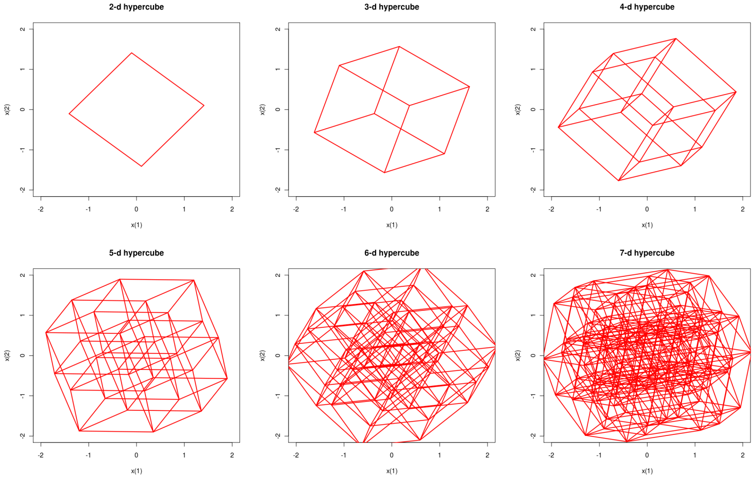
Muito Além de 3 Dimensões

Luciano Rocha

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

São Carlos, 2017

Perdendo a intuição



- Exemplos de Espaços Vetoriais: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$
- Dimensão: Cardinalidade da base.
- Número de parâmetros necessários para distinguir pontos no espaço vetorial.

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$
  Logo $dim\mathbb{R}^n = n$

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$
  Logo $dim\mathbb{R}^n = n$
- Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$
  Então $dimV = 1$

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$
  Logo $dim\mathbb{R}^n = n$
- Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$
  Então $dimV = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t.
  Por exemplo, $1 + 2t = (1, 2, ..., 0, ...) \in V[t]$ e
  $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7, 0, 0, 4, 0, ..., 0, ...) \in V[t]$

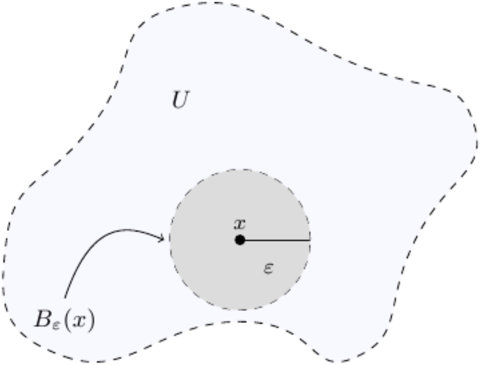
Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$
  Logo $dim\mathbb{R}^n = n$
- Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$
  Então $dimV = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t.
  Por exemplo, $1 + 2t = (1, 2, ..., 0, ...) \in V[t]$ e
  $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7, 0, 0, 4, 0, ..., 0, ...) \in V[t]$
  Temos $dimV[t] = \infty$

Conjuntos abertos

"Definição"

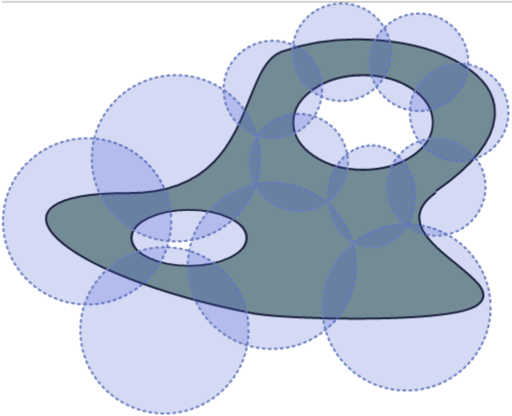
Conjuntos aonde todo ponto "cabe com folga". Ou seja, dado um ponto x no conjunto, existe uma bola com centro em x inteiramente contida no conjunto. Em R, os abertos são os intervalos abertos e união de intervalos abertos.



Cobertura por abertos de X

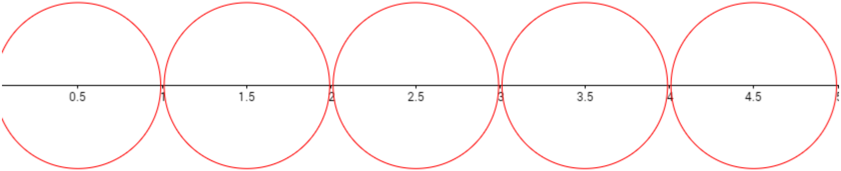
Definição

Família de conjuntos abertos que contém X.



