# Hanói! Hanói!
# O mundo não acabará em 2012!

Carlos Pecorari Neto

ICMC-USP-São Carlos
Seminário de Coisas Legais

02/06/11

# Table of contents

# Torre de Hanói

- Idealizado pelo matemático francês Edouard Lucas por volta de 1880.

# Torre de Hanói

- Idealizado pelo matemático francês Edouard Lucas por volta de 1880.
- Possui uma estrutura com três hastes e um determinado número de discos, de tamanhos distintos.

# Torre de Hanói

- Idealizado pelo matemático francês Edouard Lucas por volta de 1880.
- Possui uma estrutura com três hastes e um determinado número de discos, de tamanhos distintos.
- O jogo consiste em transferir todos os discos de uma haste para outra, movendo apenas um disco por vez e de modo que um disco nunca fique sobre outro de diâmetro menor.

# Torre de Hanói

- Idealizado pelo matemático francês Edouard Lucas por volta de 1880.
- Possui uma estrutura com três hastes e um determinado número de discos, de tamanhos distintos.
- O jogo consiste em transferir todos os discos de uma haste para outra, movendo apenas um disco por vez e de modo que um disco nunca fique sobre outro de diâmetro menor.
- O nome foi inspirado na torre smbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

# Torre de Hanói

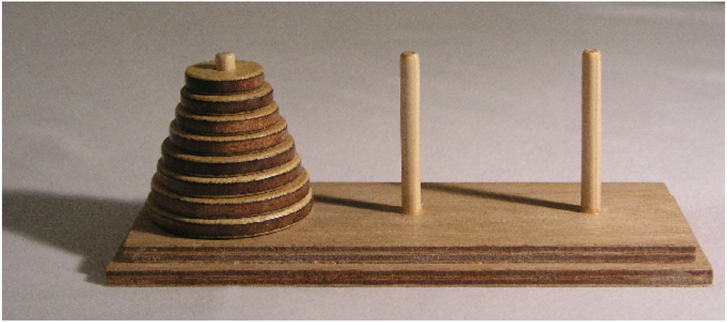
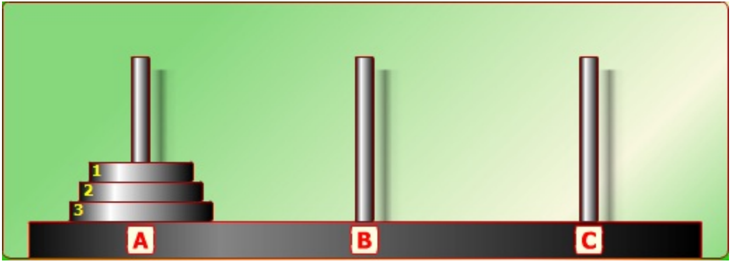
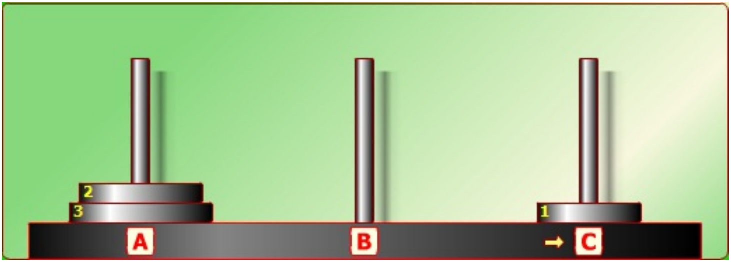


Figura 1: Torre de Hanói

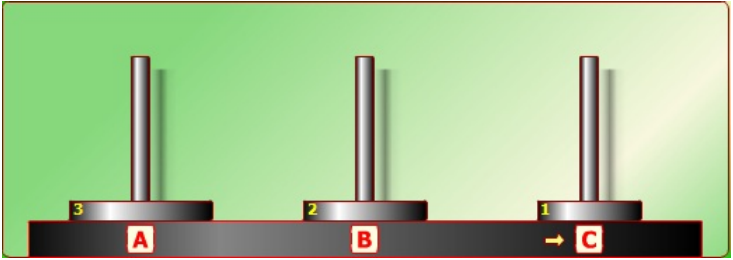
# Torre de Hanói



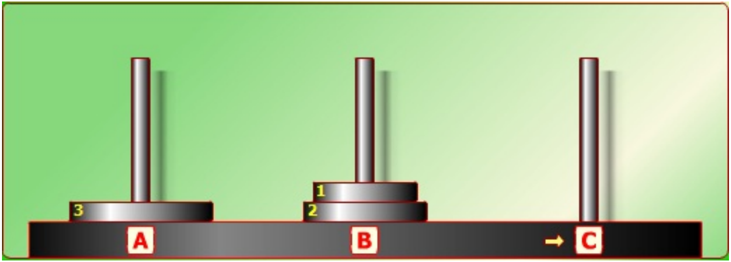
# Torre de Hanói



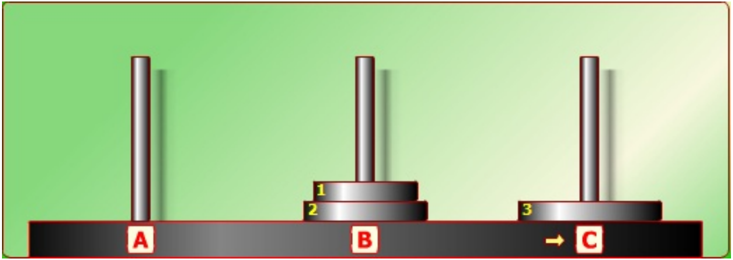
# Torre de Hanói



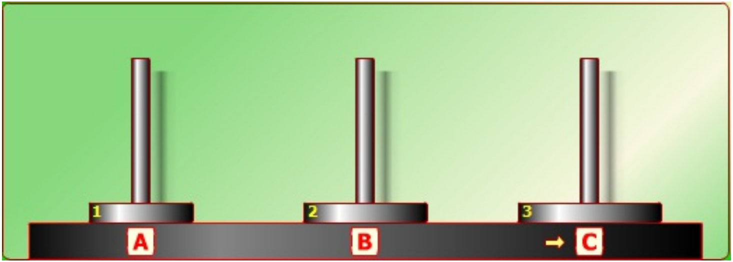
# Torre de Hanói



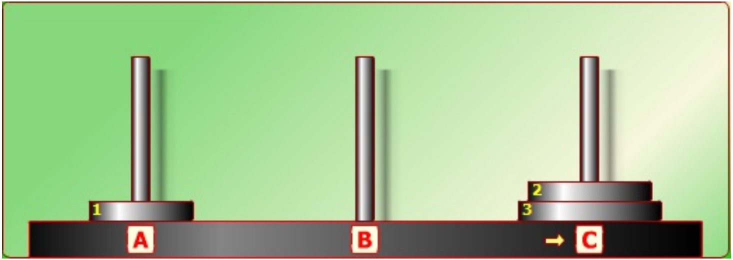
# Torre de Hanói



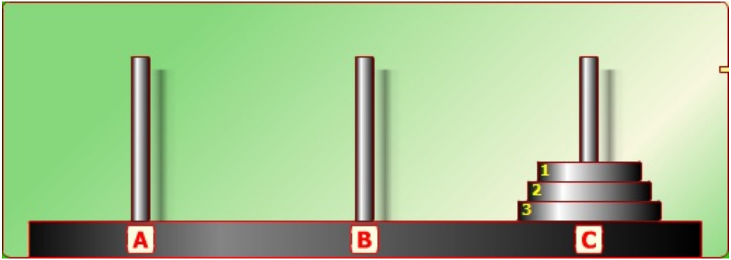
# Torre de Hanói



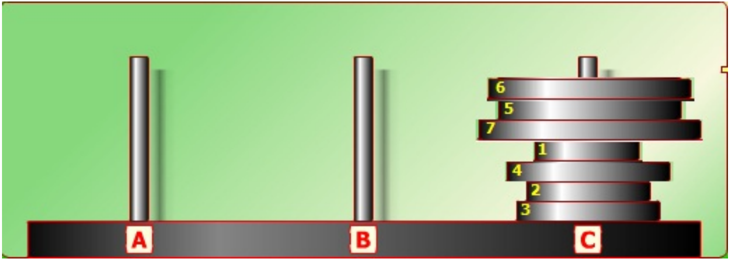
# Torre de Hanói



# Torre de Hanói



# Torre de Hanói



# Sentenças Matemáticas

# Sentenças Matemáticas

Seja $P(n)$ uma sentença que assume valor verdadeiro ou falso de acordo com o $n$ escolhido.

# Sentenças Matemáticas

Seja $P(n)$ uma sentença que assume valor verdadeiro ou falso de acordo com o $n$ escolhido.

Exemplo:
$P(n)$ : n% é a chance de cair na prova um exercício da lista que você não saiba resolver.

# Sentenças Matemáticas

Seja $P(n)$ uma sentença que assume valor verdadeiro ou falso de acordo com o $n$ escolhido.

Exemplo:
$P(n)$ : n% é a chance de cair na prova um exercício da lista que você não saiba resolver.

Se $0 \leq n \leq 99$, $P(n)$ é falsa.

# Sentenças Matemáticas

Seja $P(n)$ uma sentença que assume valor verdadeiro ou falso de acordo com o $n$ escolhido.

Exemplo:
$P(n)$ : n% é a chance de cair na prova um exercício da lista que você não saiba resolver.

Se $0 \leq n \leq 99$, $P(n)$ é falsa.Se $n = 100$, $P(n)$ é verdadeira.

## Sentenças Matemáticas

Outro exemplo:

## Sentenças Matemáticas

Outro exemplo:

$P(n)$ : n% é a chance de você resolver, no momento da prova, o tal exercício.

# Sentenças Matemáticas

Outro exemplo:

$P(n)$ : n% é a chance de você resolver, no momento da prova, o tal exercício.

Neste caso, é verdadeira apenas para $n = 0$.

# Sentenças Matemáticas

Estamos interessados em sentenças que se tornam verdadeiras ou falsas para $n$ percorrendo os naturais.

# Sentenças Matemáticas

Estamos interessados em sentenças que se tornam verdadeiras ou falsas para $n$ percorrendo os naturais.

Na verdade queremos verificar se uma sentença é verdadeira para todo $n$ natural e, para isso, utilizaremos o Princípio de Indução Matemática.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Nas ciências naturais é comum, após um número finito de experimentos, enunciar leis gerais que caracterizam o fenômeno estudado.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Nas ciências naturais é comum, após um número finito de experimentos, enunciar leis gerais que caracterizam o fenômeno estudado.

Em Matemática, isso NÃO FUNCIONA.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n) : n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo
- $n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 43$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo
- $n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 43$ é primo
- $n = 3 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 47$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo
- $n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 43$ é primo
- $n = 3 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 47$ é primo
- $n = 4 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 53$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo
- $n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 43$ é primo
- $n = 3 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 47$ é primo
- $n = 4 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 53$ é primo
- $n = 5 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 61$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo
- $n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 43$ é primo
- $n = 3 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 47$ é primo
- $n = 4 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 53$ é primo
- $n = 5 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 61$ é primo
- $n = 6 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 71$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n) : n^2 - n + 41$ é primo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 41$ é primo
- $n = 2 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 43$ é primo
- $n = 3 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 47$ é primo
- $n = 4 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 53$ é primo
- $n = 5 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 61$ é primo
- $n = 6 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 71$ é primo
- $n = 7 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 83$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo

## Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo
- $n = 13 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 197$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo
- $n = 13 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 197$ é primo
- $n = 14 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 223$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo
- $n = 13 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 197$ é primo
- $n = 14 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 223$ é primo
- $n = 15 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 251$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo
- $n = 13 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 197$ é primo
- $n = 14 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 223$ é primo
- $n = 15 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 251$ é primo
- $n = 16 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 281$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo
- $n = 13 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 197$ é primo
- $n = 14 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 223$ é primo
- $n = 15 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 251$ é primo
- $n = 16 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 281$ é primo
- $n = 17 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 313$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 8 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 97$ é primo
- $n = 9 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 113$ é primo
- $n = 10 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 131$ é primo
- $n = 11 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 151$ é primo
- $n = 12 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 173$ é primo
- $n = 13 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 197$ é primo
- $n = 14 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 223$ é primo
- $n = 15 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 251$ é primo
- $n = 16 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 281$ é primo
- $n = 17 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 313$ é primo
- $n = 18 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 347$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Anos depois...

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo

## Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo
- $n = 37 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1373$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo
- $n = 37 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1373$ é primo
- $n = 38 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1447$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo
- $n = 37 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1373$ é primo
- $n = 38 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1447$ é primo
- $n = 39 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1523$ é primo

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo
- $n = 37 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1373$ é primo
- $n = 38 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1447$ é primo
- $n = 39 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1523$ é primo
- $n = 40 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1601$ é primo,

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo
- $n = 37 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1373$ é primo
- $n = 38 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1447$ é primo
- $n = 39 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1523$ é primo
- $n = 40 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1601$ é primo, mas...

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

- $n = 32 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1033$ é primo
- $n = 33 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1097$ é primo
- $n = 34 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1163$ é primo
- $n = 35 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1231$ é primo
- $n = 36 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1301$ é primo
- $n = 37 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1373$ é primo
- $n = 38 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1447$ é primo
- $n = 39 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1523$ é primo
- $n = 40 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1601$ é primo, mas...
- $n = 41 \Rightarrow n^2 - n + 41 = 1681 = 41 \times 41$ é composto.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$ são chamados números de Fermat.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$ são chamados números de Fermat.

Temos que
$F(0) = 3, F(1) = 5, F(2) = 17, F(3) = 257, F(4) = 65537$, são todos primos.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$ são chamados números de Fermat.

Temos que
$F(0) = 3, F(1) = 5, F(2) = 17, F(3) = 257, F(4) = 65537$, são todos primos.

Baseado nessa imensidão de testes, Fermat propôs que todos os números dessa forma seriam primos.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$ são chamados números de Fermat.

Temos que
$F(0) = 3, F(1) = 5, F(2) = 17, F(3) = 257, F(4) = 65537$, são todos primos.

Baseado nessa imensidão de testes, Fermat propôs que todos os números dessa forma seriam primos.

F(5) é composto.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Os números da forma $F(n) = 2^{2^n} + 1$ são chamados números de Fermat.

Temos que
$F(0) = 3, F(1) = 5, F(2) = 17, F(3) = 257, F(4) = 65537$, são todos primos.

Baseado nessa imensidão de testes, Fermat propôs que todos os números dessa forma seriam primos.

F(5) é composto. Não se conhece mais nenhum primo que seja dessa forma, além destes.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.

## Indução Matemática *versus* Indução Empírica

$P(n)$ : $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.

O primeiro natural que torna esta sentença falsa é 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

Pensou que apareceria o esquilinho outra vez, não é?

# Indução Galinácea

Bertrand Russel (1872-1970) batizou a indução empírica de *Indução Galinácea*, justificado no seguinte conto:

# Indução Galinácea

*Havia uma galinha nova no quintal de uma velhinha. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho à galinha. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar seu milho. Qual não foi sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.*

# Indução Galinácea

Matematicamente falando,

# Indução Galinácea

Matematicamente falando,

*$\exists$ $h'$ nova no quintal de uma $v'$. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho à $h'$. No primeiro dia, $h'$, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, $h'$, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, $h'$, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, $h'$, por indução, foi ao encontro dela para reclamar seu milho. Qual não foi sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.*

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

*Navegar é preciso, viver não é preciso.*

Fernando Pessoa

# Indução Matemática *versus* Indução Empírica

*Provar é preciso, viver também.*

Carlos Pecorari

# Prova por Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

# Prova por Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

1. $P(1)$ é verdade, e

# Prova por Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

1. $P(1)$ é verdade, e
2. sempre que $P(n)$ é verdade, segue que $P(n+1)$ é verdade.

# Prova por Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que

1. $P(1)$ é verdade, e
2. sempre que $P(n)$ é verdade, segue que $P(n+1)$ é verdade.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

# Exemplo simples de prova por indução

$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

# Exemplo simples de prova por indução

$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1)$ é verdade, pois $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

# Exemplo simples de prova por indução

$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(1)$ é verdade, pois $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Supondo $P(n)$ verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$P(n+1) : 1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

# Voltando ao problema da Torre

Duas perguntas naturais que surgem com relação ao jogo são:

# Voltando ao problema da Torre

Duas perguntas naturais que surgem com relação ao jogo são:

1. O jogo tem solução para todo número $n \in \mathbb{N}$ de discos?

# Voltando ao problema da Torre

Duas perguntas naturais que surgem com relação ao jogo são:

1. O jogo tem solução para todo número $n \in \mathbb{N}$ de discos?
2. Se a resposta para o item anterior for SIM, qual o número mínimo $h_n$ de movimentos para resolver o problema com $n$ discos?

# Sim! É possível!

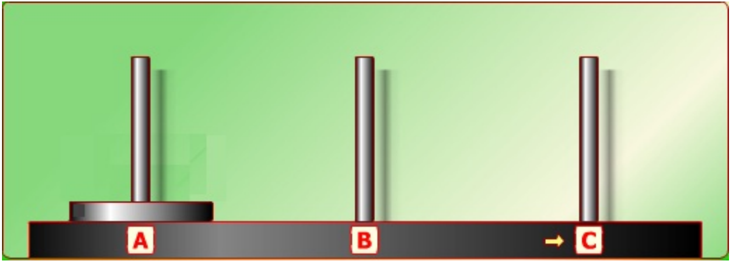
Seja $P(n)$ : O jogo com $n$ discos possui solução.

# Sim! É possível!

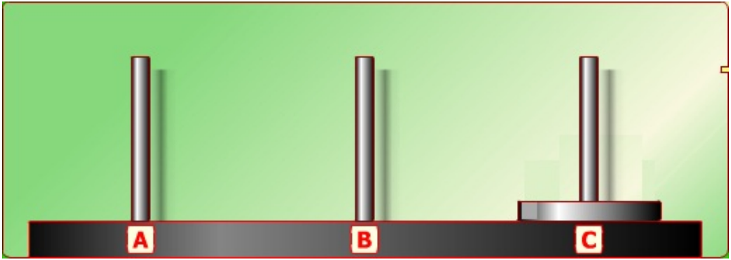
Seja $P(n)$ : O jogo com $n$ discos possui solução.

$P(1)$ é evidentemente verdadeira, visto que mover um único disco entre duas hastes é TRIVIAL.

# Sim! É possível!



# Sim! É possível!



# Sim! É possível!

Vamos supor que seja possível solucionar o jogo para algum número $n$ de discos. Ou seja, $P(n)$ é verdade para algum $n$ natural.

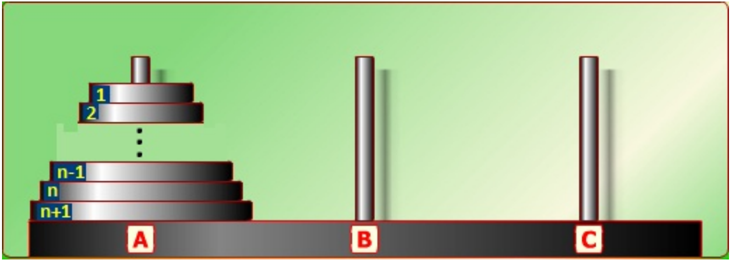
# Sim! É possível!

Vamos supor que seja possível solucionar o jogo para algum número $n$ de discos. Ou seja, $P(n)$ é verdade para algum $n$ natural.

É imediato que $P(n+1)$ é verdadeira.

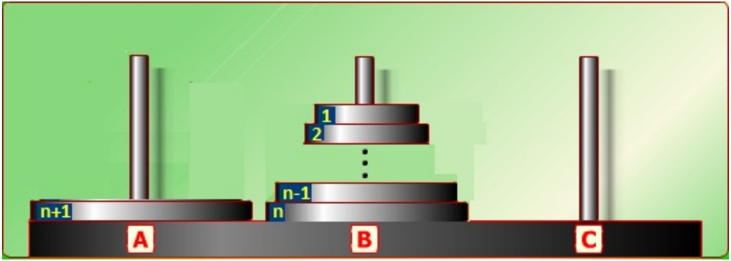
# Sim! É possível!

Se temos $n+1$ discos, por hipótese conseguimos transferir os $n$ discos superiores para uma outra haste.



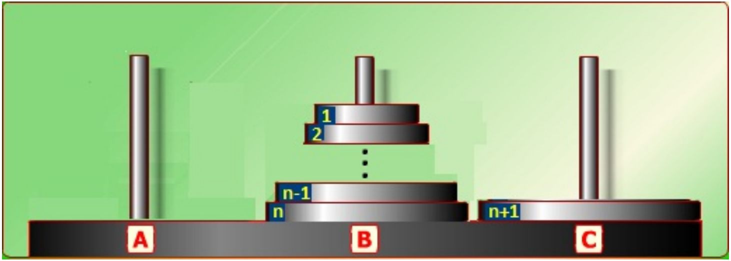
# Sim! É possível!

Se temos $n+1$ discos, por hipótese conseguimos transferir os $n$ discos superiores para uma outra haste.



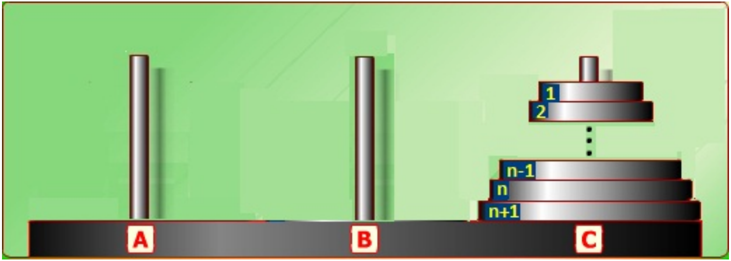
# Sim! É possível!

Após isso, transfere-se o maior dos discos para a haste livre.



## Sim! É possível!

Utilizando a hipótese mais uma vez, transferimos os $n$ discos para a haste onde se encontra o maior disco.



# Sim! É possível!

Assim, é possível solucionar o jogo para qualquer número de discos.

# Sim! É possível!

Assim, é possível solucionar o jogo para qualquer número de discos.

QUE BOM!

# Número mínimo de movimentos

Seja $h_n$ o menor número de movimentos para uma quantidade $n$ de discos.

# Número mínimo de movimentos

Seja $h_n$ o menor número de movimentos para uma quantidade $n$ de discos.

Para solucionar o jogo com $n+1$ discos, devemos efetuar $h_{n+1} = h_n + 1 + h_n = 2h_n + 1$ movimentos.

# Número mínimo de movimentos

- $h_1 = 1 = 2^1 - 1$

# Número mínimo de movimentos

- $h_1 = 1 = 2^1 - 1$
- $h_2 = 2h_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$

# Número mínimo de movimentos

- $h_1 = 1 = 2^1 - 1$
- $h_2 = 2h_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$
- $h_3 = 2h_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7 = 2^3 - 1$

# Número mínimo de movimentos

- $h_1 = 1 = 2^1 - 1$
- $h_2 = 2h_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$
- $h_3 = 2h_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7 = 2^3 - 1$
- $h_4 = 2h_3 + 1 = 2.7 + 1 = 15 = 2^4 - 1$

## Número mínimo de movimentos

- $h_1 = 1 = 2^1 - 1$
- $h_2 = 2h_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$
- $h_3 = 2h_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7 = 2^3 - 1$
- $h_4 = 2h_3 + 1 = 2.7 + 1 = 15 = 2^4 - 1$

Esperamos que $h_n = 2^n - 1$. Como garantir que isto é verdade sempre?

# Número mínimo de movimentos

$$P(n) : h_n = 2^n - 1.$$

# Número mínimo de movimentos

$P(n) : h_n = 2^n - 1.$

Provando por indução:
$P(1) : h_1 = 1 = 2^1 - 1$

## Número mínimo de movimentos

$P(n) : h_n = 2^n - 1.$

Provando por indução:
$P(1) : h_1 = 1 = 2^1 - 1$

Supondo $P(n)$ verdade para algum $n$, a hipótese de indução é $h_n = 2^n - 1.$

# Número mínimo de movimentos

$P(n) : h_n = 2^n - 1.$

Provando por indução:
$P(1) : h_1 = 1 = 2^1 - 1$

Supondo $P(n)$ verdade para algum $n$, a hipótese de indução é $h_n = 2^n - 1.$

$P(n+1) : h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$

# Número mínimo de movimentos

$P(n) : h_n = 2^n - 1.$

Provando por indução:
$P(1) : h_1 = 1 = 2^1 - 1$

Supondo $P(n)$ verdade para algum $n$, a hipótese de indução é $h_n = 2^n - 1$.

$P(n+1) : h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$

Portanto $h_n = 2^n - 1$, qualquer que seja $n$ natural.

# Aplicação

Existem diversas lendas a respeito do surgimento do jogo. A mais popular se refere a de um mosteiro na Índia, onde diz-se que Brahma havia criado uma torre com 64 discos de ouro e ordenou aos monges que solucionassem o jogo.

# Aplicação

Existem diversas lendas a respeito do surgimento do jogo. A mais popular se refere a de um mosteiro na Índia, onde diz-se que Brahma havia criado uma torre com 64 discos de ouro e ordenou aos monges que solucionassem o jogo.

Segundo a lenda, o mundo acabaria quando o jogo fosse concluído.

# Aplicação

Existem diversas lendas a respeito do surgimento do jogo. A mais popular se refere a de um mosteiro na Índia, onde diz-se que Brahma havia criado uma torre com 64 discos de ouro e ordenou aos monges que solucionassem o jogo.

Segundo a lenda, o mundo acabaria quando o jogo fosse concluído.

# Aplicação

O número mínimo de movimentos para 64 discos é $h_{64} = 2^{64} - 1$.

# Aplicação

O número mínimo de movimentos para 64 discos é $h_{64} = 2^{64} - 1$.

Supondo que os monges movam um disco por segundo, o tempo necessário para terminar o jogo é
$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ segundos, ou aproximadamente 585.000.000.000 anos.

# Aplicação

O mundo não acaba ano que vem!

# Referências


- COUTINHO, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA.* Coleção Matemática e Aplicações. RJ, IMPA, 2009.
- HEFEZ, A. *Indução Matemática.* Apostila desenvolvida para alunos da OBMEP, RJ, 2009.
- TORRE DE HANÓI ONLINE. Disponível em<http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/>. Acesso em set/2010.