A Hora do Pesadelo: Horrores de um mundo sem escolha

Rodrigo R. Dias

UFABC

Seminário de Coisas Legais, 13/03/20

O **Axioma da Escolha** é a seguinte ingênua afirmação:

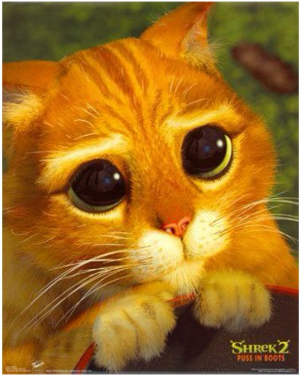
O Axioma da Escolha

O **Axioma da Escolha** é a seguinte ingênua afirmação:

> *Se* $\langle X_i : i \in I \rangle$ *é uma família indexada não vazia de conjuntos não vazios, então* $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

O **Axioma da Escolha** é a seguinte ingênua afirmação:

> *Se $\langle X_i : i \in I \rangle$ é uma família indexada não vazia de conjuntos não vazios, então $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.*



No entanto, o Axioma da Escolha conduz a certas coisas nada intuitivas...

No entanto, o Axioma da Escolha conduz a certas coisas nada intuitivas...

Teorema (Banach–Tarski 1924)

O Axioma da Escolha implica que, no espaço euclidiano tridimensional, é possível particionar uma esfera numa quantidade **finita** de pedaços e montar esses pedaços novamente (aplicando translações e rotações a eles) de modo a formar **duas esferas idênticas à original**.

No entanto, o Axioma da Escolha conduz a certas coisas nada intuitivas...

Teorema (Banach–Tarski 1924)

O Axioma da Escolha implica que, no espaço euclidiano tridimensional, é possível particionar uma esfera numa quantidade **finita** de pedaços e montar esses pedaços novamente (aplicando translações e rotações a eles) de modo a formar **duas esferas idênticas à original**.

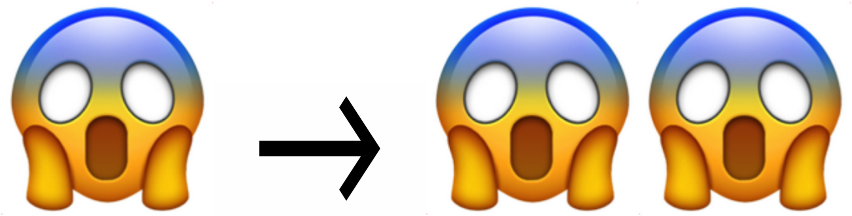
O Axioma da Escolha

Uma consequência nada ingênua

No entanto, o Axioma da Escolha conduz a certas coisas nada intuitivas...

Teorema (Banach–Tarski 1924)

O Axioma da Escolha implica que, no espaço euclidiano tridimensional, é possível particionar uma esfera numa quantidade **finita** de pedaços e montar esses pedaços novamente (aplicando translações e rotações a eles) de modo a formar **duas esferas idênticas à original**.



O Axioma da Escolha

O Paradoxo de Banach–Tarski

Mas como isso é possível? 🤔

Mas como isso é possível? 

O negócio é que a pergunta correta aqui seria:

Mas como isso é possível? 

O negócio é que a pergunta correta aqui seria:

— *Por que não poderia ser possível?*

O Paradoxo de Banach–Tarski contraria o "senso comum" porque afirma que conseguimos dividir um conjunto numa quantidade finita de peças e montá-las novamente de modo a conseguir um outro conjunto que tem *o dobro do volume* do conjunto inicial.

O Paradoxo de Banach–Tarski contraria o "senso comum" porque afirma que conseguimos dividir um conjunto numa quantidade finita de peças e montá-las novamente de modo a conseguir um outro conjunto que tem *o dobro do volume* do conjunto inicial.

O Paradoxo de Banach–Tarski contraria o "senso comum" porque afirma que conseguimos dividir um conjunto numa quantidade finita de peças e montá-las novamente de modo a conseguir um outro conjunto que tem *o dobro do volume* do conjunto inicial.
Isso parece impossível porque, se as peças foram apenas transladadas e rotacionadas, o volume delas não deveria mudar — e, portanto, a soma desses volumes também não!