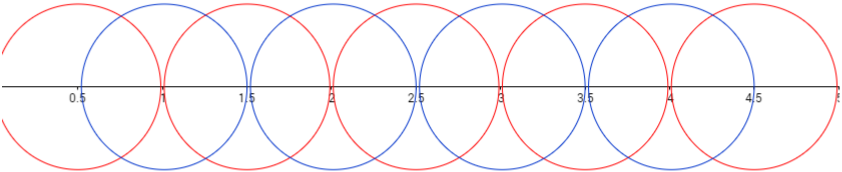
Exemplo de cobertura por abertos

- Considere $X = \mathbb{R}$
- Seja $F = \{(a, a+1); \forall a \in \mathbb{Z}\}$ e $G = \{(b+\frac{1}{2}, b+\frac{3}{2}); \forall b \in \mathbb{Z}\}$
- Então $U = F \cup G$ é cobertura de X



Exemplo de cobertura por abertos

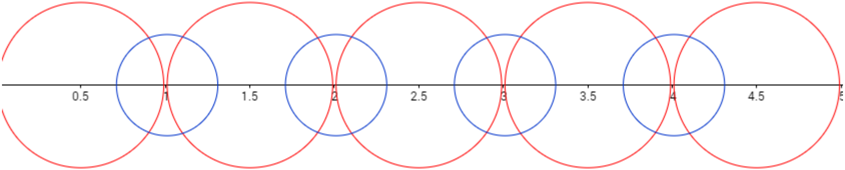
- Considere $X = \mathbb{R}$
- Seja $F = \{(a, a+1); \forall a \in \mathbb{Z}\}$ e $G = \{(b+\frac{1}{2}, b+\frac{3}{2}); \forall b \in \mathbb{Z}\}$
- Então $U = F \cup G$ é cobertura de X



Dimensão topológica

Definição

Refinamento de uma cobertura: Um refinamento de uma cobertura de um espaço X uma nova cobertura do mesmo espaço tal que cada conjunto da nova cobertura um subconjunto de algum elemento da antiga cobertura



Dimensão topológica

Definição

Ordem de uma cobertura: Número máximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Dimensão topológica

Definição

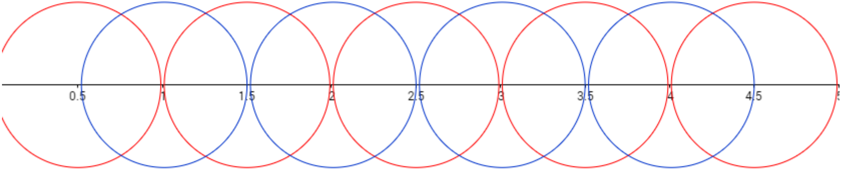
Ordem de uma cobertura: Número máximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definição

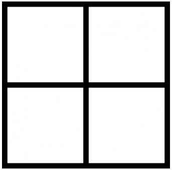
Dimensão topológica de X: Seja X subconjunto de um espaço topológico. Suponha que exista um natural n tal que toda cobertura aberta C de X possui um refinamento C' de ordem $n+1$. Se n é o menor natural com essa propriedade, então $dim_T(X) = n$. Se tal n não existir, diremos que X possui dimensão infinita.

Exemplo: Dimensão de R

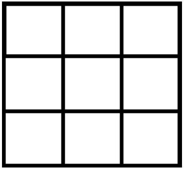
- Considere $X = \mathbb{R}$ com a cobertura definida anteriormente
- Ordem $= 2$
- $Dim_T \mathbb{R} = 1$



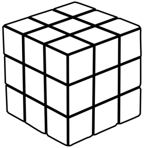
Dimensão de auto-similaridade



lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{2}$
$s^{-2} = 2^2$ quadrados



lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
$s^{-2} = 3^2$ quadrados



lado original: 1
lado menor:$s = \frac{1}{3}$
$s^{-3} = 3^3$ cubos

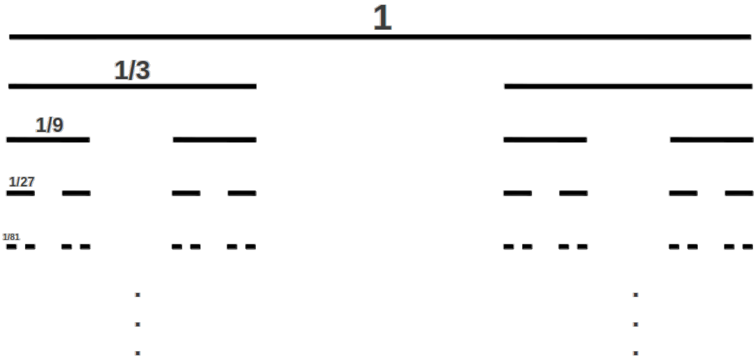
Dimensão de auto-similaridade

Definição

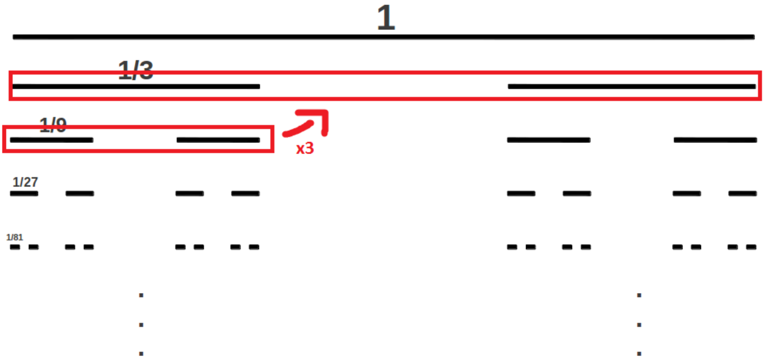
Em geral: Se um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ pode ser dividido em um numero finito $N(s)$ de subconjuntos, todos congruentes, reescalado por um fator linear s, então a dimensão de auto-similaridade de X é o único d que satisfaz $N(s) = s^{-d}$.

$$\text{Ou seja, } d = \frac{log(N(s))}{log(\frac{1}{s})}$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)



Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)



Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

- $s = \dfrac{1}{3}$

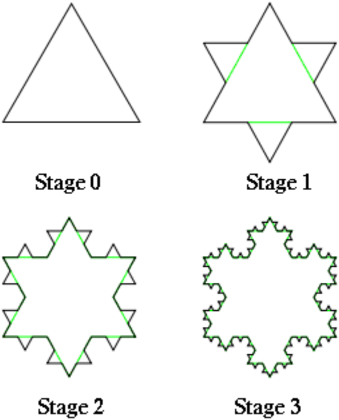
Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

- $s = \dfrac{1}{3}$
- $N(s) = 2$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

- $s = \dfrac{1}{3}$
- $N(s) = 2$
- Queremos d tal que $3^d = 2$ logo $d = \dfrac{log(2)}{log(3)} \approx 0.63092975...$

Dimensão de auto-similaridade (Koch Snowflake)



$$d = \frac{log(4)}{log(3)} \approx 1.2618$$

Box-counting dimension

A fim de expandir para conjuntos mais gerais, definimos a Box-counting dimension:

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $N(\delta, X)$ o número mínimo de bolas de tamanho no máximo δ que cobrem X. Então

$$dim_B X = \lim_{\delta \to 0} \frac{log(N(\delta, X))}{log \frac{1}{\delta}}$$

Box-counting Dimension (computando)

- Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado
- Particione $\mathbb{R}^n$ em cubos de lado δ
- Seja $N(\delta, X)$ o número de cubos que intersecta X
- $d = \lim_{\delta \to 0} \dfrac{log(N(\delta, X))}{log \frac{1}{\delta}}$

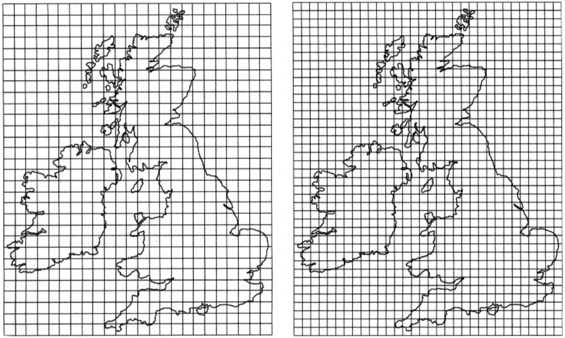


Figure 4.32 : Count all boxes that intersect (or even touch) the coastline of Great Britain, including Ireland.

