Estabilizando matemáticos instáveis

Caio Lopes de Araujo

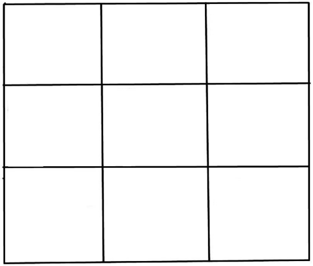
7 de abril de 2019

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:



Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

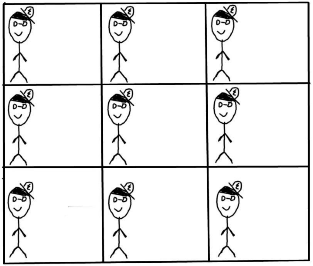


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

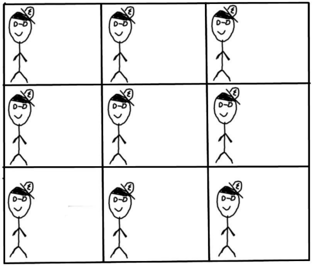


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum.

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

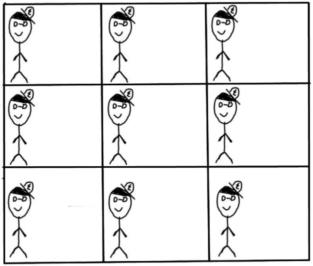


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio.

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

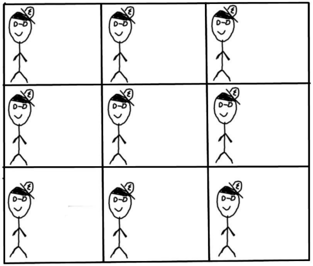


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

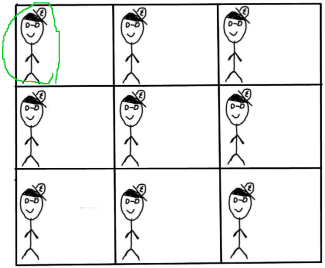


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

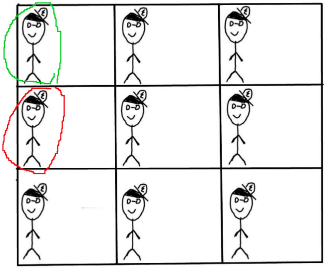


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

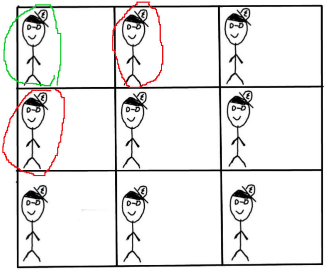


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

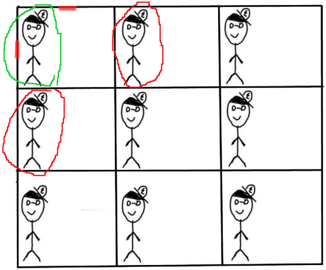


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

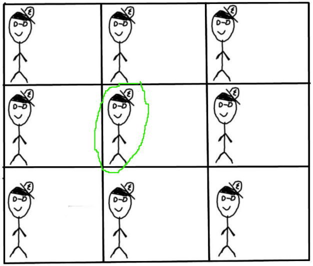


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Em uma universidade qualquer...

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

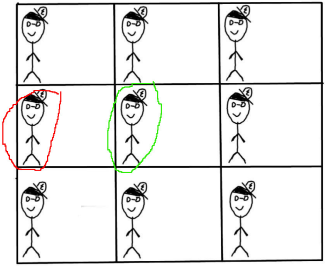


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

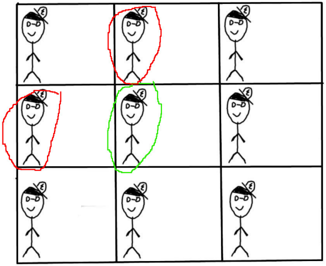


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

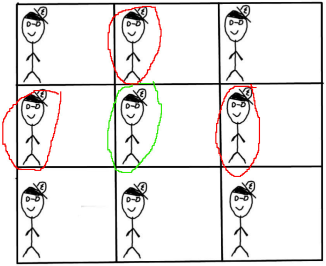


Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Comecemos com um departamento de matemática muito simétrico:

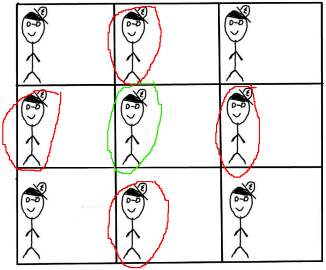


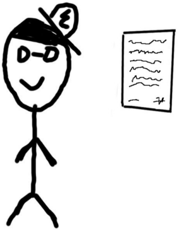
Figura: Departamento visto de cima, com os matemáticos deitados

Dois matemáticos são *vizinhos* se suas salas possuem uma parede em comum. Por definição, um matemático não é vizinho de si próprio. Todas as paredes que não fazem a divisa de duas salas possuem uma janela.

Insira um título legal aqui

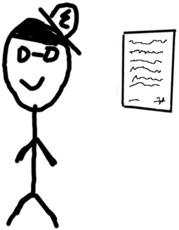
Cada matemático receberá algumas burocracias.

Insira um título legal aqui



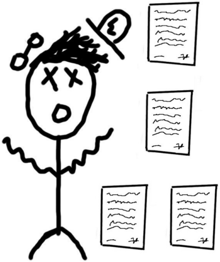
Cada matemático receberá algumas burocracias.

Insira um título legal aqui



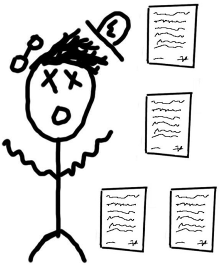
Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias,

Insira um título legal aqui



Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias, ele surta.

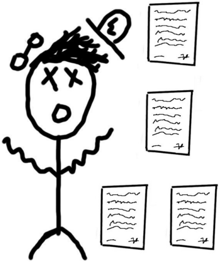
Insira um título legal aqui



Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias, ele surta.

Ao surtar, ele desesperadamente se livra de 4 delas da seguinte forma:

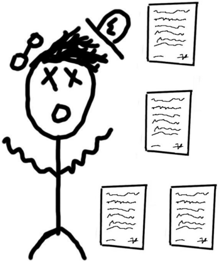
Insira um título legal aqui



Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias, ele surta.

Ao surtar, ele desesperadamente se livra de 4 delas da seguinte forma:

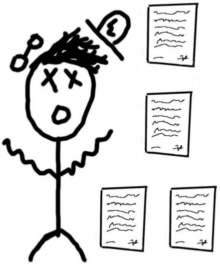
- Passa uma burocracia para cada matemático vizinho.



Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias, ele surta.

Ao surtar, ele desesperadamente se livra de 4 delas da seguinte forma:

- Passa uma burocracia para cada matemático vizinho.
- Joga fora pelas janelas o que sobrar (uma por janela).

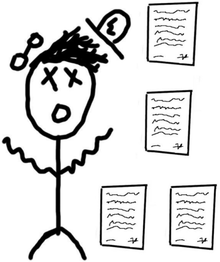


Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias, ele surta.

Ao surtar, ele desesperadamente se livra de 4 delas da seguinte forma:

- Passa uma burocracia para cada matemático vizinho.
- Joga fora pelas janelas o que sobrar (uma por janela).

Essa ação será chamada de *toppling*.



Cada matemático receberá algumas burocracias. Se um dos matemáticos receber mais do que 3 burocracias, ele surta.