O Paradoxo de Banach–Tarski contraria o “senso comum” porque afirma que conseguimos dividir um conjunto numa quantidade finita de peças e montá-las novamente de modo a conseguir um outro conjunto que tem *o dobro do volume* do conjunto inicial.
Isso parece impossível porque, se as peças foram apenas transladadas e rotacionadas, o volume delas não deveria mudar — e, portanto, a soma desses volumes também não! (... Certo?)

O Paradoxo de Banach–Tarski contraria o "senso comum" porque afirma que conseguimos dividir um conjunto numa quantidade finita de peças e montá-las novamente de modo a conseguir um outro conjunto que tem *o dobro do volume* do conjunto inicial.
Isso parece impossível porque, se as peças foram apenas transladadas e rotacionadas, o volume delas não deveria mudar — e, portanto, a soma desses volumes também não! (... Certo?)

Acontece que...

Teorema (Vitali 1905)

O Axioma da Escolha *(sempre ele!)* implica que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são *mensuráveis*.

Teorema (Vitali 1905)

O Axioma da Escolha *(sempre ele!)* implica que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são *mensuráveis*.

O que isso significa?

Teorema (Vitali 1905)

O Axioma da Escolha *(sempre ele!)* implica que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são *mensuráveis*.

O que isso significa?

Por exemplo:

Teorema (Vitali 1905)

O Axioma da Escolha *(sempre ele!)* implica que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são *mensuráveis*.

O que isso significa?

Por exemplo:

- Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não possuem *comprimento*.

Teorema (Vitali 1905)

O Axioma da Escolha *(sempre ele!)* implica que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são *mensuráveis*.

O que isso significa?

Por exemplo:

- Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não possuem *comprimento*.
- Existem subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que não possuem *área*.

Teorema (Vitali 1905)

O Axioma da Escolha *(sempre ele!)* implica que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não são *mensuráveis*.

O que isso significa?

Por exemplo:

- Existem subconjuntos de $\mathbb{R}$ que não possuem *comprimento*.
- Existem subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que não possuem *área*.
- Existem subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que não possuem *volume*.

Se todas as peças obtidas na partição da esfera dada pelo Paradoxo de Banach–Tarski tivessem um *volume* associado a elas, de fato seria impossível montá-las novamente e obter uma figura com o dobro do volume total inicial!

Se todas as peças obtidas na partição da esfera dada pelo Paradoxo de Banach–Tarski tivessem um *volume* associado a elas, de fato seria impossível montá-las novamente e obter uma figura com o dobro do volume total inicial! (Isso porque as somas dos volumes das peças seria a mesma, tanto antes de particionarmos a esfera quanto depois da remontagem.)

Se todas as peças obtidas na partição da esfera dada pelo Paradoxo de Banach–Tarski tivessem um *volume* associado a elas, de fato seria impossível montá-las novamente e obter uma figura com o dobro do volume total inicial! (Isso porque as somas dos volumes das peças seria a mesma, tanto antes de particionarmos a esfera quanto depois da remontagem.)

O que torna o Paradoxo de Banach–Tarski possível é justamente o fato de que as peças não são conjuntos mensuráveis, ou seja, não é possível atribuir um volume a elas.

Se todas as peças obtidas na partição da esfera dada pelo Paradoxo de Banach–Tarski tivessem um *volume* associado a elas, de fato seria impossível montá-las novamente e obter uma figura com o dobro do volume total inicial! (Isso porque as somas dos volumes das peças seria a mesma, tanto antes de particionarmos a esfera quanto depois da remontagem.)