Box-counting Dimension (computando)

- Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado
- Particione $\mathbb{R}^n$ em cubos de lado δ
- Seja $N(\delta, X)$ o número de cubos que intersecta X
- $d = \lim_{\delta \to 0} \dfrac{log(N(\delta, X))}{log \frac{1}{\delta}}$

Para δ entre $20m$ e $200km$, $d \approx 1.21$

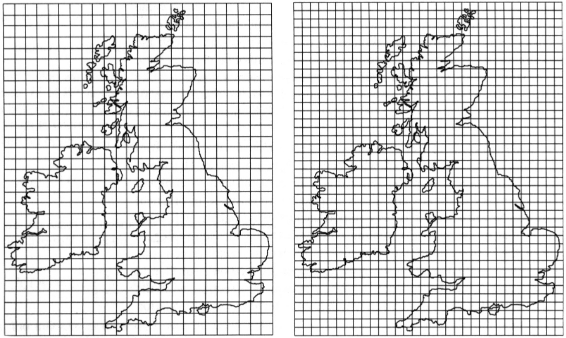


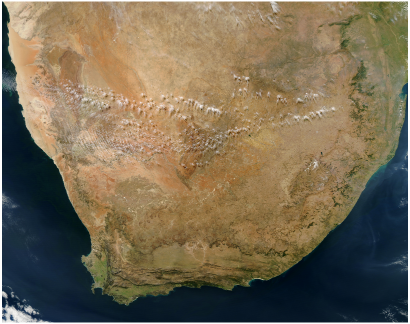
Figure 4.32 : Count all boxes that intersect (or even touch) the coastline of Great Britain, including Ireland.

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

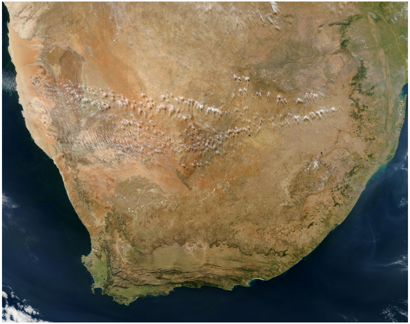
Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:



Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

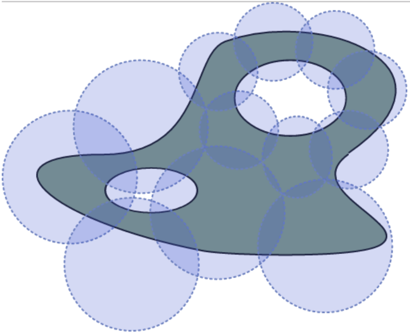



$d \approx 1.02$

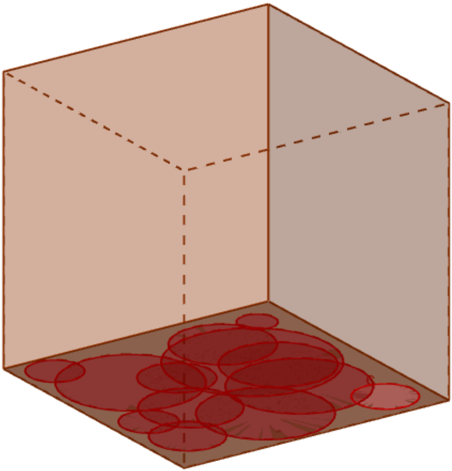
Medida de Hausdorff

Definição

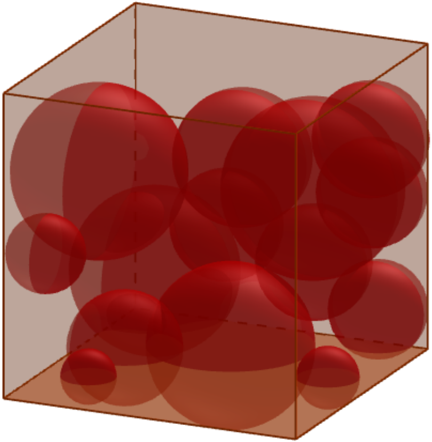
Seja $d > 0$ e $X \subset (Y, \rho)$ um espaço métrico. A medida d-dimensional de Hausdorff é definida por
$\mu_d(X) = \lim_{\epsilon \to 0} inf_{U_i} \sum_i (diam(U_i))^d$
Aonde U_i é cobertura por abertos de X com diâmetro menor que ϵ.



