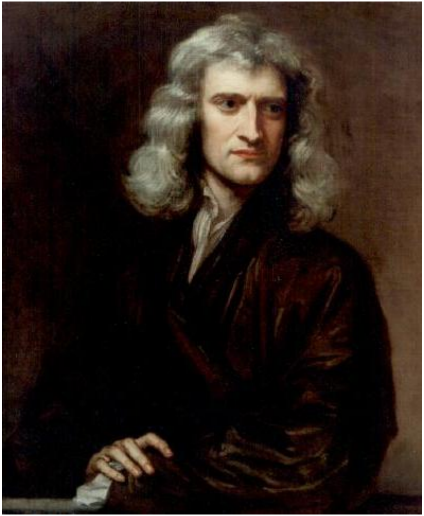
Afinal, o que são infinitesimais?

L. Arjuna Fraga Ramires

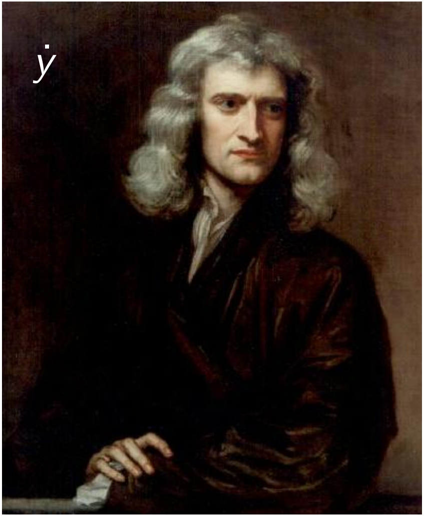
Setembro de 2022

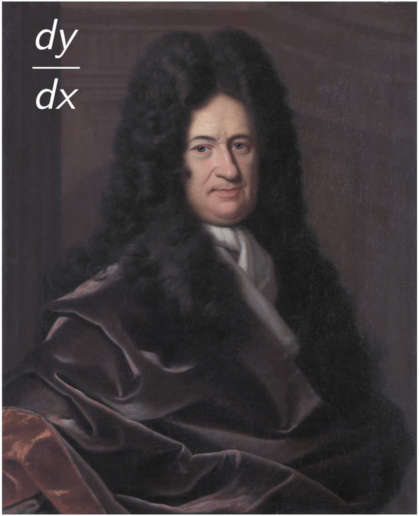
Os Primórdios do Cálculo



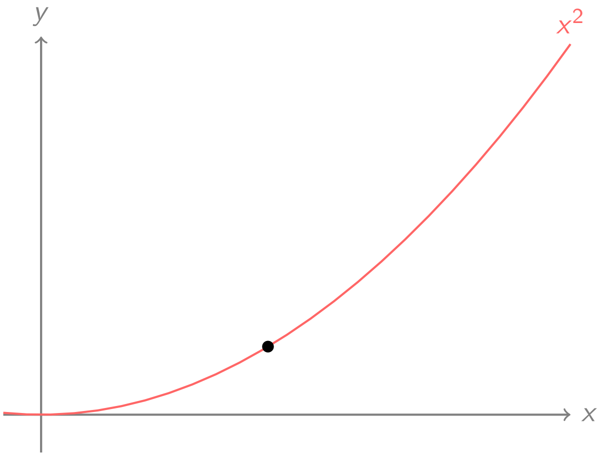
Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Os Primórdios do Cálculo