O que torna o Paradoxo de Banach–Tarski possível é justamente o fato de que as peças não são conjuntos mensuráveis, ou seja, não é possível atribuir um volume a elas. (Então o argumento dado acima não se aplica!)

$$\begin{array}{c}\text{Axioma da Escolha}\\ \downarrow\\ \text{Paradoxo de Banach–Tarski}\\ \downarrow\\ \text{conjuntos não mensuráveis}\end{array}$$

$$\text{Axioma da Escolha}$$
$$\downarrow$$
$$\text{Paradoxo de Banach–Tarski}$$
$$\downarrow$$
$$\text{conjuntos não mensuráveis}$$

Axioma da Escolha

$\downarrow$

Paradoxo de Banach–Tarski

$\downarrow$

conjuntos não mensuráveis

Uma ideia perigosa

E se...

E se...
Não existissem conjuntos não mensuráveis?

Uma ideia perigosa

E se não existissem conjuntos não mensuráveis?

Resposta:

Uma ideia perigosa

E se não existissem conjuntos não mensuráveis?

Resposta:

Coisas muito, **muito** *piores aconteceriam!*

Resposta:
Coisas muito, **muito** *piores aconteceriam!*

Vejamos a seguinte afirmação (que decorre do Axioma da Escolha, aliás):

Vejamos a seguinte afirmação (que decorre do Axioma da Escolha, aliás):

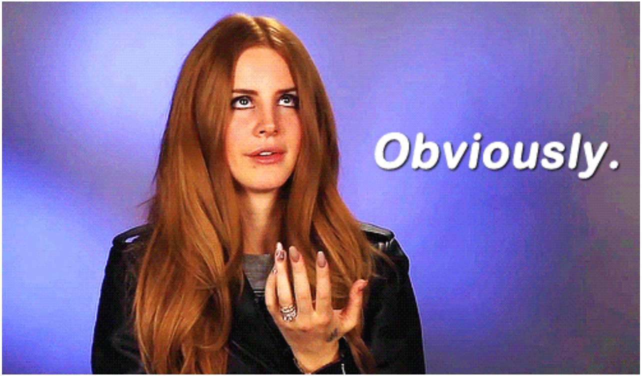
Se um conjunto X é particionado como $X = \dot{\bigcup_{i\in I}} A_i$,

então não ocorre $|I| > |X|$.

Vejamos a seguinte afirmação (que decorre do Axioma da Escolha, aliás):

Se um conjunto X é particionado como $X = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$,

então não ocorre $|I| > |X|$.



Pois bem...

Um teorema de Sierpiński

Pois bem...

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Um teorema de Sierpiński

Pois bem...

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Um teorema de Sierpiński

Pois bem...

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Pois bem...

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{A \in \mathscr{A}}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Considere a seguinte relação binária sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \leftrightarrow$$

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Considere a seguinte relação binária sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{matrix} x, y \in \,]-1, 1[\text{ e } x - y \in \mathbb{Q} \\ \end{matrix}$$

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Considere a seguinte relação binária sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\ \text{ e } \ x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[. \end{cases}$$

Esta é uma *relação de equivalência*!

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Considere a seguinte relação binária sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\text{ e } x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[. \end{cases}$$

Esta é uma *relação de equivalência*!

Seja $\mathscr{A}$ o conjunto de todas as *classes de equivalência* $[x]_\sim$ definidas por $\sim$.

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Considere a seguinte relação binária sobre $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1, 1[\; \text{ e } \; x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1, 1[. \end{cases}$$

Esta é uma *relação de equivalência*!

Seja $\mathscr{A}$ o conjunto de todas as *classes de equivalência* $[x]_\sim$ definidas por $\sim$.

Então $\mathbb{R} = \dot{\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}}} A$.

Um teorema de Sierpiński

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\;\text{ e }\; x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[\end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$$

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\ \text{ e } \ x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[\end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$$

Note que $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{A}|$

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\ \text{ e } \ x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[\end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$$

Note que $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{A}|$, pois, por exemplo, a seguinte função é injetora:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathscr{A} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \{x + 15\}, & \text{se } x \geq 0; \\ \{x - 29\}, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Um teorema de Sierpiński

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\text{ e } x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[\end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$$

Note que $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{A}|$, pois, por exemplo, a seguinte função é injetora:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathscr{A} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \{x+15\}, & \text{se } x \geq 0; \\ \{x-29\}, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Vamos mostrar que $|\mathscr{A}| \not\leq |\mathbb{R}|$

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\; \text{ e } \; x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[\end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$$

Note que $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{A}|$, pois, por exemplo, a seguinte função é injetora:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathscr{A} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \{x+15\}, & \text{se } x \geq 0; \\ \{x-29\}, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Vamos mostrar que $|\mathscr{A}| \not\leq |\mathbb{R}|$ (e, portanto, $|\mathbb{R}| < |\mathscr{A}|$)!

