Um dos piores pesadelos matemáticos

Leandro Fiorini Aurichi

ICMC-USP

Sexta feira 13

Pesadelo?

O que os matemáticos gostam de fazer?

Cantor

Em 1874, Cantor percebeu que havia diferentes tamanhos de infinito.

Cantor

Em 1874, Cantor percebeu que havia diferentes tamanhos de infinito.
Entre 1879 e 1884, ele notou que se podia fundamentar toda a matemática usando-se conjuntos.

Hilbert

Em 1900, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas que serviriam para guiar os matemáticos durante o século seguinte.

Hilbert

Em 1900, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas que serviriam para guiar os matemáticos durante o século seguinte.
O primeiro problema envolvia tamanho de conjuntos infinitos.

Hilbert

Em 1900, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas que serviriam para guiar os matemáticos durante o século seguinte.
O primeiro problema envolvia tamanho de conjuntos infinitos.
O segundo envolvia "construir uma base sólida para a teoria dos números".

Russel

Em 1901, Russel descobriu um paradoxo que decorria da “definição” que se tinha até então de conjuntos.

Russel

Em 1901, Russel descobriu um paradoxo que decorria da “definição” que se tinha até então de conjuntos.
Até então um conjunto era simplesmente uma coleção de coisas que satisfazem alguma propriedade. Por exemplo

Russel

Em 1901, Russel descobriu um paradoxo que decorria da “definição” que se tinha até então de conjuntos.
Até então um conjunto era simplesmente uma coleção de coisas que satisfazem alguma propriedade. Por exemplo

$$A = \{x : x \text{ é amarelo}\}$$

Russel

Em 1901, Russel descobriu um paradoxo que decorria da "definição" que se tinha até então de conjuntos.
Até então um conjunto era simplesmente uma coleção de coisas que satisfazem alguma propriedade. Por exemplo

$$A = \{x : x \text{ é amarelo}\}$$

Seguindo essa ideia, poderíamos formar o conjunto de todos os conjuntos:

$$U = \{x : x \text{ é um conjunto}\}$$

Russel

Em 1901, Russel descobriu um paradoxo que decorria da "definição" que se tinha até então de conjuntos.
Até então um conjunto era simplesmente uma coleção de coisas que satisfazem alguma propriedade. Por exemplo

$$A = \{x : x \text{ é amarelo}\}$$

Seguindo essa ideia, poderíamos formar o conjunto de todos os conjuntos:

$$U = \{x : x \text{ é um conjunto}\}$$

É claro que isso leva a coisas estranhas (por exemplo que $U \in U$).

Russel

Em 1901, Russel descobriu um paradoxo que decorria da "definição" que se tinha até então de conjuntos.
Até então um conjunto era simplesmente uma coleção de coisas que satisfazem alguma propriedade. Por exemplo

$$A = \{x : x \text{ é amarelo}\}$$

Seguindo essa ideia, poderíamos formar o conjunto de todos os conjuntos:

$$U = \{x : x \text{ é um conjunto}\}$$

É claro que isso leva a coisas estranhas (por exemplo que $U \in U$).
Mas, por enquanto, nenhuma contradição aparente.

O paradoxo de Russel

Poderíamos então considerar o seguinte conjunto:

Poderíamos então considerar o seguinte conjunto:

$$R = \{x \in U : x \notin x\}$$

O paradoxo de Russel

Poderíamos então considerar o seguinte conjunto:

$$R = \{x \in U : x \notin x\}$$

Pergunta: $R \in R$?

O paradoxo de Russel

Poderíamos então considerar o seguinte conjunto:

$$R = \{x \in U : x \notin x\}$$

Pergunta: $R \in R$?
Isso sim leva a uma contradição.

Soluções

Duas tentativas foram criadas para se tentar corrigir o problema. Uma era a de Russel no Principia Mathematica e a outra era a lista de axiomas proposta por Zermelo.

Soluções

Duas tentativas foram criadas para se tentar corrigir o problema. Uma era a de Russel no Principia Mathematica e a outra era a lista de axiomas proposta por Zermelo.
Em ambos os casos, havia axiomas que deveriam ser assumidos como verdade.

Gödel

Em 1929, Gödel terminou o seu doutorado (provando um teorema muito importante de lógica matemática) e começou a trabalhar no segundo problema de Hilbert.

Gödel

Em 1929, Gödel terminou o seu doutorado (provando um teorema muito importante de lógica matemática) e começou a trabalhar no segundo problema de Hilbert.
Mas ele percebeu que aquilo não era "tão simples assim".