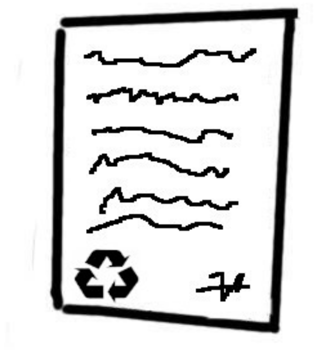
Ao surtar, ele desesperadamente se livra de 4 delas da seguinte forma:

- Passa uma burocracia para cada matemático vizinho.
- Joga fora pelas janelas o que sobrar (uma por janela).

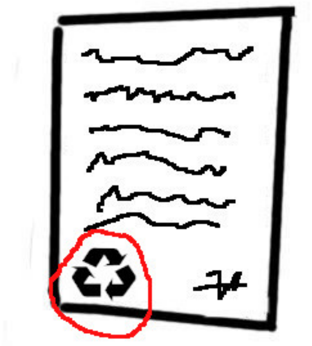
Essa ação será chamada de *toppling*. Matemáticos surtados também serão chamados de *instáveis*.

Ecomatemática

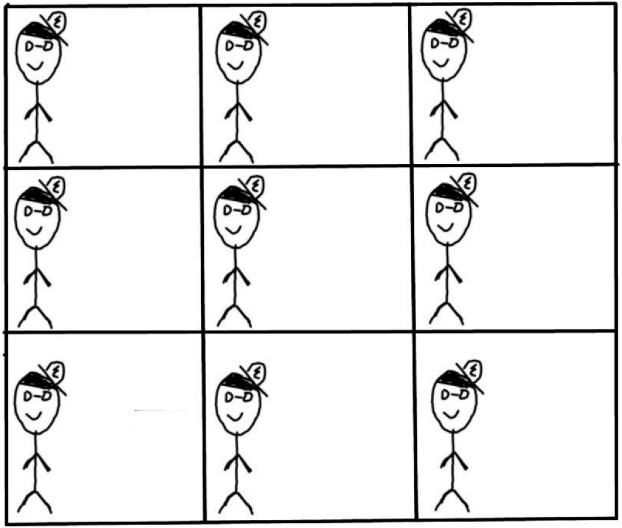
Ecomatemática



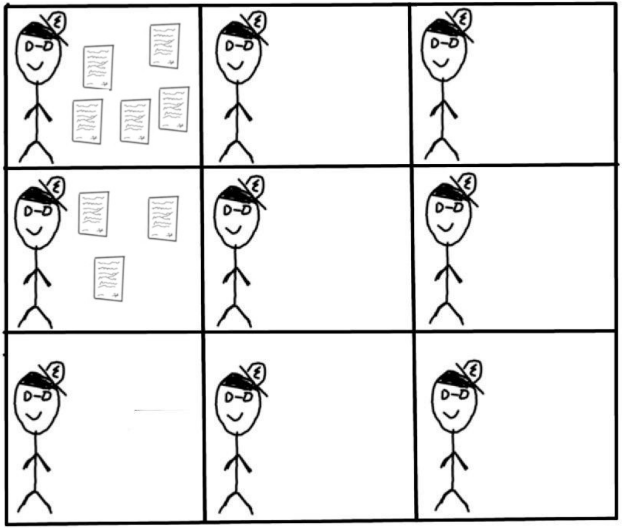
Ecomatemática



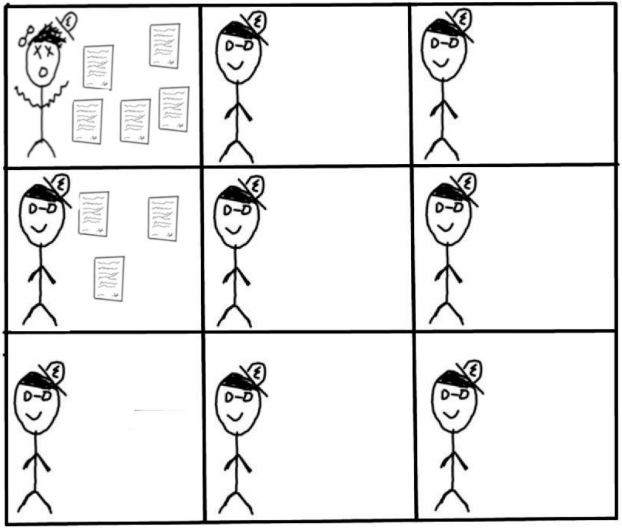
Exemplo



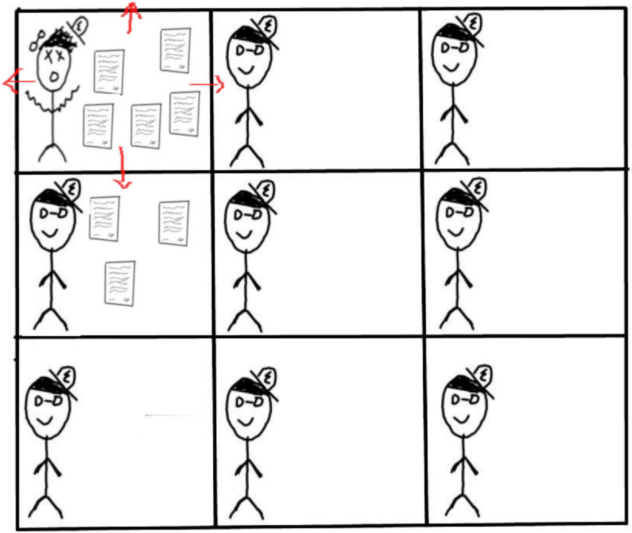
Exemplo



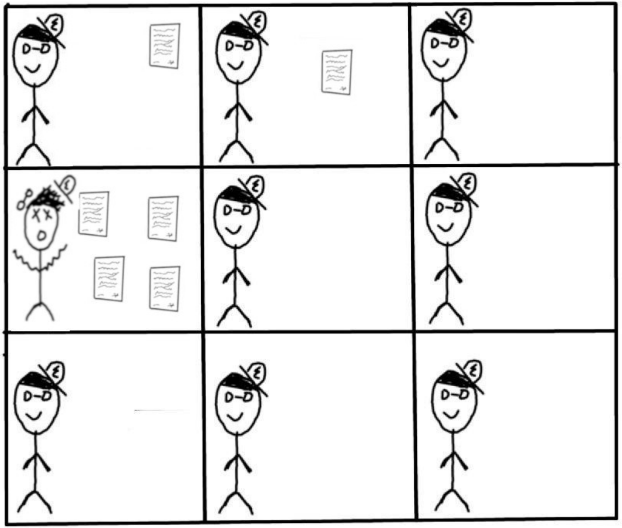
Exemplo



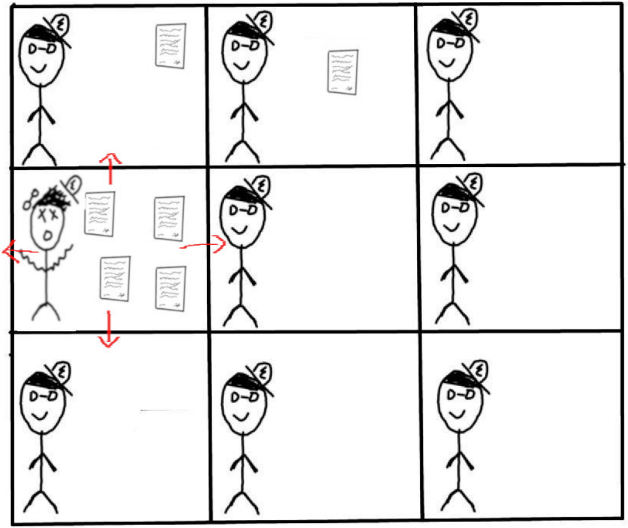
Exemplo



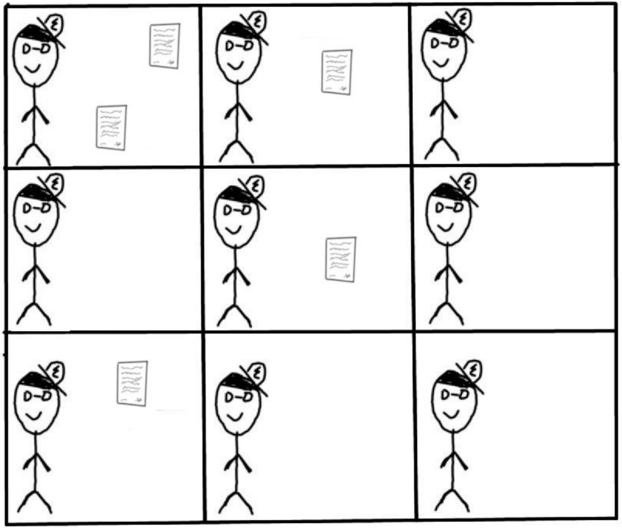
Exemplo



Exemplo



Exemplo



Observações perspicazes

- O toppling irá ocorrer enquanto existir um matemático com mais que 3 burocracias.

Observações perspicazes

- O toppling irá ocorrer enquanto existir um matemático com mais que 3 burocracias.
  Exemplo: Suponha que alguém recebeu 9 burocracias. O primeiro toppling irá deixar 5 burocracias restantes. Como $5 > 3$, um segundo toppling irá ocorrer, sobrando apenas 1 burocracia.

Observações perspicazes

- O toppling irá ocorrer enquanto existir um matemático com mais que 3 burocracias.
  Exemplo: Suponha que alguém recebeu 9 burocracias. O primeiro toppling irá deixar 5 burocracias restantes. Como $5 > 3$, um segundo toppling irá ocorrer, sobrando apenas 1 burocracia.

- A regra de jogar fora pelas janelas as burocracias que sobram faz com que esse processo sempre acabe.

Observações perspicazes

- O toppling irá ocorrer enquanto existir um matemático com mais que 3 burocracias.
  Exemplo: Suponha que alguém recebeu 9 burocracias. O primeiro toppling irá deixar 5 burocracias restantes. Como $5 > 3$, um segundo toppling irá ocorrer, sobrando apenas 1 burocracia.

- A regra de jogar fora pelas janelas as burocracias que sobram faz com que esse processo sempre acabe. Pense que a soma de burocracias continua a mesma após um toppling se, e só se, for feito pelo matemático do centro. (É o único que não possui janela, certo?)

Observações perspicazes

- O toppling irá ocorrer enquanto existir um matemático com mais que 3 burocracias.
  Exemplo: Suponha que alguém recebeu 9 burocracias. O primeiro toppling irá deixar 5 burocracias restantes. Como $5 > 3$, um segundo toppling irá ocorrer, sobrando apenas 1 burocracia.
- A regra de jogar fora pelas janelas as burocracias que sobram faz com que esse processo sempre acabe. Pense que a soma de burocracias continua a mesma após um toppling se, e só se, for feito pelo matemático do centro. (É o único que não possui janela, certo?)
- Se houver 2 ou mais matemáticos instáveis, não importa qual realiza o toppling primeiro.

Dando nome aos bois

Definição

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*.

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*. (Surprise!)

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*. (Surprise!)

Definição

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*. (Surprise!)

Definição

Uma distribuição é dita *instável* se possuí um matemático instável. Caso contrário, é *estável*.

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*. (Surprise!)

Definição

Uma distribuição é dita *instável* se possuí um matemático instável. Caso contrário, é *estável*.

Note que, devido ao toppling, toda distribuição instável pode ser estabilizada (como feito no exemplo anterior):

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*. (Surprise!)

Definição