Um teorema de Sierpiński

$$x \sim y \leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \,]-1,1[\ \text{ e } \ x - y \in \mathbb{Q} \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x = y \in \mathbb{R} \setminus \,]-1,1[\end{cases}$$

$$\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$$

Note que $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{A}|$, pois, por exemplo, a seguinte função é injetora:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathscr{A} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \{x+15\}, & \text{se } x \geq 0; \\ \{x-29\}, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Vamos mostrar que $|\mathscr{A}| \not\leq |\mathbb{R}|$ (e, portanto, $|\mathbb{R}| < |\mathscr{A}|$)!
[Isto é: não existe uma função $g : \mathscr{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que seja injetora.]

Um teorema de Sierpiński

Suponha, por absurdo, que exista uma função injetora $g : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$.

Um teorema de Sierpiński

Suponha, por absurdo, que exista uma função injetora $g : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$. Então, como $\mathbb{R}$ é linearmente ordenado (pela ordem usual dos números reais), podemos usar g para definir uma ordem linear $\preccurlyeq$ sobre $\mathscr{A}$.

Suponha, por absurdo, que exista uma função injetora $g : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$. Então, como $\mathbb{R}$ é linearmente ordenado (pela ordem usual dos números reais), podemos usar g para definir uma ordem linear $\preccurlyeq$ sobre $\mathscr{A}$.

Defina, então,

$$X = \{x \in \,]-1,1[\, : [x]_\sim \prec [-x]_\sim\}.$$

Suponha, por absurdo, que exista uma função injetora $g : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$. Então, como $\mathbb{R}$ é linearmente ordenado (pela ordem usual dos números reais), podemos usar g para definir uma ordem linear $\preccurlyeq$ sobre $\mathscr{A}$.

Defina, então,

$$X = \{x \in \,]-1, 1[\, : [x]_\sim \prec [-x]_\sim\}.$$

Por hipótese, X deve ser mensurável!

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

Um teorema de Sierpiński

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.
- Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis e a medida de cada E_n é α_n, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é mensurável e sua medida é menor ou igual a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

Um teorema de Sierpiński

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.
- Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e a medida de cada E_n é α_n, então $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é mensurável e sua medida é igual a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.
- Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e a medida de cada E_n é α_n, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é mensurável e sua medida é igual a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

  (Em particular, a medida de $\mathbb{Q}$ é igual a 0.)

Um teorema de Sierpiński

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.
- Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e a medida de cada E_n é α_n, então $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é mensurável e sua medida é

  igual a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

  (Em particular, a medida de $\mathbb{Q}$ é igual a 0.)
- Se E é um conjunto mensurável e sua medida é α, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com extremos racionais satisfazendo

Um teorema de Sierpiński

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.
- Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e a medida de cada E_n é α_n, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é mensurável e sua medida é igual a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.
  (Em particular, a medida de $\mathbb{Q}$ é igual a 0.)
- Se E é um conjunto mensurável e sua medida é α, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com extremos racionais satisfazendo
  - $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

Um teorema de Sierpiński

Pausa estratégica para mencionar algumas coisas importantes sobre conjuntos mensuráveis:

- A medida de um conjunto mensurável não se altera após uma translação ou uma reflexão.
- Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e a medida de cada E_n é α_n, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é mensurável e sua medida é

  igual a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

  (Em particular, a medida de $\mathbb{Q}$ é igual a 0.)
- Se E é um conjunto mensurável e sua medida é α, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com extremos racionais satisfazendo
  - $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

  e
  - $\alpha \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{comprimento}(I_n) < \alpha + \varepsilon$.