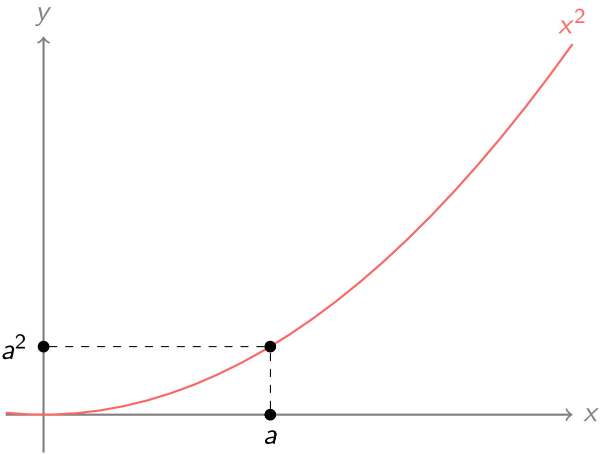




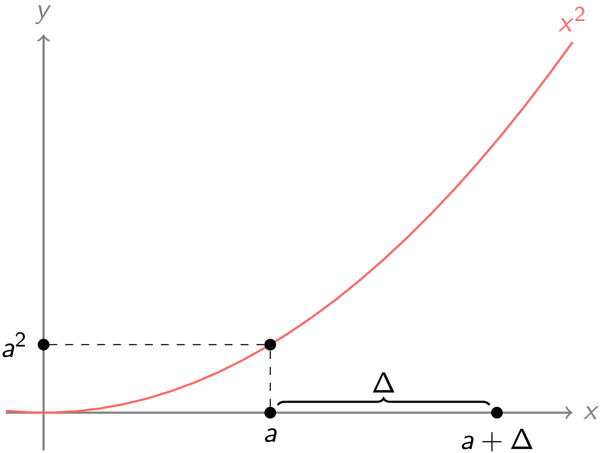
Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