Uma distribuição é dita *instável* se possuí um matemático instável. Caso contrário, é *estável*.

Note que, devido ao toppling, toda distribuição instável pode ser estabilizada (como feito no exemplo anterior):

Proposição

Toda distribuição A pode ser estabilizada.

Dando nome aos bois

Definição

Cada possível distribuição de burocracias no departamento será chamada de...*distribuição*. (Surprise!)

Definição

Uma distribuição é dita *instável* se possuí um matemático instável. Caso contrário, é *estável*.

Note que, devido ao toppling, toda distribuição instável pode ser estabilizada (como feito no exemplo anterior):

Proposição

Toda distribuição A pode ser estabilizada.

A estabilização de uma distribuição A será denotada por $stab(A)$.

Algebrizando burocracias

Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Algebrizando burocracias

Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Cada entrada da matriz é o número de burocracias dadas para o matemático correspondente naquela posição.

Algebrizando burocracias

Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Cada entrada da matriz é o número de burocracias dadas para o matemático correspondente naquela posição. E esse número é natural.

Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Cada entrada da matriz é o número de burocracias dadas para o matemático correspondente naquela posição. E esse número é natural.

OBSERVAÇÃO IDEOLÓGICA AGRESSIVA:

Algebrizando burocracias

Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Cada entrada da matriz é o número de burocracias dadas para o matemático correspondente naquela posição. E esse número é natural.

OBSERVAÇÃO IDEOLÓGICA AGRESSIVA: $0 \in \mathbb{N}$

Algebrizando burocracias

Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Cada entrada da matriz é o número de burocracias dadas para o matemático correspondente naquela posição. E esse número é natural.

OBSERVAÇÃO IDEOLÓGICA AGRESSIVA: $0 \in \mathbb{N}$

Reality check: As pessoas costumam achar que matemáticos não servem pra nada.

Algebrizando burocracias

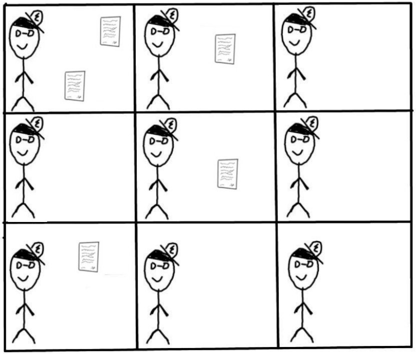
Para fins de praticidade*, vamos representar o departamento como uma matriz 3x3.

Cada entrada da matriz é o número de burocracias dadas para o matemático correspondente naquela posição. E esse número é natural.

OBSERVAÇÃO IDEOLÓGICA AGRESSIVA: $0 \in \mathbb{N}$

Reality check: As pessoas costumam achar que matemáticos não servem pra nada. Note que nosso caso atesta isso.

Algebrizando burocracias - Exemplo



fica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebrizando burocracias

Notação

Denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as distribuições estáveis.

Notação

Denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as distribuições estáveis.

Definição

Dados $A, B \in \mathcal{M}$, defina $A \oplus B = stab(A + B)$.

Notação

Denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as distribuições estáveis.

Definição

Dados $A, B \in \mathcal{M}$, defina $A \oplus B = stab(A + B)$.

Isto é, soma-se as distribuições termo a termo, como matrizes, e depois estabiliza-se o resultado.

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix} 1 & \color{green}{3} & 1 \\ \color{green}{0} & \color{red}{5} & \color{green}{1} \\ 0 & \color{green}{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Portanto

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

Algebrizando burocracias - Exemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Estabilizando a distribuição acima:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 5 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G.