Voltando...

$\preccurlyeq$ ordem linear sobre $\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$

$X = \{x \in \,]-1, 1[\, : [x]_{\sim} \prec [-x]_{\sim}\}$

Um teorema de Sierpiński

Voltando...

$\preccurlyeq$ ordem linear sobre $\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$

$X = \{x \in \,]-1,1[\, : [x]_{\sim} \prec [-x]_{\sim}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Um teorema de Sierpiński

Voltando...

$\preccurlyeq$ ordem linear sobre $\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$

$X = \{x \in \,]-1,1[\, : [x]_{\sim} \prec [-x]_{\sim}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Um teorema de Sierpiński

Voltando...

$\preccurlyeq$ ordem linear sobre $\mathscr{A} = \mathbb{R}/_\sim$

$X = \{x \in \,]-1,1[\, : [x]_\sim \prec [-x]_\sim\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Para tanto, primeiramente note que, sendo $I = \,]a,b[$, a função

$$\begin{array}{rcccl} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

— que nada mais é que a reflexão em I com relação ao seu ponto médio — satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Voltando...

$\preccurlyeq$ ordem linear sobre $\mathscr{A} = \mathbb{R}/_\sim$

$X = \{x \in \,]-1,1[\, : [x]_\sim \prec [-x]_\sim\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Para tanto, primeiramente note que, sendo $I = \,]a,b[$, a função

$$\begin{array}{rccl} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

— que nada mais é que a reflexão em I com relação ao seu ponto médio — satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

(Para tanto)^2, basta notar que, se $x \in I$ é irracional, então $[f_I(x)]_\sim = [a+b-x]_\sim = [-x]_\sim$

Um teorema de Sierpiński

Voltando...

$\preccurlyeq$ ordem linear sobre $\mathscr{A} = \mathbb{R}/_{\sim}$

$X = \{x \in \,]-1,1[\, : [x]_\sim \prec [-x]_\sim\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Para tanto, primeiramente note que, sendo $I = \,]a,b[$, a função

$$\begin{array}{rccc} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

— que nada mais é que a reflexão em I com relação ao seu ponto médio — satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

(Para tanto)^2, basta notar que, se $x \in I$ é irracional, então $[f_I(x)]_\sim = [a+b-x]_\sim = [-x]_\sim$, logo

$x \in X \quad \leftrightarrow \quad [x]_\sim \prec [-x]_\sim \quad \leftrightarrow \quad [-f_I(x)]_\sim \prec [f_I(x)]_\sim \quad \leftrightarrow \quad f_I(x) \notin X.$

Um teorema de Sierpiński

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq]-1, 1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

A função

$$\begin{array}{rcccl} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a + b - x \end{array}$$

satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Um teorema de Sierpiński

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq]-1, 1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

A função

$$\begin{array}{rccl} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a + b - x \end{array}$$

satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Portanto, se a medida de $I \cap X$ é α, então a medida de $I \setminus (X \cup \mathbb{Q}) = f_I[I \cap X]$ também é α.

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

A função

$$\begin{array}{rccc} f_I & : & I & \rightarrow & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Portanto, se a medida de $I \cap X$ é α, então a medida de $I \setminus (X \cup \mathbb{Q}) = f_I[I \cap X]$ também é α.
Logo, como $I = (I \cap X) \,\dot{\cup}\, (I \cap \mathbb{Q}) \,\dot{\cup}\, (I \setminus (X \cup \mathbb{Q}))$,

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

A função

$$\begin{array}{rccc} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Portanto, se a medida de $I \cap X$ é α, então a medida de $I \setminus (X \cup \mathbb{Q}) = f_I[I \cap X]$ também é α.
Logo, como $I = (I \cap X) \,\dot\cup\, (I \cap \mathbb{Q}) \,\dot\cup\, (I \setminus (X \cup \mathbb{Q}))$,
tem-se que a medida de I (que é o seu comprimento) é igual a

$$\text{comprimento}(I) = \alpha + 0 + \alpha = 2\alpha,$$

o que implica o desejado.