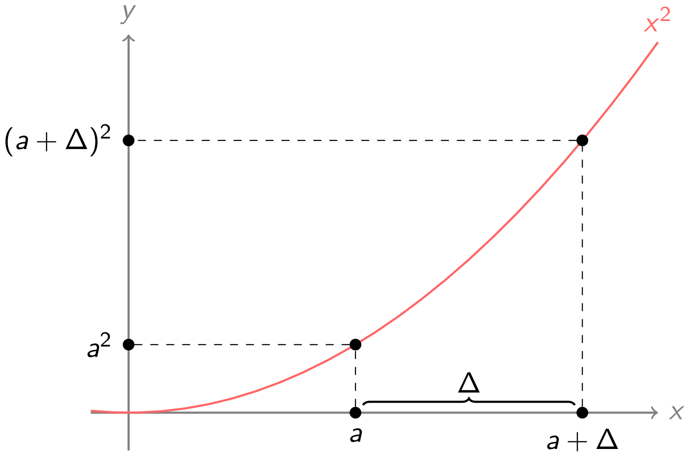
y
x^2
x

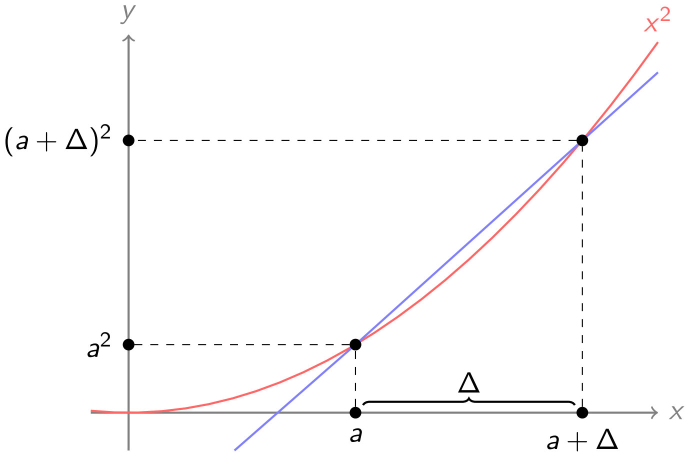


y
x^2
a^2
x
a

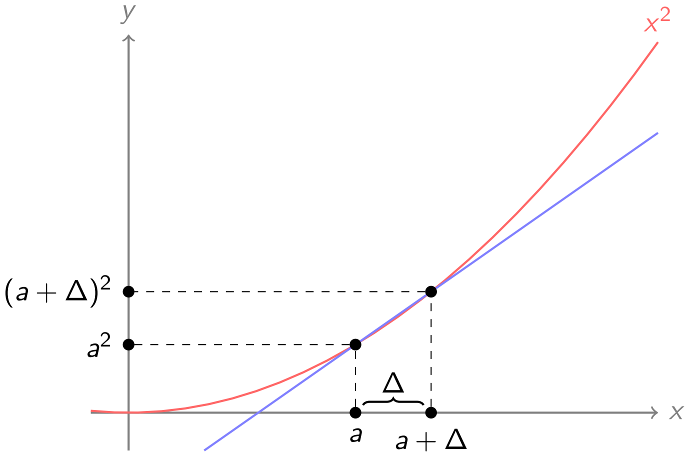


y
x^2
a^2
Δ
x
a
$a + \Delta$

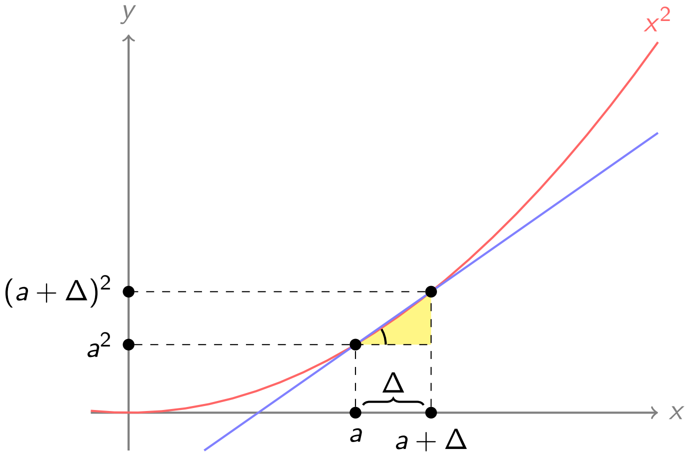

y
x^2
$(a+\Delta)^2$
a^2
Δ
x
a
$a+\Delta$

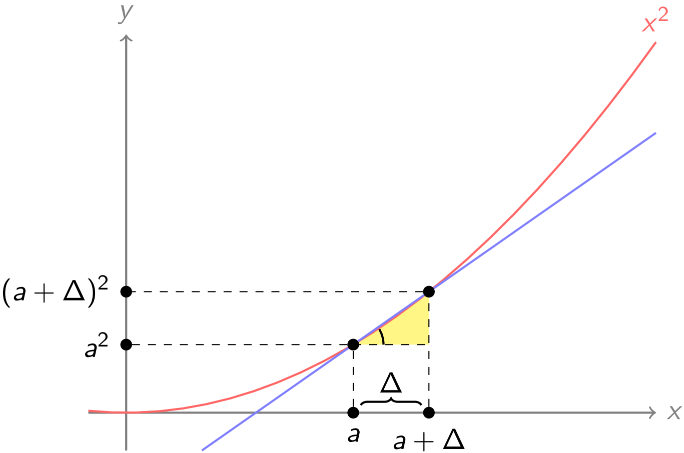


y
x^2
$(a+\Delta)^2$
a^2
Δ
x
a
$a+\Delta$

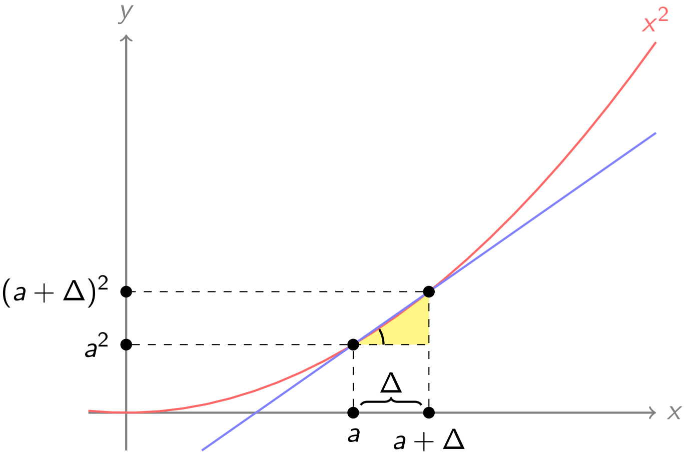


y
x^2
$(a+\Delta)^2$
a^2
Δ
x
a
$a+\Delta$

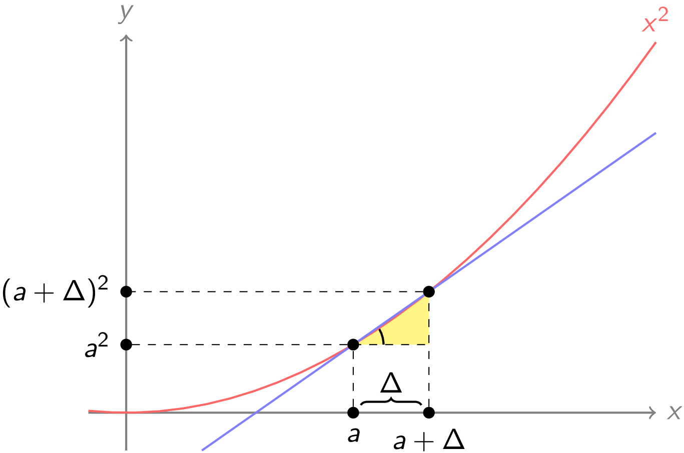

y
x^2
$(a+\Delta)^2$
a^2
Δ
x
a
$a+\Delta$



$$\frac{(a+\Delta)^2 - a^2}{\Delta}$$



$$\frac{(a+\Delta)^2 - a^2}{\Delta} = \frac{2a\Delta + \Delta^2}{\Delta} = 2a + \Delta$$

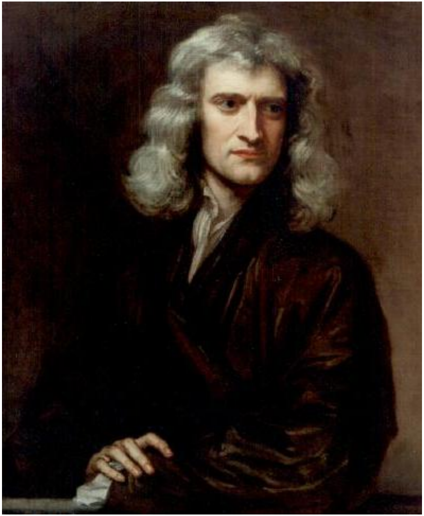


$$\frac{(a+\Delta)^2 - a^2}{\Delta} = \frac{2a\Delta + \Delta^2}{\Delta} = 2a + \Delta = 2a$$

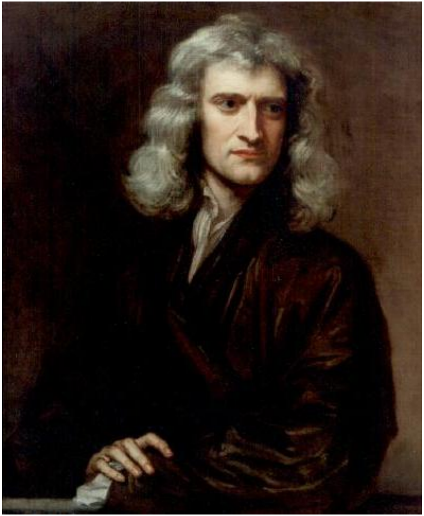
George Berkeley (1685-1753)

"Ghosts of departed quantities"

“Fictions of the mind”



Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Com o conceito de limite, podemos tomar Δ se aproximando de zero, sem falar em quantidades infinitesimais.

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

Um número x é **infinito** se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

Um número x é **infinito** se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Um número x é **infinitesimal** se $0 < x < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

Infinitos e Infinitesimais

Um número x é **infinito** se
$x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Um número x é **infinitesimal** se
$0 < x < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Propriedade Arquimediana

Não existem infinitos ou infinitesimais em $\mathbb{R}$.

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

Um Mundo com Infinitesimais

Definição (Continuidade sem Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Um Mundo com Infinitesimais

Definição (Continuidade sem Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição (Continuidade com Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, para todo x com $x \sim a$ temos $f(x) \sim f(a)$.