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)
- Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \oplus b = e$ (Existência de elemento inverso)

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)
- Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \oplus b = e$ (Existência de elemento inverso)

Se além disso valer que $a \oplus b = b \oplus a$ para todos $a, b \in G$, então $(G, \oplus)$ é um *grupo comutativo* ou *grupo abeliano*

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)
- Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \oplus b = e$ (Existência de elemento inverso)

Se além disso valer que $a \oplus b = b \oplus a$ para todos $a, b \in G$, então $(G, \oplus)$ é um *grupo comutativo* ou *grupo abeliano*
Exemplos:

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)
- Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \oplus b = e$ (Existência de elemento inverso)

Se além disso valer que $a \oplus b = b \oplus a$ para todos $a, b \in G$, então $(G, \oplus)$ é um *grupo comutativo* ou *grupo abeliano*
Exemplos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo comutativo.

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)
- Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \oplus b = e$ (Existência de elemento inverso)

Se além disso valer que $a \oplus b = b \oplus a$ para todos $a, b \in G$, então $(G, \oplus)$ é um *grupo comutativo* ou *grupo abeliano*
Exemplos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo comutativo.
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ não é grupo.

Dá grupo?

Mas... que é um grupo?

Seja G um conjunto e $\oplus$ uma operação definida em G. Diremos que $(G, \oplus)$ é um *grupo* se:

- Existe $e \in G$ tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$ para todo $a \in G$ (Identidade)
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (Associatividade)
- Para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a \oplus b = e$ (Existência de elemento inverso)

Se além disso valer que $a \oplus b = b \oplus a$ para todos $a, b \in G$, então $(G, \oplus)$ é um *grupo comutativo* ou *grupo abeliano*
Exemplos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo comutativo.
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ não é grupo.
3. As matrizes inversíveis *nxn* com o produto usual de matriz é grupo mas não é comutativo.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por [0].

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso,

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias. Mas toda vez que um toppling é realizado, Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias. Mas toda vez que um toppling é realizado, ao menos dois matemáticos vizinhos recebem 1 burocracia cada.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias. Mas toda vez que um toppling é realizado, ao menos dois matemáticos vizinhos recebem 1 burocracia cada. Portanto,

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias. Mas toda vez que um toppling é realizado, ao menos dois matemáticos vizinhos recebem 1 burocracia cada. Portanto, assim como na vida,

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias. Mas toda vez que um toppling é realizado, ao menos dois matemáticos vizinhos recebem 1 burocracia cada. Portanto, assim como na vida, não é possível zerar todas as burocracias.

Houston, we have a problem

Note que a identidade de $(\mathcal{M}, \oplus)$ é a matriz com 0 em todas as entradas. A denotaremos por $[0]$.

Seja $A \in \mathcal{M}$ não nulo. Será que existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $A \oplus B = [0]$? (Elemento inverso dessa operação)

Note que, se for o caso, então existe um último toppling durante a estabilização de $A + B$ que zera todas as burocracias. Mas toda vez que um toppling é realizado, ao menos dois matemáticos vizinhos recebem 1 burocracia cada. Portanto, assim como na vida, não é possível zerar todas as burocracias.

Então:

Proposição

$(\mathcal{M}, \oplus)$ não é grupo

Aqui tem informação!

$(\mathcal{M}, \oplus)$ satisfaz todas as regras para ser grupo, exceto a existência de elemento inverso.

Aqui tem informação!

$(\mathcal{M}, \oplus)$ satisfaz todas as regras para ser grupo, exceto a existência de elemento inverso. É até mesmo comutativo.

Aqui tem informação!

$(\mathcal{M}, \oplus)$ satisfaz todas as regras para ser grupo, exceto a existência de elemento inverso. É até mesmo comutativo. Chamamos isso de *monóide comutativo*.

Aqui tem informação!

$(\mathcal{M}, \oplus)$ satisfaz todas as regras para ser grupo, exceto a existência de elemento inverso. É até mesmo comutativo. Chamamos isso de *monóide comutativo*.

Não usaremos isso pra nada.

Diminuindo as expectativas

E se restringirmos a um conjunto menor?

Diminuindo as expectativas

E se restringirmos a um conjunto menor?

Seja $[3] = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Diminuindo as expectativas

E se restringirmos a um conjunto menor?

Seja $[3] = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Defina o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}$:

E se restringirmos a um conjunto menor?

Seja $[3] = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Defina o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}$:

$$S = \{A \in \mathcal{M} : A = [3] \oplus B, \text{ para algum } B \in \mathcal{M}\}$$

Calculando um camarada de S muito importante

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} +$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS):

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{4} & \color{green}{5} & \color{red}{4} \\ \color{green}{5} & 4 & \color{green}{5} \\ \color{red}{4} & \color{green}{5} & \color{red}{4} \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\color{red}4} & {\color{green}5} & {\color{red}4} \\ {\color{green}5} & 4 & {\color{green}5} \\ {\color{red}4} & {\color{green}5} & {\color{red}4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&4\\5&4&5\\4&5&4\end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix}4&5&4\\5&4&5\\4&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\color{red}{4}&\color{green}{5}&\color{red}{4}\\\color{green}{5}&4&\color{green}{5}\\\color{red}{4}&\color{green}{5}&\color{red}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7&0\\7&4&7\\0&7&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\color{green}{0}&\color{red}{7}&\color{green}{0}\\\color{red}{7}&\color{green}{4}&\color{red}{7}\\\color{green}{0}&\color{red}{7}&\color{green}{0}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2&3&2\\3&8&3\\2&3&2\end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 4\\5 & 4 & 5\\4 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix}4 & 5 & 4\\5 & 4 & 5\\4 & 5 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 4\\5 & 4 & 5\\4 & 5 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\7 & 4 & 7\\0 & 7 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\7 & 4 & 7\\0 & 7 & 0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\3 & 8 & 3\\2 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\3 & 8 & 3\\2 & 3 & 2\end{pmatrix} =^{2x} \begin{pmatrix}2 & 5 & 2\\5 & 0 & 5\\2 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&4\\5&4&5\\4&5&4\end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix}4&5&4\\5&4&5\\4&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5&4\\5&4&5\\4&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7&0\\7&4&7\\0&7&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7&0\\7&4&7\\0&7&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2&3&2\\3&8&3\\2&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\3&8&3\\2&3&2\end{pmatrix}=^{2x}\begin{pmatrix}2&5&2\\5&0&5\\2&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&2\\5&0&5\\2&5&2\end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} =^{2x} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} =^{2x} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} =^{2x} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando um camarada de S muito importante

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

TRIGGER WARNING (VÁRIAS CONTAS): *Estabilizando a matriz acima* (Usaremos fortemente que a ordem em que o toppling é feito não importa):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} =^{2x} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O que acontece se somarmos ele a outros elementos de S?

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O que acontece se somarmos ele a outros elementos de S? Vamos fazer a conta!

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O que acontece se somarmos ele a outros elementos de S? Vamos fazer a conta!
Mentira, não vamos passar por isso novamente.

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O que acontece se somarmos ele a outros elementos de S? Vamos fazer a conta!

Mentira, não vamos passar por isso novamente. Considere $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S$.

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O que acontece se somarmos ele a outros elementos de S? Vamos fazer a conta!

Mentira, não vamos passar por isso novamente. Considere $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$


CONTAS
2000 ~~YEARS~~
LATER

E daí?

Note que $[0] \notin S$.

Já mostramos que o elemento abaixo está em S:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O que acontece se somarmos ele a outros elementos de S? Vamos fazer a conta!

