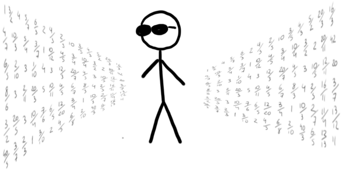
O sistema decimal fracionário, uma coisa legal sistematizada por Simon Stevin

João Carlos Vieira Sampaio (DM-UFSCar)
sampaio@ufscar.br



SEMINÁRIO DE COISAS LEGAIS

24 de junho de 2022

Bits de história

- Origem da representação decimal posicional de números naturais – Índia, século III a.C. (Victor Katz, 2009)
- Século VII, Brahmagupta (Índia)
  – o papel do zero como número – inteiros negativos.
- Al'Khowarizmi, Casa de Sabedoria, século IX, Bagdá
  – Sistema decimal posicional e algoritmos aritméticos elementares com números naturais.
- Al'Khowarizmi $\longrightarrow$ *algarismo* e *algoritmo*
- Al'Khowarizmi $\longrightarrow$ esquemas com números naturais para operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Pequenos bits de história

- Leonardo de Pisa, Fibonacci – *Liber Abaci*, 1202
  – Divulgação do sistema decimal posicional de números naturais
  – Provocou o abandono pela Europa do sistema de numeração romano
- Fibonacci $\longrightarrow$ como posicionar números naturais no papel para os algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão
- Fibonacci $\longrightarrow$ representação de números racionais positivos na forma $\boxed{\dfrac{a}{b}}$ sendo a e b inteiros positivos
- Notações incomuns em *Liber Abaci*

$$\boxed{\frac{1\ 6\ 2}{2\ 9\ 10}1} \text{ significando } \boxed{1+\frac{1}{2\cdot 9\cdot 10}+\frac{6}{9\cdot 10}+\frac{2}{10}}$$

Pequenos bits de história

- Inauguração da representação decimal fracionária (números como 0,0235 ou 12,356) $\longrightarrow$ século XVI
- Simon Stevin, matemático belga, também físico e engenheiro, 1585 $\longrightarrow$ *De Thiende* (título flamengo) ou *La Disme* (tradução francesa, apêndice a *L'Arithmetique*) ou *The Tenth* (tradução inglesa, 1608) $\longrightarrow$ um novo modo para representar números fracionários.

Stevin, frações comuns e The Tenth

- Objetivos de Stevin: tornar fáceis e práticas as operações elementares com números fracionários
- Stevin via as frações comuns como um empecilho à boa matemática comercial.
- Exemplo dado por ele de esforço à precisão, encontrado em seu livro *Tables of Interest*, de 1582.
  "É necessário saber o que um Principal de 380 *libras, a juros de* 11% *ao ano, renderá em* 8 *anos. . .*
  A resposta é $875\,\frac{3\,142\,250}{4\,339\,266}$ *libras."*

The Tenth nas palavras de Stevin

- **Definição I** The Tenth é uma espécie de aritmética baseada na ideia da progressão por dezenas, . . . pela qual todos os cálculos que são encontrados nos negócios podem ser realizados por inteiros apenas, sem a ajuda de frações.
- **Definição II** Um número inteiro é chamado de Início e tem o símbolo ⓪
- **Definição III**
  A décima parte de uma unidade do Início é chamada de Primeiro e tem o símbolo ①,
  A décima parte de uma unidade de Primeiro é chamada Segunda e tem o símbolo ②.
  Procede-se similarmente, para cada décima parte da unidade do número anterior.

Palavras de Stevin em The Tenth

- *Em The Tenth a justaposição de frações tem o significado de soma:*
- "3①7②3③9④ é 3 primeiros, 7 segundos, 3 terceiros e 9 quartos, sendo portanto $\frac{3}{10}\ \frac{7}{100}\ \frac{3}{1000}\ \frac{9}{10000}$, que é, evidentemente $\frac{3739}{10000}$"
- ... "em The Tenth não usamos frações ... usamos apenas os algarismos de 0 a 9 ...

  ... e não escrevemos 7①12②, mas sim 8①2② , pois tem o mesmo valor."
  (em linguagem atual, $\frac{7}{10}+\frac{12}{100}=\frac{8}{10}+\frac{2}{100}$)
- *Stevin não parece conectar os ⓪, ①, ②, etc. com os expoentes das dezenas nos denominadores que eles subtituíam!*

Adição e multiplicação em The Tenth

- Dados três *dime numbers* (números em The Tenth), 27⓪8①4②7③, 37⓪6①7②5③ e 875⓪7①8②2③,
  Requer-se: encontrar a soma dos três.
  A construção: Organize os números como indicado no diagrama, somando-os da maneira usada para somar inteiros.

			⓪	①	②	③
		2	7	8	4	7
		3	7	6	7	5
	8	7	5	7	8	2
	9	4	1	3	0	4

A soma requerida é portanto 941⓪3①0②4③.

$27{,}847 + 37{,}675 + 875{,}782 = 941{,}304$

Proposição I. Adição em La Thiende

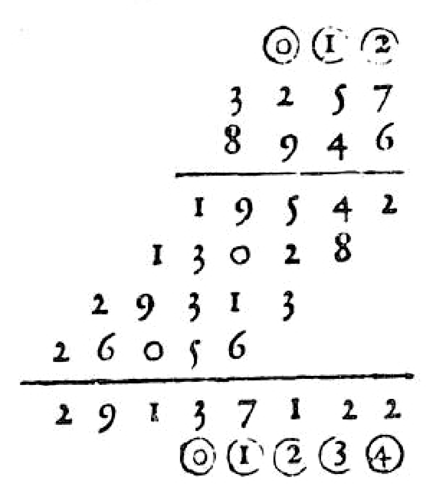
T'GHEGHEVEN. Het ſijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerſte 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING.

Adição em La Thiende

			⓪	①	②	③
		2	7	8	4	7
		3	7	6	7	5
	8	7	5	7	8	2
	9	4	1	3	0	4

$$27{,}847 + 37{,}675 + 875{,}782 = 941{,}304$$

Proposição III. Multiplicação em La Thiende



Traduzindo para nossa notação

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 3 & 2, & 5 & 7 \\
 & & & & 8 & 9, & 4 & 6 \\
\cline{5-8}
 & & & 1 & 9 & 5 & 4 & 2 \\
 & & 1 & 3 & 0 & 2 & 8 & \\
 & 2 & 9 & 3 & 1 & 3 & & \\
2 & 6 & 0 & 5 & 6 & & & \\
\hline
2 & 9 & 1 & 3, & 7 & 1 & 2 & 2
\end{array}
$$

$$32{,}57 \times 89{,}46 = 2913{,}7122$$

O nascimento da dízima periódica

- Após a Proposição 4 (sobre divisão), escreve Stevin:
  Acontece às vezes que o quociente não pode ser expresso em números inteiros, como em 4① dividido por 3②, em que parece que surgirá um número infinito de 3's... É verdade que o quociente será 13⓪3①$3\frac{1}{3}$② *ou* 13⓪3①3②$3\frac{1}{3}$③
- Stevin revela uma compreensão muito clara de seu sistema. Ele ressalta que para evitar os infinitos 3's teríamos que escrever, na linguagem de hoje,
  $$\frac{0{,}4}{0{,}03} = \frac{40}{3} = 13,33\tfrac{1}{3} \text{ ou } \frac{0{,}4}{0{,}03} = 13,333\tfrac{1}{3}$$
  Em $13,333\frac{1}{3}$ a fração $\frac{1}{3}$, na posição em que se encontra, significa $\frac{1/3}{10000}$.
- Stevin sobre arredondamentos: ... *notamos que nos negócios é menosprezada a milésima parte de uma onça ou de um grain.* 1 libra = 16 onças = 7000 grain.

John Napier bate o martelo na representação decimal fracionária

- 1616 $\longrightarrow$ na tradução inglesa de seu *Descriptio*, John Napier simplifica representações e adota o ponto como separador da parte inteira da parte fracionária.
- 1617 (*Rabdologia*) $\longrightarrow$ Napier propõe ponto ou vírgula para separar parte inteira da parte decimal.

- 1748 $\longrightarrow$ Leonhard Euler adota a notação de Napier nos números decimais fracionários de sua *Introdução à Análise Infinitesimal*.
- *Usam o ponto como separador decimal:* Estados Unidos, Reino Unido, Austrália, México, Japão e outros mais de 50 países.
- *Usam a vírgula como separador decimal:* Brasil, Espanha, França, Alemanha, Rússia e outros 70 países.

Frações de representação decimal finita

Definição

Chamaremos de frações decimais ou de frações de representação decimal finita as frações de inteiros positivos que podem ser escritas na forma $\dfrac{a}{10^n}$ sendo $n \geq 0$ um número natural e a um inteiro positivo.

Exemplos

São exemplos de frações decimais as frações

$24,25 = \frac{2425}{100}$	$\dfrac{1}{8} = 0,625 = \dfrac{625}{10^3}$	$48 = \dfrac{48}{10^0} = 48,0$
$0,0001 = \dfrac{1}{10^4}$	$3,1416 = \dfrac{31416}{10^4}$	$\dfrac{3}{4} = 0,75 = \dfrac{75}{10^2}$

Teorema

Sejam a e b inteiros positivos, primos entre si. A fração $\dfrac{a}{b}$ é decimal se e somente se $b = 2^m \cdot 5^n$ para certos naturais m e n.

Demonstração.

Se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{10^r}$ para algum natural c, algum natural r então $bc = a \cdot 10^r$.

Daí, b é divisor de $a \cdot 10^r \overset{\mathrm{mdc}(a,b)=1}{\Longrightarrow} b$ é divisor de $10^r = 2^r \cdot 5^r$

$\Longrightarrow b$ tem a forma $2^m 5^n$ com m e n naturais.

Reciprocamente, se $b = 2^m 5^n$ $(m \geq n)$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{2^m 5^n} = \dfrac{5^{m-n} a}{2^m 5^m} = \dfrac{c}{10^m}$.

O caso $m \leq n$ é análogo. $\square$

Exemplo (Dois exemplos típicos)

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{10^3} = 0,125 \qquad \frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15$$

Dízimas periódicas representando frações

- Possuem uma *dízima periódica* números tais como $a = 0,274274274\ldots$, com uma infinidade de dígitos, tendo um padrão de algarismos que se repete na parte fracionária. Neste exemplo o padrão 274 é uma *dízima periódica de comprimento* 3.
- Convertemos este número a um número racional observando que

$$\begin{aligned} a &= 0,274 + 0,000\,274 + 0,000\,000\,274 + 0,000\,000\,000\,274 + \cdots \\ &= \frac{274}{10^3} + \frac{274}{10^6} + \frac{274}{10^9} + \frac{274}{10^{12}} + \cdots = \frac{\frac{274}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{\frac{274}{10^3}}{\frac{10^3-1}{10^3}} = \frac{\frac{274}{10^3}}{\frac{999}{10^3}} = \frac{274}{999} \end{aligned}$$

- Analogamente $0,a_1a_2\ldots a_\ell a_1a_2\ldots a_\ell\ldots = \dfrac{(a_1a_2\ldots a_\ell)_{10}}{99\ldots9}$ com ℓ noves no denominador ($a_1a_2\ldots a_\ell$ são ℓ algarismos justapostos de uma dízima periódica)

Frações não decimais (frações com dízimas periódicas)

Teorema

Se a fração de inteiros positivos $\dfrac{a}{b}$ *é irredutível, com* $b > 1$ *e* b *e* 10 *primos entre si, então* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{99\ldots9}$*, para algum natural* c*, com* $99\ldots9$ *representando um inteiro de algarismos todos iguais a* 9*.*

Exemplos

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$	$\dfrac{7}{11} = \dfrac{63}{99}$	$\dfrac{5}{37} = \dfrac{5\cdot 27}{37\cdot 27} = \dfrac{135}{999}$
$\dfrac{21}{101} = \dfrac{21\cdot 99}{101\cdot 99} = \dfrac{2079}{9999}$	$\dfrac{21}{41} = \dfrac{21\cdot 2439}{41\cdot 2439} = \dfrac{51219}{99999}$	$\dfrac{1}{7} = \dfrac{142857}{7\cdot 142857} = \dfrac{142857}{999999}$

Teorema (enunciado enxuto)

$\frac{a}{b}$ *irredutível*, $b > 1$, $\text{mdc}(b, 10) = 1 \implies \frac{a}{b} = \frac{c}{99\ldots9}$ *para algum natural* c.

Demonstração. $P = \{10^1, 10^2, 10^3, \ldots\}$.

Na divisão euclidiana de um inteiro em P por b, o resto r da divisão está em $R = \{1, 2, \ldots, b-1\}$ (não podendo ser 0 pois b e 10 são primos entre si.)

Como P é infinito e R é finito, haverá duas potências de dez, 10^n e 10^m, com $m > n$, e restos iguais na divisão por b.

Daí, $10^m - 10^n$ é divisível por $b \Rightarrow$ b é divisor de $10^n(10^{m-n} - 1)$.

b e 10^n são primos entre si $\Rightarrow$ b é divisor de $10^{m-n} - 1$.

$10^{m-n} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{m-n \text{ 9's}}$ é divisível por $b \Rightarrow sb = 99\ldots9$ para algum s natural.

Portanto $\frac{a}{b} = \frac{sa}{sb} = \frac{c}{99\ldots9}$

Frações não decimais

Arremate para frações impróprias

Se $\dfrac{a}{b}$ é irredutível, $a \geq b > 1$, então $a = bq + r$, $0 < r < b$. Como visto anteriormente,

$$\frac{a}{b} = \frac{bq+r}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{(a_1 a_2 \ldots a_\ell)_{10}}{\underbrace{99\ldots9}_{\ell\ 9\text{'s}}} = q + 0, a_1 a_2 \ldots a_\ell a_1 a_2 \ldots a_\ell \ldots$$

Portanto, frações irredutíveis com denominador $b > 1$ e $\text{mdc}(b, 10) = 1$ tem representações decimais apresentando dízimas periódicas.

Exemplo

$$\frac{150}{37} = 4 + \frac{2}{37} = 6 + \frac{2 \cdot 27}{37 \cdot 27} = 6 + \frac{54}{999} = 6 + \frac{054}{999} = 6,054054054\ldots$$

Frações não decimais

Olhamos agora para frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ tendo b uma das formas: $2^\alpha 5^\beta p$, $2^\beta 5^\alpha p$, ou $(2 \cdot 5)^\alpha p$, sendo $\alpha \geq \beta$, $p > 1$, $\text{mdc}(p, 10) = 1$
Neste caso, haverá uma parte não periódica de comprimento α na parte fracionária de $\frac{a}{b}$, antecedendo a parte periódica.

Exemplo

$$\frac{4351}{740} = \frac{4351}{2^2 \cdot 5^1 \cdot 37} = \frac{5^1 \cdot 4351}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 37} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{21755}{37} = \frac{1}{10^2}\left(\frac{37 \cdot 587 + 36}{37}\right)$$
$$= \frac{1}{10^2}\left(587 + \frac{36}{37}\right) = \frac{1}{10^2}\left(587 + \frac{36 \cdot 27}{37 \cdot 27}\right) = \frac{1}{10^2}\left(587 + \frac{972}{999}\right)$$
$$= \frac{1}{10^2}(587 + 0{,}972972972\ldots) = 5{,}87 + 0{,}00972972972\ldots = 5{,}87972972972\ldots$$

Comprimentos de dízimas periódicas

Exemplos

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0,666\ldots$	$\frac{7}{11} = \frac{63}{99} = 0,636363\ldots$
$\frac{5}{37} = \frac{135}{999} = 0,137137\ldots$	$\frac{21}{101} = \frac{2079}{9999} = 0,20792079\ldots$
$\frac{21}{41} = \frac{51219}{99999} = 0,5121951219\ldots$	$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999} = 0,142857142857\ldots$

Podemos prever o comprimento ℓ da dízima periódica?

Teorema

Sendo $\frac{a}{b}$ *irredutível e própria, com* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$, *o comprimento* ℓ *da dízima periódica da representação decimal de* $\frac{a}{b}$ *é o primeiro inteiro positivo* ℓ *tal que* $10^\ell \equiv 1 \pmod{b}$. *Um tal* ℓ *é a ordem de* 10 *módulo* b, $\ell = \mathrm{ord}(10, \bmod\ b)$.

Demonstração.

$10^n \equiv 1 \pmod{b} \Leftrightarrow b$ divide $10^n - 1 \Leftrightarrow b$ divide $\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ noves}} \Leftrightarrow \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ noves}}$ é múltiplo de b.

Assim, o primeiro múltiplo de b da forma $99\ldots9$ determina o comprimento da dízima periódica na representação de $\frac{a}{b}$

Portanto, ℓ é o primeiro n tal que 10^n deixa resto 1 na divisão euclidiana por b.

Congruência de inteiros módulo m

Esta é uma criação de Gauss, 1801, em *Disquisiotones Arithmeticae*.

Definição

Sendo a, b, m inteiros, $m \geq 2$, $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b$ é divisível por m.

Restos via congruências

$a \equiv r \pmod{m}$ e $0 \leq r < m \iff \begin{array}{c|c} a & m \\ \hline r & q \end{array}$ (r é resto da divisão de a por m)

Propriedades úteis

- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a$ e b tem o mesmo resto na divisão por m.
- $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$.
- $\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \text{ e } a^n \equiv b^n \pmod{m}\ (n \geq 0) \end{array}\right.$

O comprimento da dízima periódica

Qual é o comprimento ℓ da dízima periódica na representação decimal da fração irredutível $\dfrac{a}{7}$?

A resposta à pergunta é portanto

$$\ell = 6 = \operatorname{ord}(10, \mod 7)$$

$$10 \equiv 3 \pmod 7$$
$$10^2 \equiv 3^2 = 9 \equiv 2 \pmod 7$$
$$10^3 = 10 \cdot 10^2 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \pmod 7$$
$$10^4 = 10 \cdot 10^3 \equiv 3 \cdot 6 = 18 \equiv 4 \pmod 7$$
$$10^5 = 10 \cdot 10^4 \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 5 \pmod 7$$
$$10^6 = 10 \cdot 10^5 \equiv 3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod 7$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$$

$$\frac{9}{7} = 1,285714285714\ldots$$

O teorema de Euler

Definição

$\varphi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, a função fi de Euler, é definida por

$$\varphi(n) = \#\{a \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq a \leq n,\ \mathrm{mdc}(a, n) = 1\}$$

Como exemplos, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(9) = 6$, e se p é primo $\varphi(p) = p - 1$.

Teorema (Euler)

Se a e m são inteiros primos entre si então $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Teorema

- *b e 10 primos entre si $\Rightarrow 10^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$ e, além disso,*
- *ℓ o primeiro inteiro $n \geq 1$ tal que $10^n \equiv 1 \pmod{b} \Rightarrow \ell$ divide $\varphi(b)$*

Qual é o comprimento da parte periódica de $\frac{1}{17}$?

- $\varphi(17) = 16$
- $\ell = \text{ord}(10, \pmod{17})$ divide $16 \Rightarrow \ell \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$$
\begin{aligned}
10^2 &= 100 \equiv 15 \equiv -2 \pmod{17} \\
10^4 &= (10^2)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{17} \\
10^8 &= (10^4)^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv -1 \pmod{17} \\
{\color{red}10^{16}} &= (10^8)^2 \equiv (-1)^2 {\color{red}= 1 \pmod{17}}
\end{aligned}
$$

- Portanto $\ell = \text{ord}(10, \bmod 17) = 16$

Apreciação

$$\frac{1}{17} = 0,{\color{blue}0588235294117647}{\color{red}0588235294117647}\ldots$$

Qual é o comprimento da parte periódica de $\frac{1}{2017}$?

```
> with(numtheory):isprime(2017);
```

$$true$$

```
> ifactor(2016);
```

$$(2)^5\ (3)^2\ (7)$$

```
> divisors(2016);
```

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1008, 2016\}$$

```
> 10^1008 mod 2017;
```

$$2016$$

Pelo programa Maple12,

- 2017 é primo, logo $\varphi(2017) = 2016$
- $10^{2016} \equiv 1 \pmod{2017}$
- São listados os 48 divisores de 2016, um deles será $\ell = \mathrm{ord}(10, \mod 2017)$
- $10^{1008} \equiv -1 \pmod{2017}$
- Para cada divisor d de 1008, temos $10^d \not\equiv 1 \pmod{2017}$

Qual é o comprimento da parte periódica de $\frac{1}{2017}$?

```
> divisors(2016);
```

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, \boxed{32}, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, \boxed{96}, 112, 126, 144, 168, \boxed{224}, 252, \boxed{288}, 336, 504, \boxed{672}, 1008, 2016\}$

```
> 10^1008 mod 2017;
```

$$2016$$

```
> divisors(1008);
```

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 112, 126, 144, 168, 252, 336, 504, 1008\}$

- Se $d \mid 1008$, $1008 = dq$, $q \in \mathbb{N}$
- $10^d \equiv 1 \pmod{2017} \Rightarrow 10^{dq} = (10^d)^q \equiv 1^q = 1 \pmod{2017} \Rightarrow 10^{1008} \equiv 1 \pmod{2017}$
- Eliminamos divisores comuns de 2016 e 1008
- Um dos expoentes 32, 96, 224, 288, 672, 2016 será $\ell = \mathrm{ord}(10, \mod 2017)$

Qual é o comprimento da parte periódica de $\frac{1}{2017}$?

```
> divisors(1008);
```

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 112, 126, 144, 168, 252, 336, 504, 1008\}$

```
> 10^672 mod 2017;
```

$$294$$

```
> divisors(672);
```

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 32, 42, 48, 56, 84, 96, 112, 168, 224, 336, 672\}$

```
> 10^288 mod 2017;
```

$$79$$

- Um dos expoentes 32, 96, 224, 288, 672, 2016 será $\ell = \operatorname{ord}(10, \mod 2017)$
- $10^{672} \not\equiv 1 \pmod{2017}$
- 32, 96 e 224 são também divisores de 672, podemos eliminá-los. Resta 288.
- $10^{288} \not\equiv 1 \pmod{2017}$
- Concluímos que $\ell = \operatorname{ord}(10, \mod 2017) = 2016$
- A dízima periódica de $1/2017$ tem comprimento 2016.

Algumas referências consultadas

- Katz, Victor. *A History of Mathematics An Introduction 2nd ed.* Boston: Addison-Wesley, 2009.
- Sanford, Vera. *La Disme of Simon Stevin - The First Book on Decimals*. The Mathematics Teacher , October 1921, Vol. 14, No. 6 (October 1921), pp. 321-333
- Struik, D.J. *The Principal Works of Simon Stevin. Volume II. Mathematics.* Amsterdan: C.W. Swets & Zeintingler, 1958.
- Childs, Lindsay. *A Concrete Approach to Higher Algebra. Corrected Second Printing*. New York: Springer-Verlag, 1979.
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Separador_decimal