A grande sacada

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;
- Defina o conjunto P de todos os naturais cuja sequência associada forma uma demonstração (com os axiomas que você escolheu no item anterior);

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;
- Defina o conjunto P de todos os naturais cuja sequência associada forma uma demonstração (com os axiomas que você escolheu no item anterior);
- Defina o conjunto D de todas os naturais cuja fórmula associada admite uma demonstração;

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;
- Defina o conjunto P de todos os naturais cuja sequência associada forma uma demonstração (com os axiomas que você escolheu no item anterior);
- Defina o conjunto D de todas os naturais cuja fórmula associada admite uma demonstração;
- Note que a fórmula "$n \notin D$" quer dizer que a fórmula associada a n não tem uma demonstração;

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;
- Defina o conjunto P de todos os naturais cuja sequência associada forma uma demonstração (com os axiomas que você escolheu no item anterior);
- Defina o conjunto D de todas os naturais cuja fórmula associada admite uma demonstração;
- Note que a fórmula "$n \notin D$" quer dizer que a fórmula associada a n não tem uma demonstração;
- Consiga uma fórmula φ cujo número associado seja algum n_0 e que tal fórmula seja equivalente a $n_0 \notin D$.

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;
- Defina o conjunto P de todos os naturais cuja sequência associada forma uma demonstração (com os axiomas que você escolheu no item anterior);
- Defina o conjunto D de todas os naturais cuja fórmula associada admite uma demonstração;
- Note que a fórmula "$n \notin D$" quer dizer que a fórmula associada a n não tem uma demonstração;
- Consiga uma fórmula φ cujo número associado seja algum n_0 e que tal fórmula seja equivalente a $n_0 \notin D$.

Vejamos o que dá para falar sobre φ: se a negação de φ for demonstrável, pela equivalência acima temos que $n_0 \in D$ é demonstrável. Assim há uma demonstração para a fórmula associada a n_0. Mas como tal fórmula é a própria φ, temos uma demonstração de uma fórmula e de sua negação.

A grande sacada

- Para cada fórmula, associe um número natural;
- Melhor que isso, para cada sequência de fórmulas, associe um número natural;
- Escolha um conjunto de axiomas que "defina" a teoria dos números;
- Defina o conjunto P de todos os naturais cuja sequência associada forma uma demonstração (com os axiomas que você escolheu no item anterior);
- Defina o conjunto D de todas os naturais cuja fórmula associada admite uma demonstração;
- Note que a fórmula "$n \notin D$" quer dizer que a fórmula associada a n não tem uma demonstração;
- Consiga uma fórmula φ cujo número associado seja algum n_0 e que tal fórmula seja equivalente a $n_0 \notin D$.

Vejamos o que dá para falar sobre φ: se a negação de φ for demonstrável, pela equivalência acima temos que $n_0 \in D$ é demonstrável. Assim há uma demonstração para a fórmula associada a n_0. Mas como tal fórmula é a própria φ, temos uma demonstração de uma fórmula e de sua negação.
No caso de φ ser demonstrável, pela equivalência temos que $n_0 \notin D$. Logo, φ não é demonstrável, novamente temos uma contradição.

Ou seja

Assim, se a gente escolhe uma lista de axiomas na esperança de definir a teoria dos números, temos duas alternativas: ou vai ter afirmações que podemos demonstrar tanto elas como suas negações, ou vai ter afirmações que não podem ser demonstradas.

Ou seja

Assim, se a gente escolhe uma lista de axiomas na esperança de definir a teoria dos números, temos duas alternativas: ou vai ter afirmações que podemos demonstrar tanto elas como suas negações, ou vai ter afirmações que não podem ser demonstradas.
Pode-se mostrar que se a lista dos axiomas que tomamos for composta apenas por "afirmações verdadeiras", então não se pode demonstrar uma afirmação e sua própria negação. Logo, a primeira possibilidade não ocorre se começarmos com uma lista de axiomas "verdadeiros".

Na prática

Note que o esquema que apresentamos funciona para qualquer lista de axiomas que fundamente a teoria dos números. Desta forma, se a gente escolhe uma lista de axiomas, em algum momento podemos nos deparar com uma afirmação que não admite uma demonstração (nem dela, nem da negação dela). Ao nos depararmos com essa afirmação, podemos incluí-la na nossa teoria.

Na prática

Note que o esquema que apresentamos funciona para qualquer lista de axiomas que fundamente a teoria dos números. Desta forma, se a gente escolhe uma lista de axiomas, em algum momento podemos nos deparar com uma afirmação que não admite uma demonstração (nem dela, nem da negação dela). Ao nos depararmos com essa afirmação, podemos incluí-la na nossa teoria.
Mas daí podemos aplicar novamente o resultado e encontrar uma nova afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada.

Na prática

Note que o esquema que apresentamos funciona para qualquer lista de axiomas que fundamente a teoria dos números. Desta forma, se a gente escolhe uma lista de axiomas, em algum momento podemos nos deparar com uma afirmação que não admite uma demonstração (nem dela, nem da negação dela). Ao nos depararmos com essa afirmação, podemos incluí-la na nossa teoria.
Mas daí podemos aplicar novamente o resultado e encontrar uma nova afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada.
Ou seja, o segundo problema de Hilbert passa a ser “irresolvível”.

Só os números?

O esquema feito anteriormente pode ser aplicado para qualquer teoria que seja "mais forte" que a teoria dos números (isto é, uma teoria na qual você consiga definir os números naturais).

Só os números?

O esquema feito anteriormente pode ser aplicado para qualquer teoria que seja "mais forte" que a teoria dos números (isto é, uma teoria na qual você consiga definir os números naturais).
Esse é o caso de ZFC, que é a lista dos axiomas da teoria dos conjuntos e é o que se entende hoje em dia como a lista dos "axiomas da Matemática".

Só os números?

O esquema feito anteriormente pode ser aplicado para qualquer teoria que seja "mais forte" que a teoria dos números (isto é, uma teoria na qual você consiga definir os números naturais).
Esse é o caso de ZFC, que é a lista dos axiomas da teoria dos conjuntos e é o que se entende hoje em dia como a lista dos "axiomas da Matemática".
Ou seja, o resultado de Gödel mostra que existe (e sempre vai existir) uma afirmação em matemática que não pode ser demonstrada nem refutada, não importa quais axiomas a gente assuma.

Ironia

O resultado de Gödel não mostra qual é de fato a afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada (quer dizer, em algum sentido mostra, mas ela tem apenas um significado técnico).

Ironia

O resultado de Gödel não mostra qual é de fato a afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada (quer dizer, em algum sentido mostra, mas ela tem apenas um significado técnico).
Mas hoje em dia são conhecidas diversas afirmações que não podem ser demonstradas nem refutadas.

Ironia

O resultado de Gödel não mostra qual é de fato a afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada (quer dizer, em algum sentido mostra, mas ela tem apenas um significado técnico).
Mas hoje em dia são conhecidas diversas afirmações que não podem ser demonstradas nem refutadas.
A primeira delas, conhecida como a "hipótese do continuum", foi mostrada consistente por Gödel em 1940 e sua negação por Cohen em 1963.

Ironia

O resultado de Gödel não mostra qual é de fato a afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada (quer dizer, em algum sentido mostra, mas ela tem apenas um significado técnico).
Mas hoje em dia são conhecidas diversas afirmações que não podem ser demonstradas nem refutadas.
A primeira delas, conhecida como a "hipótese do continuum", foi mostrada consistente por Gödel em 1940 e sua negação por Cohen em 1963.
A hipótese do continuum era o primeiro problema da lista de Hilbert.

Ironia

O resultado de Gödel não mostra qual é de fato a afirmação que não pode ser demonstrada ou refutada (quer dizer, em algum sentido mostra, mas ela tem apenas um significado técnico).
Mas hoje em dia são conhecidas diversas afirmações que não podem ser demonstradas nem refutadas.
A primeira delas, conhecida como a "hipótese do continuum", foi mostrada consistente por Gödel em 1940 e sua negação por Cohen em 1963.
A hipótese do continuum era o primeiro problema da lista de Hilbert.
E Cantor tentou até sua morte mostrar que ela era verdadeira.

Segundo teorema

Tudo que foi feito antes é baseado no fato que os axiomas escolhidos são consistentes. Mas será que podemos provar isso?

Segundo teorema

Tudo que foi feito antes é baseado no fato que os axiomas escolhidos são consistentes. Mas será que podemos provar isso?
O segundo teorema da incompletude de Gödel afirma exatamente que não.

Segundo teorema

Tudo que foi feito antes é baseado no fato que os axiomas escolhidos são consistentes. Mas será que podemos provar isso?
O segundo teorema da incompletude de Gödel afirma exatamente que não.
Na verdade, o teorema diz que as únicas teorias "suficientemente fortes" que provam sua própria consistência, são as inconsistentes.

Segundo teorema

Tudo que foi feito antes é baseado no fato que os axiomas escolhidos são consistentes. Mas será que podemos provar isso?
O segundo teorema da incompletude de Gödel afirma exatamente que não.
Na verdade, o teorema diz que as únicas teorias "suficientemente fortes" que provam sua própria consistência, são as inconsistentes.
Von Neuman "quase" provou esse teorema.

Resumo da história

"Deus existe dado que a Matemática é consistente e o Diabo existe dado que não podemos provar isso"

André Weil

Bibliografia

A. Doxiadis and C. H. Papadimitriou.
Logicomix.
WMF Martins Fontes, São Paulo, 2010.

R. M. Smullyan.
Gödel's incompleteness theorems, volume 19 of *Oxford Logic Guides*.
The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1992.