Mentira, não vamos passar por isso novamente. Considere $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Promessas

Na verdade, a mesma coisa acontece com qualquer elemento de S em relação a operação $\oplus$:

Promessas

Na verdade, a mesma coisa acontece com qualquer elemento de S em relação a operação $\oplus$:

Proposição

$$A \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ para todo } A \in S$$

Promessas

Na verdade, a mesma coisa acontece com qualquer elemento de S em relação a operação $\oplus$:

Proposição

$$A \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ para todo } A \in S$$

Nosso objetivo final será demonstrar que $(S, \oplus)$ é um grupo (com a identidade acima).

Promessas

Na verdade, a mesma coisa acontece com qualquer elemento de S em relação a operação $\oplus$:

Proposição

$$A \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ para todo } A \in S$$

Nosso objetivo final será demonstrar que $(S, \oplus)$ é um grupo (com a identidade acima).

Mas antes, vamos buscar um pouco de motivação.

No mundo das ideias...

Suponha que o departamento recebeu bastante verba extra e aumentou de tamanho:

No mundo das ideias...

Suponha que o departamento recebeu bastante verba extra e aumentou de tamanho: Agora ele é 4x4!

No mundo das ideias...

Suponha que o departamento recebeu bastante verba extra e aumentou de tamanho: Agora ele é 4x4! Uhu!

No mundo das ideias...

Suponha que o departamento recebeu bastante verba extra e aumentou de tamanho: Agora ele é 4x4! Uhu!

Podemos repetir a mesma ladainha no caso 4x4,

No mundo das ideias...

Suponha que o departamento recebeu bastante verba extra e aumentou de tamanho: Agora ele é 4x4! Uhu!

Podemos repetir a mesma ladainha no caso 4x4, com as mesmas regras, e obter um conjunto S análogo. Ele também é grupo e sua identidade é:

No mundo das ideias...

Suponha que o departamento recebeu bastante verba extra e aumentou de tamanho: Agora ele é 4x4! Uhu!

Podemos repetir a mesma ladainha no caso 4x4, com as mesmas regras, e obter um conjunto S análogo. Ele também é grupo e sua identidade é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E no caso 5x5? A identidade de S é:

E no caso 5x5? A identidade de S é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

E no caso 5x5? A identidade de S é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que a identidade do caso 3x3 aparece no centro.

E no caso 5x5? A identidade de S é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que a identidade do caso 3x3 aparece no centro.

Extrapolando

Vamos ver o que acontece no caso 100x100.

Extrapolando

Vamos ver o que acontece no caso 100x100.

Visualizar uma matriz 100x100 não é legal, então faremos algo melhor.

Extrapolando

Vamos ver o que acontece no caso 100x100.

Visualizar uma matriz 100x100 não é legal, então faremos algo melhor.

Cada entrada da matriz será representada por um pixel,

Extrapolando

Vamos ver o que acontece no caso 100x100.

Visualizar uma matriz 100x100 não é legal, então faremos algo melhor.

Cada entrada da matriz será representada por um pixel, e a cor do pixel será de acordo com o número que estiver naquela posição.

Extrapolando

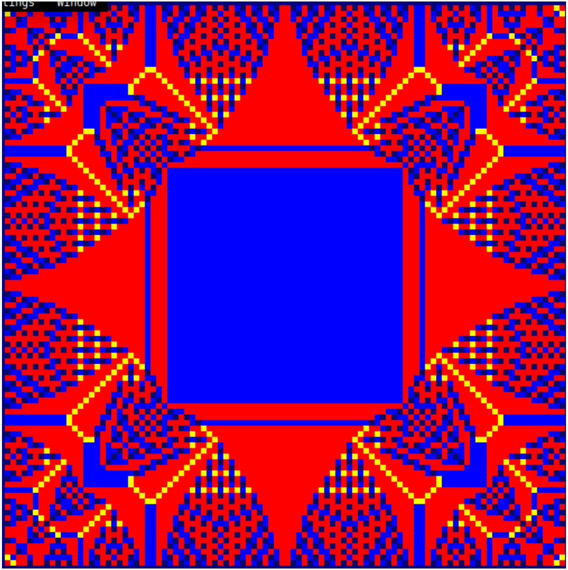
Vamos ver o que acontece no caso 100x100.

Visualizar uma matriz 100x100 não é legal, então faremos algo melhor.

Cada entrada da matriz será representada por um pixel, e a cor do pixel será de acordo com o número que estiver naquela posição. As cores serão as seguintes:

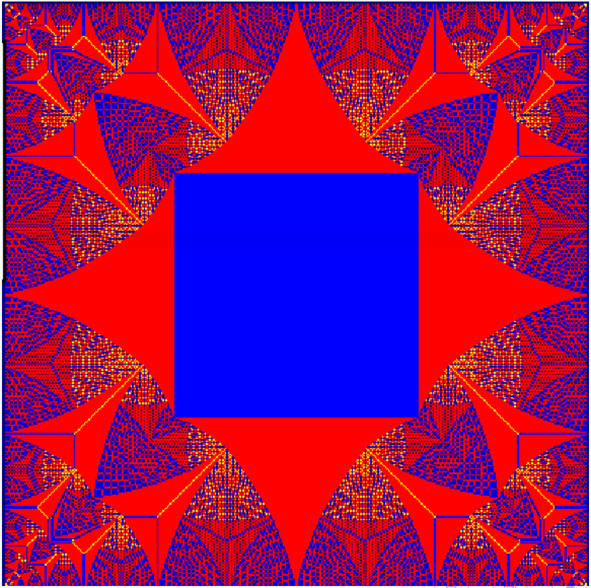
Não é magia, é tecnologia (E matemática) (100x100)

Não é magia, é tecnologia (E matemática) (100x100)

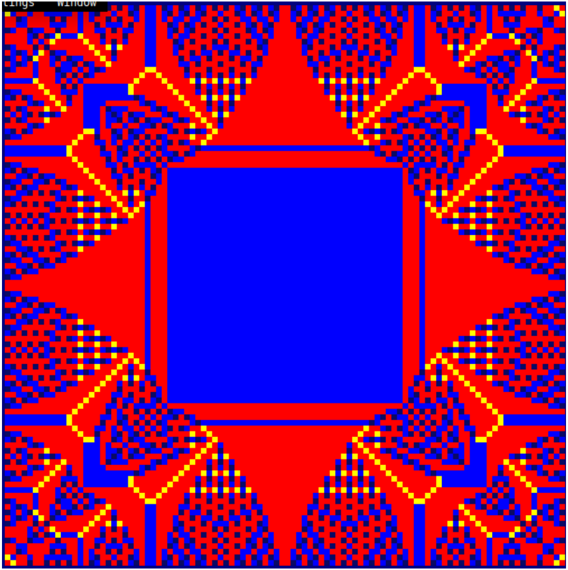


Tcharaaam! (versão 500x500)

Tcharaaam! (versão 500x500)



Somando [1] no caso 100x100



Somando [1] no caso 100x100

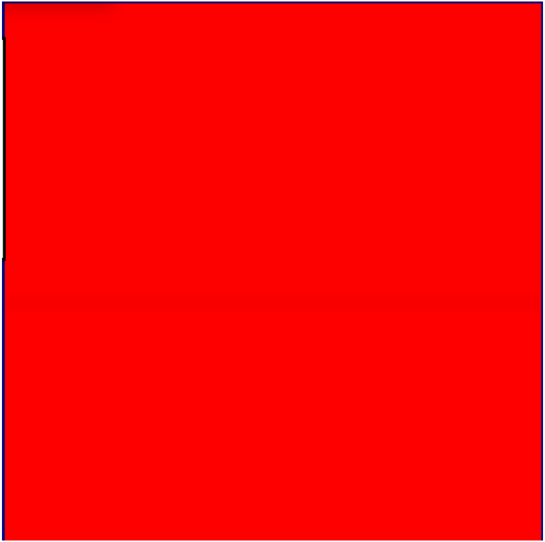
(VÍDEO)