Definição (Continuidade sem Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição (Continuidade com Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, para todo x com $x \sim a$ temos $f(x) \sim f(a)$.

Teorema

Se as funções f e g são contínuas no ponto a, então $f \circ g$ é uma função contínua no ponto a.

Definição (Continuidade sem Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição (Continuidade com Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, para todo x com $x \sim a$ temos $f(x) \sim f(a)$.

Teorema

Se as funções f e g são contínuas no ponto a, então $f \circ g$ é uma função contínua no ponto a.

Demonstração.

$$x \sim a$$

Um Mundo com Infinitesimais

Definição (Continuidade sem Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição (Continuidade com Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, para todo x com $x \sim a$ temos $f(x) \sim f(a)$.

Teorema

Se as funções f e g são contínuas no ponto a, então $f \circ g$ é uma função contínua no ponto a.

Demonstração.

$$x \sim a \implies g(x) \sim g(a)$$

Um Mundo com Infinitesimais

Definição (Continuidade sem Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo x com $|x - a| < \delta$, temos $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definição (Continuidade com Infinitesimais)

Uma função f é **contínua** no ponto a se, para todo x com $x \sim a$ temos $f(x) \sim f(a)$.

Teorema

Se as funções f e g são contínuas no ponto a, então $f \circ g$ é uma função contínua no ponto a.

Demonstração.

$$x \sim a \implies g(x) \sim g(a) \implies f(g(x)) \sim f(g(a))$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal.

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x + dx) - f(x)$.

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x + dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x + dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Soma)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Soma)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração.

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Soma)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração.

$$d(f+g) = (f+g)(x+dx) - (f+g)(x)$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Soma)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)(x+dx) - (f+g)(x) \\ &= f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x) \end{aligned}$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Soma)

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)(x+dx) - (f+g)(x) \\ &= f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x) \\ &= df + dg \end{aligned}$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Soma)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(f+g) &= (f+g)(x+dx) - (f+g)(x) \\ &= f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x) \\ &= df + dg \end{aligned}$$

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df+dg}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

$$d(fg) = (fg)(x+dx) - (fg)(x)$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)(x+dx) - (fg)(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x) \end{aligned}$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)(x+dx) - (fg)(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx) - f(x)g(x) \end{aligned}$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)(x+dx) - (fg)(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx) - f(x)g(x) \\ &= df\ g(x+dx) + f(x)dg \end{aligned}$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
d(fg) &= (fg)(x+dx) - (fg)(x) \\
&= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x) \\
&= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx) - f(x)g(x) \\
&= df\ g(x+dx) + f(x)dg \sim df\ g(x) + f(x)dg
\end{aligned}$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra do Produto)

$$(f(x)g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g'(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)(x+dx) - (fg)(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x) \\ &= f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x+dx) + f(x)g(x+dx) - f(x)g(x) \\ &= df\ g(x+dx) + f(x)dg \sim df\ g(x) + f(x)dg \end{aligned}$$

$$\frac{d(fg)}{dx} \sim \frac{df\ g + f\ dg}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x+dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Cadeia)

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x + dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Cadeia)

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

Demonstração.

Um Mundo com Infinitesimais

Seja dx um infinitesimal. Dada uma função f, seja $df := f(x + dx) - f(x)$. Podemos definir a derivada de uma função f como a fração $\dfrac{df}{dx}$.

Proposição (Regra da Cadeia)

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

Demonstração.

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{dg}{dx}\frac{d(f \circ g)}{dg}$$

Charles Sanders Peirce (1839-1914)

"The doctrine of infinitesimals is far simpler than the doctrine of limits."

"Natural numbers were created by God, everything else is the work of men."

Leopold Kronecker (1823-1891)

"Natural numbers were created by God, everything else is the work of men."

Então por que não criamos os infinitesimais?