Medida de Hausdorff



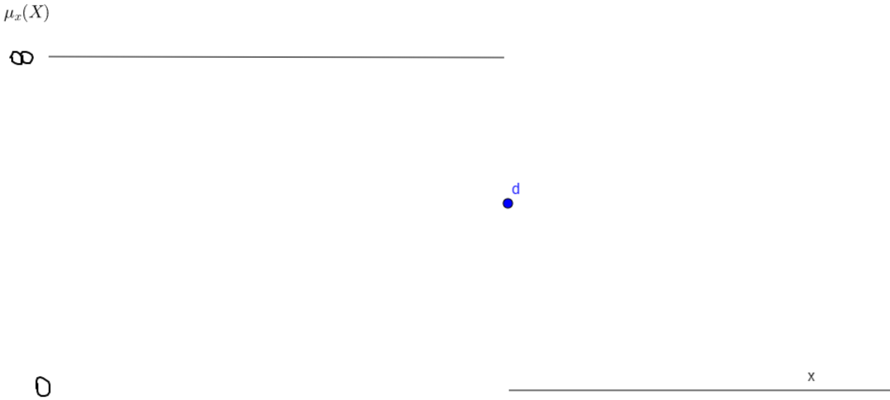
Medida de Hausdorff



Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $\mu_d(X) < \infty$, então $\mu_{d'}(X) = 0$ e, se $\mu_{d'}(X) > 0$, então $\mu_d(X) = \infty$.



Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $\mu_d(X) < \infty$, então $\mu_{d'}(X) = 0$ e, se $\mu_{d'}(X) > 0$, então $\mu_d(X) = \infty$.

Dem.: Se $\mu_d(X) < \infty$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $X \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j, diam(B_j) \leq \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^d \leq \mu_d(X) + 1$$

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $\mu_d(X) < \infty$, então $\mu_{d'}(X) = 0$ e, se $\mu_{d'}(X) > 0$, então $\mu_d(X) = \infty$.

Dem.: Se $\mu_d(X) < \infty$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $X \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $diam(B_j) \leq \delta$, e

$$\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^d \leq \mu_d(X) + 1$$

Se $d' > d$,

$$(diam(B_j))^{d'-d} \leq \delta^{d'-d} \Rightarrow (diam(B_j))^{d'} \leq \delta^{d'-d}(diam(B_j))^d$$

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $\mu_d(X) < \infty$, então $\mu_{d'}(X) = 0$ e, se $\mu_{d'}(X) > 0$, então $\mu_d(X) = \infty$.

Dem.: Se $\mu_d(X) < \infty$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $X \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $diam(B_j) \leq \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^d \leq \mu_d(X) + 1$$

Se $d' > d$,

$$(diam(B_j))^{d'-d} \leq \delta^{d'-d} \Rightarrow (diam(B_j))^{d'} \leq \delta^{d'-d}(diam(B_j))^d$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^{d'} \leq \delta^{d'-d}\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^d \leq \delta^{d'-d}[\mu_d(X) + 1]$$

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $\mu_d(X) < \infty$, então $\mu_{d'}(X) = 0$ e, se $\mu_{d'}(X) > 0$, então $\mu_d(X) = \infty$.

Dem.: Se $\mu_d(X) < \infty$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $X \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, $diam(B_j) \leq \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^d \leq \mu_d(X) + 1$$

Se $d' > d$,

$$(diam(B_j))^{d'-d} \leq \delta^{d'-d} \Rightarrow (diam(B_j))^{d'} \leq \delta^{d'-d}(diam(B_j))^d$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^{d'} \leq \delta^{d'-d}\sum_{j=1}^{\infty}(diam(B_j))^d \leq \delta^{d'-d}[\mu_d(X) + 1]$$

Logo $\mu_\delta^{d'}(X) \leq \delta^{d'-d}[\mu_d(X) + 1] \overset{\delta\to 0}{\to} 0$ e

$$\mu^{d'}(X) = 0$$

Definição

Seja $X \subset (Y, \rho)$. Definimos $Dim_H(X)$ como o único $d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ tal que $\mu_{d'}(X) = 0$ se $d' > d$ e $\mu_{d'}(X) = \infty$ se $d > d'$.

Proposição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, então $Dim_T(X) \leq Dim_H(X) \leq Dim_B(X)$

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, então $Dim_T(X) \leq Dim_H(X) \leq Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, então $Dim_T(X) \leq Dim_H(X) \leq Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, então $Dim_T(X) \leq Dim_H(X) \leq Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Existem conjuntos X tal que $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \infty$

Referências Bibliográficas I

K. Falconer.
Fractal Geometry.

A. N. Carvalho.
Sistemas dinâmicos não-lineares.

D. Schleicher.
Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises.