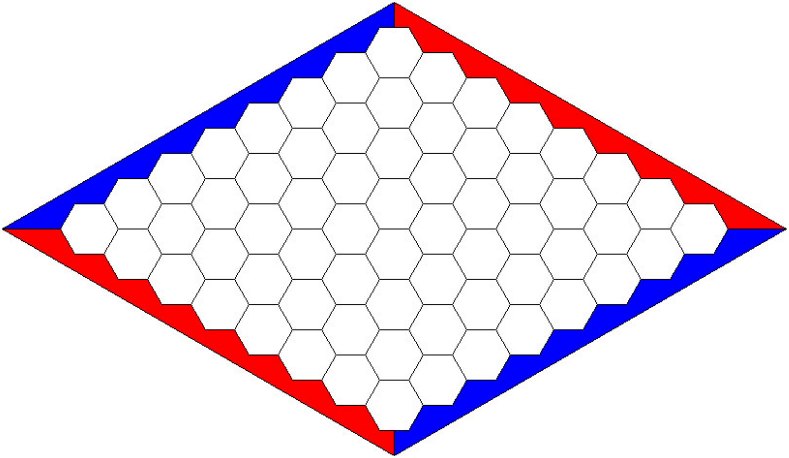
Como usar um jogo de tabuleiro para mostrar um teorema

Leandro Fiorini Aurichi

O jogo de Hex



Não há empates

Vamos assumir o seguinte resultado sobre o jogo Hex:

Proposição

Se um tabuleiro $n \times n$ está completamente preenchido, então há um vencedor.

Não há empates

Vamos assumir o seguinte resultado sobre o jogo Hex:

Proposição

Se um tabuleiro $n \times n$ está completamente preenchido, então há um vencedor.

Esse resultado pode ser mostrado usando-se grafos (talvez num seminário futuro).

O Teorema do ponto fixo de Brouwer

Teorema

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ *contínua. Então existe* $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ *tal que* $f(x, y) = (x, y)$.

Distância alternativa

Será mais fácil trabalharmos com uma noção de distância alternativa sobre $\mathbb{R}^2$. Dados $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, definimos:

Distância alternativa

Será mais fácil trabalharmos com uma noção de distância alternativa sobre $\mathbb{R}^2$. Dados $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, definimos:

$$d((x, y), (a, b)) = \max\{|x - a|, |y - b|\}$$

Distância alternativa

Será mais fácil trabalharmos com uma noção de distância alternativa sobre $\mathbb{R}^2$. Dados $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, definimos:

$$d((x, y), (a, b)) = \max\{|x - a|, |y - b|\}$$

Se você sabe o que é um espaço métrico, note que esta métrica é equivalente a métrica usual do $\mathbb{R}^2$.

Distância alternativa

Será mais fácil trabalharmos com uma noção de distância alternativa sobre $\mathbb{R}^2$. Dados $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, definimos:

$$d((x, y), (a, b)) = \max\{|x - a|, |y - b|\}$$

Se você sabe o que é um espaço métrico, note que esta métrica é equivalente a métrica usual do $\mathbb{R}^2$.
Se você não sabe, não se preocupe. Só vamos usar o seguinte fato: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua (no sentido usual) se, e somente se, é contínua com relação a essa métrica.

Uniformemente contínua

f ser contínua em (x, y), quer dizer que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d((x, y), (a, b)) < \delta \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b))$$

Uniformemente contínua

f ser contínua em (x, y), quer dizer que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d((x, y), (a, b)) < \delta \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b))$$

Como $[0, 1] \times [0, 1]$ é compacto, podemos encontrar um δ comum a todos os (x, y)'s. Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d((x, y), (a, b)) < \delta \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b))$$

para todo $(x, y), (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

O tal do ponto fixo

Além disso, para mostrarmos que existe $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $f(x, y) = (x, y)$, basta mostrarmos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que

$$d(f(x, y) - (x, y)) < \varepsilon$$

O tal do ponto fixo

Além disso, para mostrarmos que existe $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $f(x, y) = (x, y)$, basta mostrarmos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que

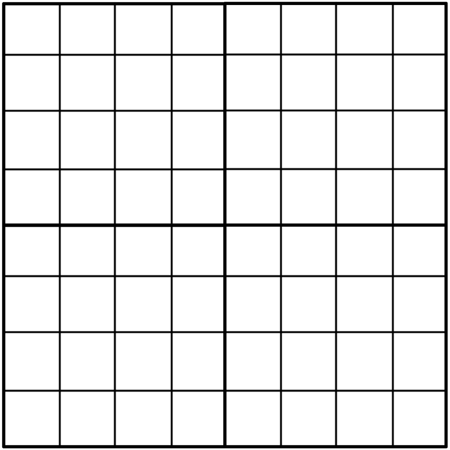
$$d(f(x, y) - (x, y)) < \varepsilon$$

Intuitivamente, teremos uma sequência de pontos "cada vez mais próximos de serem pontos fixos". E, pela continuidade da f, teremos que o limite disso será um ponto fixo.

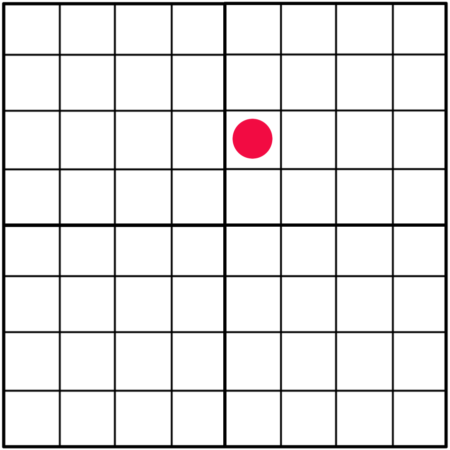
Um tabuleiro diferente

Podemos jogar Hex num tabuleiro $\{0, ..., n\} \times \{0, ..., n\}$ definindo que (x, y) é adjacente a (a, b) se, e somente se $d((a, b), (x, y)) \leq 1$ e (x, y) e (a, b) forem comparáveis (isto é, $(x \leq a$ e $y \leq b)$ ou $(a \leq x$ e $b \leq y)$).

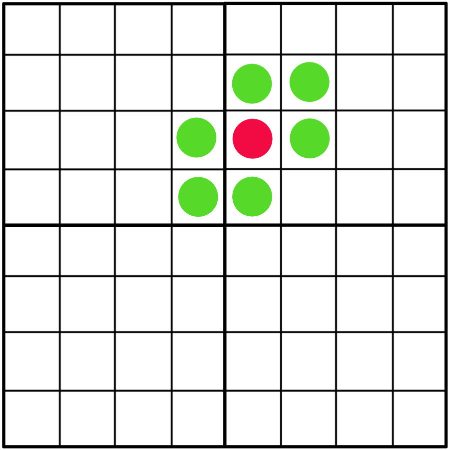
Um tabuleiro diferente



Um tabuleiro diferente



Um tabuleiro diferente



A demonstração (finalmente)

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$. Note que, se mostrarmos que existem $x, y \in [0,1]$ tais que $d(f(x,y),(x,y)) < \varepsilon$, terminamos.

A demonstração (finalmente)

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$.
Note que, se mostrarmos que existem $x, y \in [0,1]$ tais que $d(f(x,y),(x,y)) < \varepsilon$, terminamos.
Seja $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y, a, b \in [0,1]$,

$$d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow d(f(x,y), f(a,b)) < \varepsilon$$

A demonstração (finalmente)

Seja $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$. Sejam $f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $f_2 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tais que $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$. Seja $\varepsilon > 0$. Note que, se mostrarmos que existem $x, y \in [0,1]$ tais que $d(f(x,y),(x,y)) < \varepsilon$, terminamos.
Seja $\delta > 0$ tal que, para todos $x, y, a, b \in [0,1]$,

$$d((x,y),(a,b)) < \delta \Rightarrow d(f(x,y), f(a,b)) < \varepsilon$$

Seja $n > 1$ tal que $\frac{1}{n} < \delta < \varepsilon$ (podemos diminuir δ se for necessário). Vamos usar este n para definir determinar quantas casas nosso tabuleiro precisa ter.

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n+1 \times n+1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-.

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n + 1 \times n + 1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes.

Definindo um jogo

Vamos considerar um jogo $n + 1 \times n + 1$. Vamos começar usando 2 cores: H^+, H^-. Dados $x, y \in \{0, ..., n\}$, dizemos que a posição (x, y) está com a cor:

- H^+ se $f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) - \frac{x}{n} > \varepsilon$;
- H^- se $\frac{x}{n} - f_1(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) > \varepsilon$;

Note que, pela continuidade da f, H^+ e H^- não são adjacentes. Pois, se $(a, b) \in H^+$ e $(c, d) \in H^-$, somando-se as duas inequações acima obtemos

$$f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) - \frac{a}{n} + \frac{c}{n} > 2\varepsilon$$

Mas, se $(a, b), (c, d)$ são adjacentes, $\frac{c}{n} - \frac{a}{n} < \frac{1}{n} < \delta < \varepsilon$. Assim, obtemos

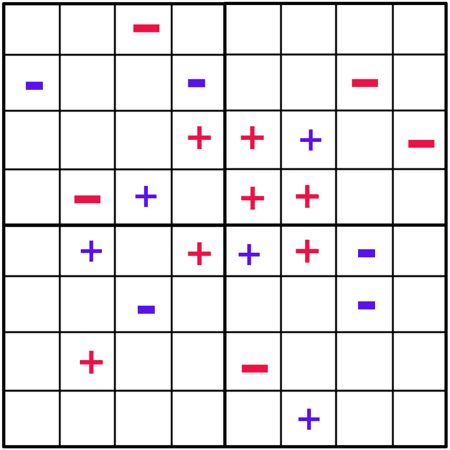
$$d(f(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}), f(\frac{c}{n}, \frac{d}{n})) \geq f_1(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}) - f_1(\frac{c}{n}, \frac{d}{n}) > \varepsilon$$

Mas, isso contradiz a continuidade da f.

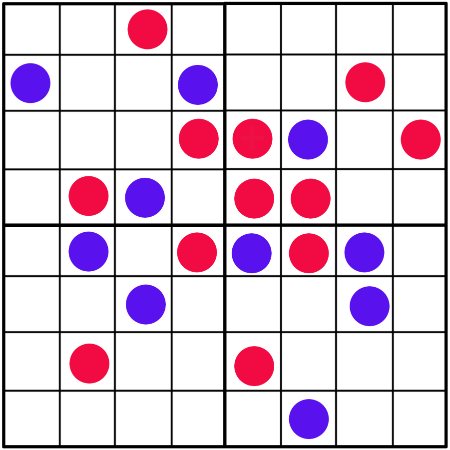
Algumas cores

		−					
						−	
			+	+			−
	−			+	+		
			+		+		
	+			−			

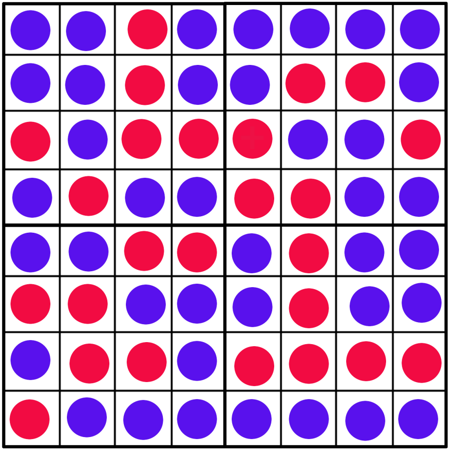
Algumas cores



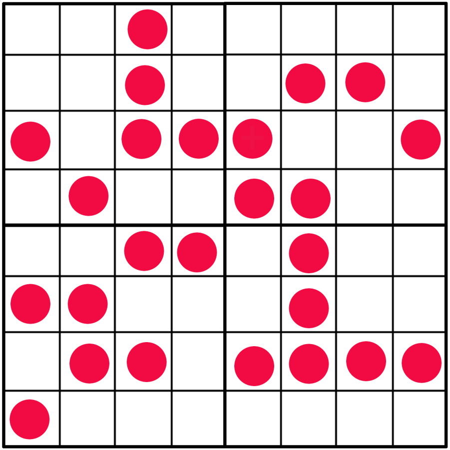
Embaçando as cores cores



Completando



Deixando só o vencedor



Empate?

Para as casas que não foram pintadas por H^+ e H^-, defina, de maneira análoga, as cores V^+ e V^-. Novamente, V^+ e V^- não são adjacentes. Considere agora as posições pintadas H^+ e H^- como as do jogador I (horizontal) e as posições pintadas com as cores V^+, V^- como as do jogador II (vertical). Note que, se houver uma casa vazia, demonstramos o teorema: se (x, y) está vazia, $d(f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}), (\frac{x}{n}, \frac{y}{n})) < \varepsilon$. Suponha que todas as casas estão preenchidas. Como não pode haver empate, um dos jogadores venceu. Sem perda de generalidade, suponha que foi o jogador I.

Não

Como H^+ e H^- não são adjacentes, temos que o caminho vitorioso de I está contido inteiramente num deles. Sem perda de generalidade, suponha que está contido em H^-. Note que isso é um absurdo, pois nenhum ponto de H^- contém um ponto da forma $(0, y)$.

Referência

Gale, David. Topological games at Princeton, a mathematical memoir; Games and Economic Behaviour, 2009.