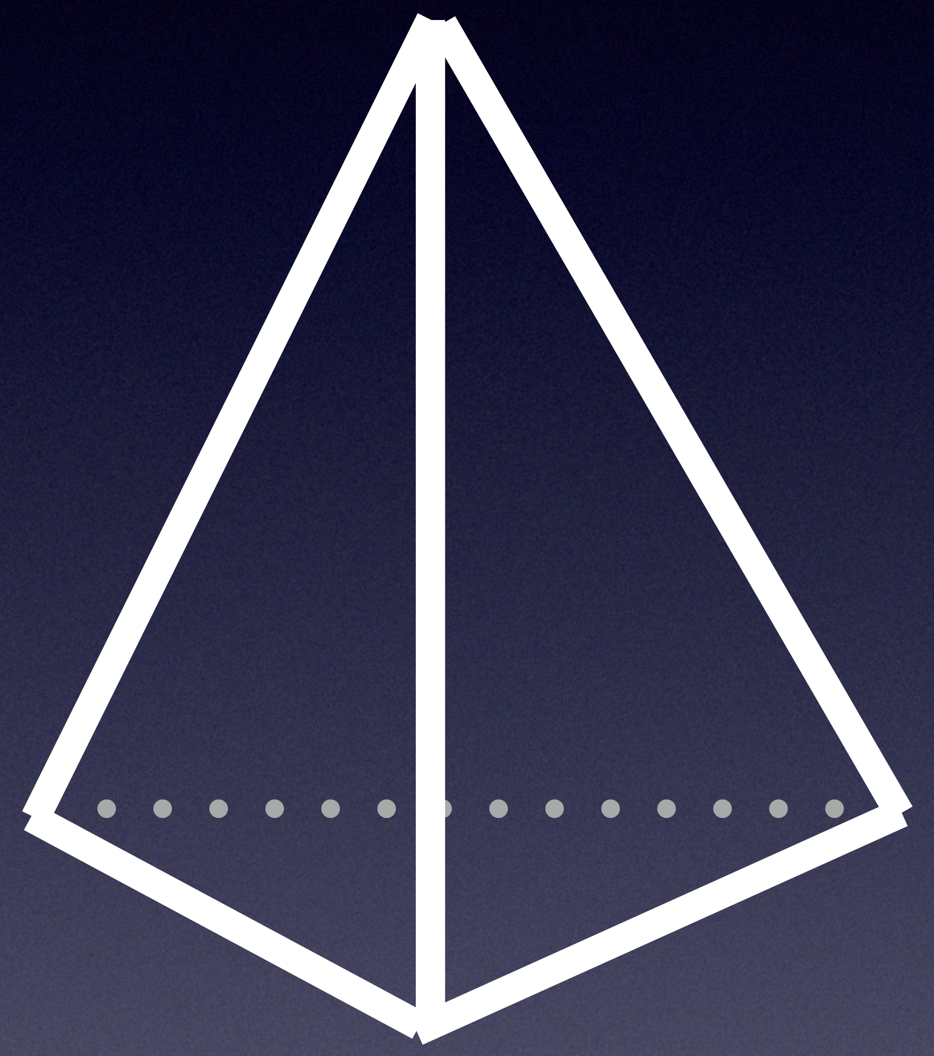
P_i Perimetro da face i

Ω_i Ângulo oposto a face i



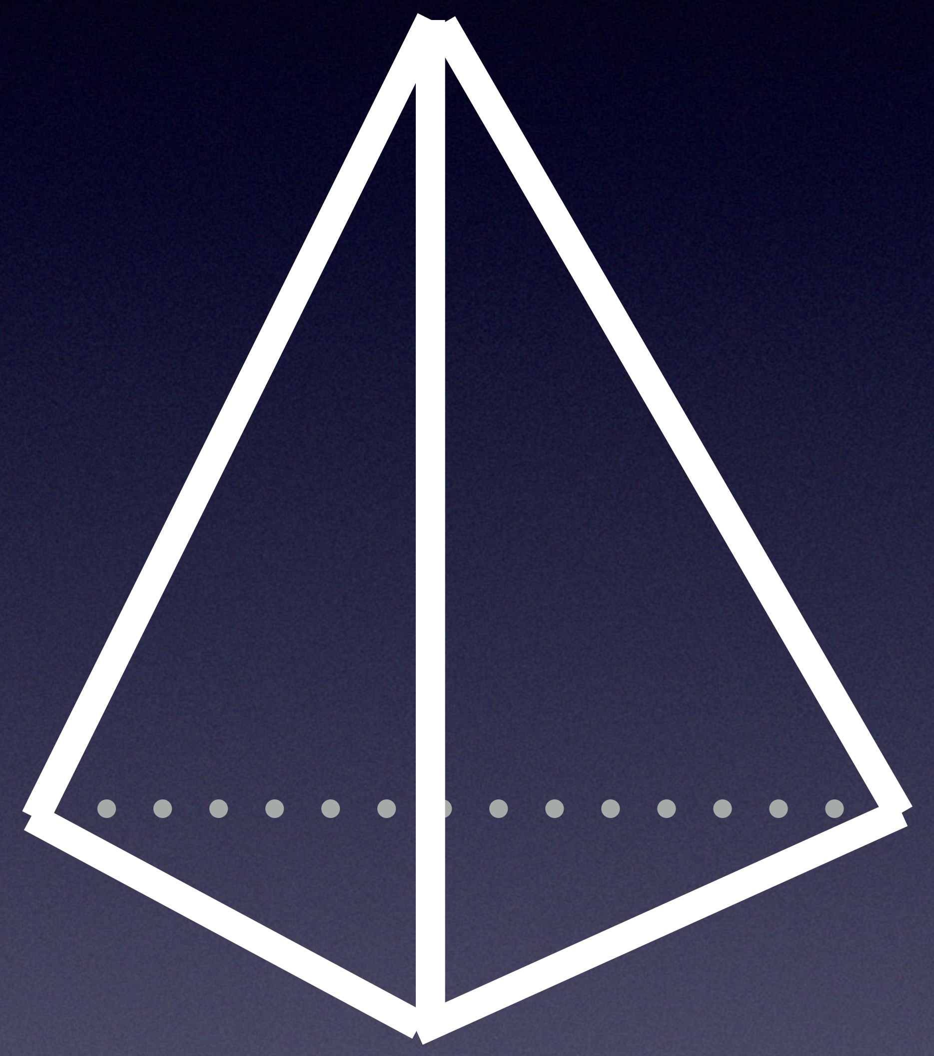
P_i Perimetro da face i

Ω_i Ângulo oposto a face i



P_i Perimetro da face i

Ω_i Ângulo oposto a face i



$$[e^{i\Omega_1}, e^{i\Omega_2}, e^{i\Omega_3}, e^{i\Omega_4}] = [P_1, P_2, P_3, P_4]$$

D. Rudenko (Inventione 2022)

Cross ratio and Schwarzian derivative walk into a bar. The bartender says, "Sorry, we don't serve your type here."

Cross ratio and Schwarzian derivative walk into a bar. The bartender says, "Sorry, we don't serve your type here."

So they replied, "That's fine, we'll just go find a conformal mapping to another pub!"