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

A função

$$\begin{array}{rccl} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Portanto, se a medida de $I \cap X$ é α, então a medida de $I \setminus (X \cup \mathbb{Q}) = f_I[I \cap X]$ também é α.
Logo, como $I = (I \cap X) \,\dot{\cup}\, (I \cap \mathbb{Q}) \,\dot{\cup}\, (I \setminus (X \cup \mathbb{Q}))$,
tem-se que a medida de I (que é o seu comprimento) é igual a

$$\text{comprimento}(I) = \alpha + 0 + \alpha = 2\alpha,$$

o que implica o desejado. \o/

Um teorema de Sierpiński

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \left]-1,1\right[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

A função

$$\begin{array}{rcl} f_I & : & I & \to & I \\ & & x & \mapsto & a+b-x \end{array}$$

satisfaz $f_I[I \cap X] = I \setminus (X \cup \mathbb{Q})$.

Portanto, se a medida de $I \cap X$ é α, então a medida de $I \setminus (X \cup \mathbb{Q}) = f_I[I \cap X]$ também é α.
Logo, como $I = (I \cap X) \dot{\cup} (I \cap \mathbb{Q}) \dot{\cup} (I \setminus (X \cup \mathbb{Q}))$,
tem-se que a medida de I (que é o seu comprimento) é igual a

$$\text{comprimento}(I) = \alpha + 0 + \alpha = 2\alpha,$$

o que implica o desejado. \o/ \o/ \o/

Um teorema de Sierpiński

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1, 1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Como X é um conjunto mensurável de medida $\alpha > 0$, então, tomando-se $\varepsilon \in \,]0, \alpha[$, sabemos que existe uma sequência $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos com extremos racionais satisfazendo

- $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$

e

- $\alpha \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{comprimento}(I_n) < \alpha + \varepsilon$.

Um teorema de Sierpiński

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Como X é um conjunto mensurável de medida $\alpha > 0$, então, tomando-se $\varepsilon \in \,]0,\alpha[$, sabemos que existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com extremos racionais satisfazendo

- $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

e

- $\alpha \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{comprimento}(I_n) < \alpha + \varepsilon$.

Mas, então, de $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \cap I_n)$ obtemos

$$\alpha \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{medida}(X \cap I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\text{comprimento}(I_n)}{2} < \frac{\alpha+\varepsilon}{2} < \alpha.$$

Um teorema de Sierpiński

Afirmação

Para cada intervalo aberto $I \subseteq \,]-1,1[$ com extremos racionais, tem-se que a medida de $I \cap X$ é igual à **metade** do comprimento de I.

Como X é um conjunto mensurável de medida $\alpha > 0$, então, tomando-se $\varepsilon \in \,]0,\alpha[$, sabemos que existe uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com extremos racionais satisfazendo

- $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

  e
- $\alpha \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{comprimento}(I_n) < \alpha + \varepsilon$.

Mas, então, de $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \cap I_n)$ obtemos

$$\alpha \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \text{medida}(X \cap I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\text{comprimento}(I_n)}{2} < \frac{\alpha+\varepsilon}{2} < \alpha.$$

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Conclusão

Conjuntos não mensuráveis são nossos amigos!

Um teorema de Sierpiński

Teorema (Sierpiński 1947)

Se todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ são mensuráveis, então existe uma partição $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{A \in \mathscr{A}} A$ com $|\mathscr{A}| > |\mathbb{R}|$.

Conclusão

Conjuntos não mensuráveis são nossos amigos!
(Ainda bem que eles existem!)

Obrigado, Axioma da Escolha!

Referências

- S. Banach e A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), 244–277.
- P. Komjáth e V. Totik, *Problems and Theorems in Classical Set Theory*. New York: Springer, 2006.
- W. Sierpiński, *Sur une proposition qui entraîne l'existence des ensembles non mesurables*, Fundamenta Mathematicae **34** (1947), 157–162.
- G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna, 1905.