Somando [1] no resultado

Somando [1] no resultado

(VÍDEO)

Perturbando [3] com 100 burocracias

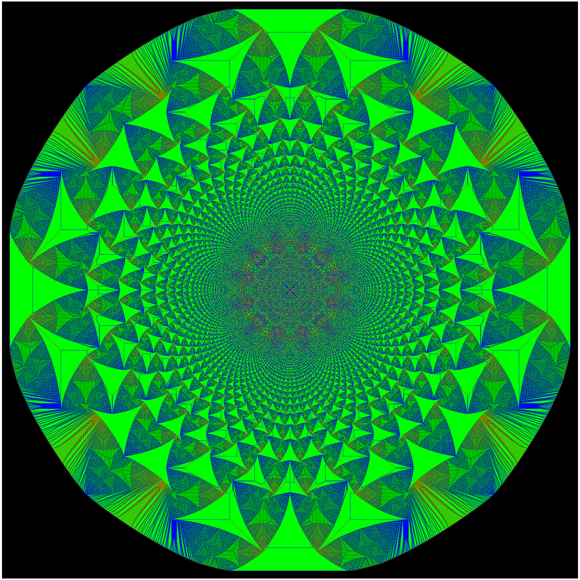


Perturbando [3] com 100 burocracias

(VÍDEO)

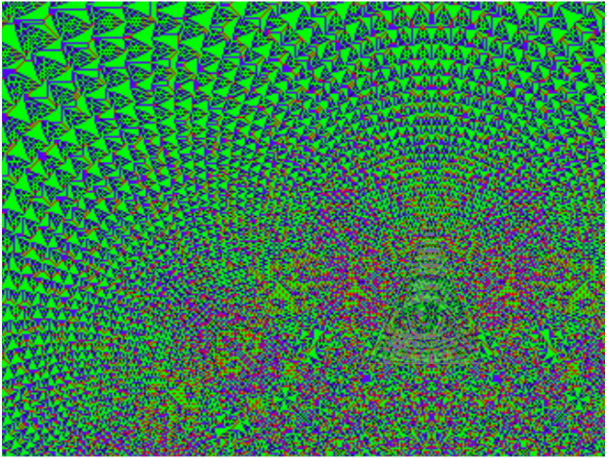
2^{17} burocracias sem limite (Disco Hiperbólico)

2^{17} burocracias sem limite (Disco Hiperbólico)

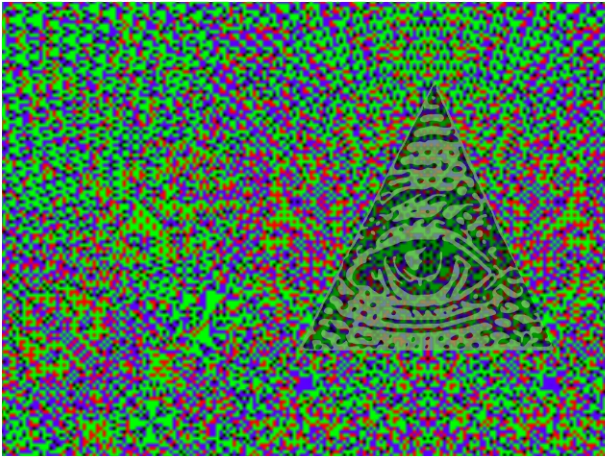


-.-

O.O



O.O



Bem loco

Moral da história

Bem loco

Moral da história

Coisas bonitas acontecem quando nos livramos de burocracias.

Bem loco

Moral da história

Coisas bonitas acontecem quando nos livramos de burocracias.

Feito a motivação, vamos tentar entender o porque daquele conjunto S ser um grupo e como calcula a identidade.

Bem loco

Moral da história

Coisas bonitas acontecem quando nos livramos de burocracias.

Feito a motivação, vamos tentar entender o porque daquele conjunto S ser um grupo e como calcula a identidade.

Iremos assumir alguns conceitos de teoria de grupos.

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Definição

Uma distribuição de burocracias no departamento é uma função

$$c : V \to \mathbb{N}$$

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Definição

Uma distribuição de burocracias no departamento é uma função

$$c : V \to \mathbb{N}$$

Ou seja, podemos pensar nas distribuições como elementos de $\mathbb{N}^{n^2}$

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Definição

Uma distribuição de burocracias no departamento é uma função

$$c : V \to \mathbb{N}$$

Ou seja, podemos pensar nas distribuições como elementos de $\mathbb{N}^{n^2}$ (Que é o mesmo que uma matriz $n \times n$).

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Definição

Uma distribuição de burocracias no departamento é uma função

$$c : V \to \mathbb{N}$$

Ou seja, podemos pensar nas distribuições como elementos de $\mathbb{N}^{n^2}$ (Que é o mesmo que uma matriz $n \times n$).

Por exemplo:

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Definição

Uma distribuição de burocracias no departamento é uma função

$$c : V \to \mathbb{N}$$

Ou seja, podemos pensar nas distribuições como elementos de $\mathbb{N}^{n^2}$ (Que é o mesmo que uma matriz $n \times n$).

Por exemplo: A distribuição $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ fica

Achou que não ia ter definições?

Considere $V = \{v_1, ..., v_{n^2}\}$ uma enumeração para os matemáticos no departamento $n \times n$.

Definição

Uma distribuição de burocracias no departamento é uma função

$$c : V \to \mathbb{N}$$

Ou seja, podemos pensar nas distribuições como elementos de $\mathbb{N}^{n^2}$ (Que é o mesmo que uma matriz $n \times n$).

Por exemplo: A distribuição $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ fica $(2, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2)$

Definição

Uma distribuição c é *instável*

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$.

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário,

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é,

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Um jeito de falar do toppling mais formalmente é utilizando a próxima definição:

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Um jeito de falar do toppling mais formalmente é utilizando a próxima definição:

Definição

Definimos $\Delta_i(v_j) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Um jeito de falar do toppling mais formalmente é utilizando a próxima definição:

Definição

Definimos $\Delta_i(v_j) = \begin{cases} 4 & \text{, se } i = j \\ & \\ & \end{cases}$

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Um jeito de falar do toppling mais formalmente é utilizando a próxima definição:

Definição

Definimos $\Delta_i(v_j) = \begin{cases} 4 & \text{, se } i = j \\ -1 & \text{, se i é vizinho de j} \\ & \end{cases}$

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Um jeito de falar do toppling mais formalmente é utilizando a próxima definição:

Definição

Definimos $\Delta_i(v_j) = \begin{cases} 4 & \text{, se } i = j \\ -1 & \text{, se i é vizinho de j} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$

Definição

Uma distribuição c é *instável* se existe $v_i \in V$ tal que $c(v_i) \geq 4$. Caso contrário, ela é *estável*.

Isto é, se $c(v_i) \geq 4$, o $i-$ésimo matemático surta.

Um jeito de falar do toppling mais formalmente é utilizando a próxima definição:

Definição

Definimos $\Delta_i(v_j) = \begin{cases} 4 & \text{, se } i = j \\ -1 & \text{, se i é vizinho de j} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$

Note que cada $\Delta_i \in \mathbb{Z}^{n^2}$

Por exemplo,

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$,

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4.

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 =$$

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Proposição

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Proposição

Seja c uma distribuição instável em v_i.

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Proposição

Seja c uma distribuição instável em v_i. A distribuição obtida após realizar o *toppling* em v_i é dada por

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Proposição

Seja c uma distribuição instável em v_i. A distribuição obtida após realizar o *toppling* em v_i é dada por

$$c - \Delta_i$$

.

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Proposição

Seja c uma distribuição instável em v_i. A distribuição obtida após realizar o *toppling* em v_i é dada por

$$c - \Delta_i$$

.

Observação:

Por exemplo, no caso $i = 1$ e $n = 3$, os vizinhos de v_1 são v_2 e v_4. Portanto

$$\Delta_1 = (4, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Proposição

Seja c uma distribuição instável em v_i. A distribuição obtida após realizar o *toppling* em v_i é dada por

$$c - \Delta_i$$

.

Observação: A subtração aqui é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$ (Lembre-se que $c \in \mathbb{N}^{n^2}$).

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Definição

Seja c uma distribuição.

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Definição

Seja c uma distribuição. Denotamos por $stab(c)$ a distribuição obtida após a estabilização de todos os vértices de c.

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Definição

Seja c uma distribuição. Denotamos por $stab(c)$ a distribuição obtida após a estabilização de todos os vértices de c.

Note que cada Δ_i é um elemento de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Definição

Seja c uma distribuição. Denotamos por $stab(c)$ a distribuição obtida após a estabilização de todos os vértices de c.

Note que cada Δ_i é um elemento de $\mathbb{Z}^{n^2}$. Já sabemos que $\mathbb{Z}^{n^2}$ é grupo.

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Definição

Seja c uma distribuição. Denotamos por $stab(c)$ a distribuição obtida após a estabilização de todos os vértices de c.

Note que cada Δ_i é um elemento de $\mathbb{Z}^{n^2}$. Já sabemos que $\mathbb{Z}^{n^2}$ é grupo. Portanto faz sentido definirmos o seguinte subgrupo:

Ou seja, estabilizar um vértice v_i de uma distribuição c é subtrair Δ_i repetidas vezes até que $c(v_i) < 4$.

Definição

Seja c uma distribuição. Denotamos por $stab(c)$ a distribuição obtida após a estabilização de todos os vértices de c.

Note que cada Δ_i é um elemento de $\mathbb{Z}^{n^2}$. Já sabemos que $\mathbb{Z}^{n^2}$ é grupo. Portanto faz sentido definirmos o seguinte subgrupo:

Definição - Grupo gerado pelos Δ_i

$\Delta\mathbb{Z} = \langle \Delta_1, ..., \Delta_{n^2} \rangle$

Seja $[k]$ a distribuição dada por

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

- É estável

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

- É estável
- Existe uma distribuição b

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

- É estável
- Existe uma distribuição b tal que

$$stab([3]$$

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

- É estável
- Existe uma distribuição b tal que

$$stab([3] + b)$$

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

- É estável
- Existe uma distribuição b tal que

$$stab([3] + b) - a$$

Seja $[k]$ a distribuição dada por

$$[k](v_i) = k$$

para todo $v_i \in V$.

Novamente, a soma e subtração que aparecerão na definição abaixo é a usual de $\mathbb{Z}^{n^2}$.

Definição

Uma distribuição a é *recorrente* se

- É estável
- Existe uma distribuição b tal que

$$stab([3] + b) - a \in \Delta\mathbb{Z}$$

Ou seja,

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0}$$

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0}, \text{ logo, } stab(3+b) = a$$

.

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0}, \text{ logo, } stab(3+b) = a$$

.

Lembre-se que o conjunto S do início é formado pelas distribuições a tais que

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0},\ \text{logo},\ stab(3+b) = a$$

.

Lembre-se que o conjunto S do início é formado pelas distribuições a tais que $a = [3] \oplus b$,

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0}, \text{ logo, } stab(3+b) = a$$

.

Lembre-se que o conjunto S do início é formado pelas distribuições a tais que $a = [3] \oplus b$, para alguma distribuição b.

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0}, \text{ logo, } stab(3+b) = a$$

.

Lembre-se que o conjunto S do início é formado pelas distribuições a tais que $a = [3] \oplus b$, para alguma distribuição b.
Logo, a argumentação anterior mostra a seguinte proposição:

Ou seja, a é recorrente se existe b tal que, em $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$

$$\overline{stab([3]+b)} = \overline{a}$$

Portanto

$$\overline{stab(3+b)-a} = \overline{0}, \text{ logo, } stab(3+b) = a$$

.

Lembre-se que o conjunto S do início é formado pelas distribuições a tais que $a = [3] \oplus b$, para alguma distribuição b.

Logo, a argumentação anterior mostra a seguinte proposição:

Proposição

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a \in S$

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Little Julio from Heaven

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se,

Little Julio from Heaven

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se,

Little Julio from Heaven

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$,

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$, onde

$$I =$$

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$, onde

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2]))$$

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$, onde

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2]))$$

Já a demonstração do Teorema abaixo é capciosa, e vamos apenas admirá-lo:

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$, onde

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2]))$$

Já a demonstração do Teorema abaixo é capciosa, e vamos apenas admirá-lo:

Teorema

Para toda distribuição a,

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$, onde

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2]))$$

Já a demonstração do Teorema abaixo é capciosa, e vamos apenas admirá-lo:

Teorema

Para toda distribuição a, existe uma única distribuição b recorrente tal que

Fazendo umas contas, mostra-se o lema abaixo:

Lema

Uma distribuição a é recorrente se, e somente se, $a - I \in \Delta\mathbb{Z}$, onde

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2]))$$

Já a demonstração do Teorema abaixo é capciosa, e vamos apenas admirá-lo:

Teorema

Para toda distribuição a, existe uma única distribuição b recorrente tal que

$$a - b \in \Delta\mathbb{Z}$$

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta \mathbb{Z}}$

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.
Em resumo, temos:

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.

Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.
Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$
- a é recorrente se, e somente se, $a \oplus I = a$.

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.

Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$
- a é recorrente se, e somente se, $a \oplus I = a$.
- Todos os elementos de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ podem ser representados por uma distribuição recorrente.

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.
Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$
- a é recorrente se, e somente se, $a \oplus I = a$.
- Todos os elementos de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ podem ser representados por uma distribuição recorrente.

Isso nos da o seguinte corolário:

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.
Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$
- a é recorrente se, e somente se, $a \oplus I = a$.
- Todos os elementos de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ podem ser representados por uma distribuição recorrente.

Isso nos da o seguinte corolário:

Corolário

$S \cong \frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$, com I a identidade.

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.

Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$
- a é recorrente se, e somente se, $a \oplus I = a$.
- Todos os elementos de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ podem ser representados por uma distribuição recorrente.

Isso nos da o seguinte corolário:

Corolário

$S \cong \frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$, com I a identidade. Isto é,

Ou seja, em cada classe de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ existe um único representante que é recorrente.

Em resumo, temos:

- a é recorrente se, e somente se, $a \in S$
- a é recorrente se, e somente se, $a \oplus I = a$.
- Todos os elementos de $\frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$ podem ser representados por uma distribuição recorrente.

Isso nos da o seguinte corolário:

Corolário

$S \cong \frac{\mathbb{Z}^{n^2}}{\Delta\mathbb{Z}}$, com I a identidade. Isto é, S é um grupo.

O corolário abaixo também segue dos resultados anteriores, mas de uma forma mais obscura:

O corolário abaixo também segue dos resultados anteriores, mas de uma forma mais obscura:

Corolário

$$|S| = det \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n^2} \end{pmatrix}$$

O corolário abaixo também segue dos resultados anteriores, mas de uma forma mais obscura:

Corolário

$$|S| = det \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n^2} \end{pmatrix}$$

Calculando a identidade I de S para o caso $n = 3$ obtém-se o esperado:

O corolário abaixo também segue dos resultados anteriores, mas de uma forma mais obscura:

Corolário

$$|S| = det \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n^2} \end{pmatrix}$$

Calculando a identidade I de S para o caso $n = 3$ obtém-se o esperado:

$$I =$$

O corolário abaixo também segue dos resultados anteriores, mas de uma forma mais obscura:

Corolário

$$|S| = det \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n^2} \end{pmatrix}$$

Calculando a identidade I de S para o caso $n = 3$ obtém-se o esperado:

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2])) =$$

O corolário abaixo também segue dos resultados anteriores, mas de uma forma mais obscura:

Corolário

$$|S| = det \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n^2} \end{pmatrix}$$

Calculando a identidade I de S para o caso $n = 3$ obtém-se o esperado:

$$I = stab(2[3] - [2] - stab(2[3] - [2])) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou,

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos,

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos,*ASM*.

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos,*ASM*. O grupo $(S, \oplus)$ que vimos se chama *Sandpile group*.

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos,*ASM*. O grupo $(S, \oplus)$ que vimos se chama *Sandpile group*.

Esse foi o primeiro exemplo de um Sistema Dinâmico com a propriedade de *Criticalidade auto-organizada*.

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos,*ASM*. O grupo $(S, \oplus)$ que vimos se chama *Sandpile group*.

Esse foi o primeiro exemplo de um Sistema Dinâmico com a propriedade de *Criticalidade auto-organizada*. Foi descoberto em 1987 por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld.

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos,*ASM*. O grupo $(S, \oplus)$ que vimos se chama *Sandpile group*.

Esse foi o primeiro exemplo de um Sistema Dinâmico com a propriedade de *Criticalidade auto-organizada*. Foi descoberto em 1987 por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld.

Segundo a Wikipédia:

O *ASM* é tipicamente observado em sistemas de não equilíbrio com extensos graus de liberdade e um alto nível de não-linearidade.

Generalizando

O que vimos é um caso muito particular de algo chamado *Abelian Sandpile Model*, ou, pros íntimos, *ASM*. O grupo $(S, \oplus)$ que vimos se chama *Sandpile group*.

Esse foi o primeiro exemplo de um Sistema Dinâmico com a propriedade de *Criticalidade auto-organizada*. Foi descoberto em 1987 por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld.

Segundo a Wikipédia:

O *ASM* é tipicamente observado em sistemas de não equilíbrio com extensos graus de liberdade e um alto nível de não-linearidade. Muitos exemplos individuais foram identificados desde o documento original, mas até hoje não conseguimos um conjunto de regras que caracterizam esse fenômeno.

A matemática está em tudo

O *ASM* possui propriedades matemáticas muito interessantes, e aparece em vários contextos:

A matemática está em tudo

O *ASM* possui propriedades matemáticas muito interessantes, e aparece em vários contextos:

- Processos de Markov

A matemática está em tudo

O *ASM* possui propriedades matemáticas muito interessantes, e aparece em vários contextos:

- Processos de Markov
- Mecânica Estatística

A matemática está em tudo

O *ASM* possui propriedades matemáticas muito interessantes, e aparece em vários contextos:

- Processos de Markov
- Mecânica Estatística
- Geometria Algébrica

A matemática está em tudo

O *ASM* possui propriedades matemáticas muito interessantes, e aparece em vários contextos:

- Processos de Markov
- Mecânica Estatística
- Geometria Algébrica
- Combinatória e Grafos

A matemática está em tudo

O *ASM* possui propriedades matemáticas muito interessantes, e aparece em vários contextos:

- Processos de Markov
- Mecânica Estatística
- Geometria Algébrica
- Combinatória e Grafos
- Geometria Tropical

O caso geral do ASM é feito em grafos (finitos, e com um certo sabor), e a história é mais ou menos assim:

O caso geral do *ASM* é feito em grafos (finitos, e com um certo sabor), e a história é mais ou menos assim:

Associe, para cada vértice desse grafo, uma indeterminada.

Até na Geometria Algébrica

O caso geral do ASM é feito em grafos (finitos, e com um certo sabor), e a história é mais ou menos assim:

Associe, para cada vértice desse grafo, uma indeterminada.Sejam $\{X_1, ..., X_n\}$ esses vértices.

Até na Geometria Algébrica

O caso geral do *ASM* é feito em grafos (finitos, e com um certo sabor), e a história é mais ou menos assim:

Associe, para cada vértice desse grafo, uma indeterminada.Sejam $\{X_1, ..., X_n\}$ esses vértices. Existe uma identificação entre a operação de *toppling* em cada vértice com um polinômio em $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$.

Até na Geometria Algébrica

O caso geral do *ASM* é feito em grafos (finitos, e com um certo sabor), e a história é mais ou menos assim:

Associe, para cada vértice desse grafo, uma indeterminada.Sejam $\{X_1, ..., X_n\}$ esses vértices. Existe uma identificação entre a operação de *toppling* em cada vértice com um polinômio em $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$.Tome o ideal gerado por esses polinômios e pelos polinômios $X_i - 1$

Até na Geometria Algébrica

O caso geral do *ASM* é feito em grafos (finitos, e com um certo sabor), e a história é mais ou menos assim:

Associe, para cada vértice desse grafo, uma indeterminada.Sejam $\{X_1, ..., X_n\}$ esses vértices. Existe uma identificação entre a operação de *toppling* em cada vértice com um polinômio em $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$.Tome o ideal gerado por esses polinômios e pelos polinômios $X_i - 1$ O conjunto de zeros desse ideal é, *cravado*, o *Sandpile group*.

Referências

- Dominique Rossin, Robert Cori, Bruno Salvy. **Polynomial Ideals for Sandpiles and their GrobnerBases.** Theoretical Computer Science, Elsevier, 2002, 276, 1-2, pp.1–15.

- Cori, Robert Rossin, Dominique Ecole Polytechnique, Lix. (1998). **On the Sandpile Group of a Graph**.

- http://doc.sagemath.org/html/en/thematic_tutorials/sandpile.html#bn
- https://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_sandpile_model

- http://people.reed.edu/~davidp/sand/

- http://people.reed.edu/~davidp/grant/

BREAKING NEWS!!!

BREAKING NEWS!!!

O seminário de coisas legais agora tem um canal no Telegram!

BREAKING NEWS!!!

O seminário de coisas legais agora tem um canal no Telegram!

Vantagens do nosso plano de fidelidade:

BREAKING NEWS!!!

O seminário de coisas legais agora tem um canal no Telegram!

Vantagens do nosso plano de fidelidade:

- Informações sobre os próximos seminários.

BREAKING NEWS!!!

O seminário de coisas legais agora tem um canal no Telegram!

Vantagens do nosso plano de fidelidade:

- Informações sobre os próximos seminários.
- Os links e referências usados nas apresentações serão colocados lá.

BREAKING NEWS!!!

O seminário de coisas legais agora tem um canal no Telegram!

Vantagens do nosso plano de fidelidade:

- Informações sobre os próximos seminários.
- Os links e referências usados nas apresentações serão colocados lá.
- Divulgação dos vídeos.

BREAKING NEWS!!!

O seminário de coisas legais agora tem um canal no Telegram!

Vantagens do nosso plano de fidelidade:

- Informações sobre os próximos seminários.
- Os links e referências usados nas apresentações serão colocados lá.
- Divulgação dos vídeos.
- Mais alguma feature ainda não pensada.

BREAKING NEWS!!!

`https://t.me/scl_usp`

@GoodCaio

BREAKING NEWS!!!

`https://t.me/scl_usp`

@GoodCaio
That's all folks!