Leopold Kronecker (1823-1891)

Extensões

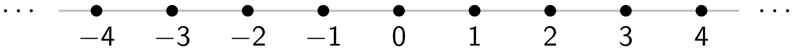
$\mathbb{N}$

$$\mathbb{N}$$

Queremos uma solução para a equação $x + 7 = 4$.

Extensões

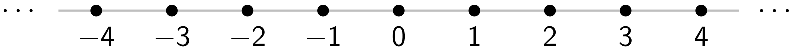
$$\mathbb{Z}$$



Queremos uma solução para a equação $x + 7 = 4$.

Extensões

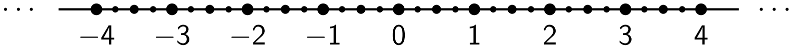
$$\mathbb{Z}$$



Queremos uma solução para a equação $2x = 1$.

Extensões

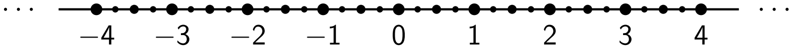
$\mathbb{Q}$



Queremos uma solução para a equação $2x = 1$.

Extensões

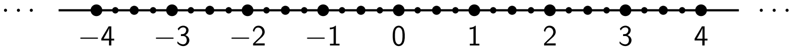
$$\mathbb{Q}$$



Queremos uma solução para a equação $x^2 = 2$.

Extensões

$$\mathbb{Q}$$

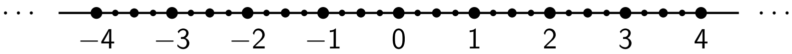


~~Queremos uma solução para a equação $x^2 = 2$.~~

Queremos que todo subconjunto limitado superiormente admita supremo.

Extensões

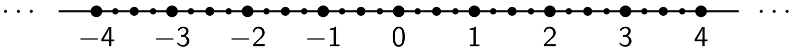
$$\mathbb{R}$$



~~Queremos uma solução para a equação $x^2 = 2$.~~
Queremos que todo subconjunto limitado superiormente admita supremo.

Extensões

$$\mathbb{R}$$



Queremos infinitesimais!

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

- $\mathbb{S}$ contém $\mathbb{R}$.

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

- $\mathbb{S}$ contém $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{S}$ contém infinitos e infinitesimais.

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

- $\mathbb{S}$ contém $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{S}$ contém infinitos e infinitesimais.
- $\mathbb{S}$ possui uma ordem.

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

- $\mathbb{S}$ contém $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{S}$ contém infinitos e infinitesimais.
- $\mathbb{S}$ possui uma ordem.
- $\mathbb{S}$ possui soma, subtração, produto, divisão...

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

- $\mathbb{S}$ contém $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{S}$ contém infinitos e infinitesimais.
- $\mathbb{S}$ possui uma ordem.
- $\mathbb{S}$ possui soma, subtração, produto, divisão...
- Toda função f definida em $\mathbb{R}$ admite uma extensão definida em $\mathbb{S}$.

Gostaríamos de encontrar um conjunto $\mathbb{S}$ tal que

- $\mathbb{S}$ contém $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{S}$ contém infinitos e infinitesimais.
- $\mathbb{S}$ possui uma ordem.
- $\mathbb{S}$ possui soma, subtração, produto, divisão...
- Toda função f definida em $\mathbb{R}$ admite uma extensão definida em $\mathbb{S}$.
- O que provarmos em $\mathbb{S}$ deve funcionar em $\mathbb{R}$.

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.

Propriedades

Extensão, Operações e Funções

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Dados $a = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ e $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots)$, definimos

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Dados $a = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ e $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots)$, definimos

- $a + b := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \dots)$

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Dados $a = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ e $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots)$, definimos

- $a + b := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \dots)$
- $a - b := (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ \dots)$

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Dados $a = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ e $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots)$, definimos

- $a + b := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \dots)$
- $a - b := (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ \dots)$
- $a \cdot b := (a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3,\ \dots)$

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Dados $a = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ e $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots)$, definimos

- $a + b := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \dots)$
- $a - b := (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ \dots)$
- $a \cdot b := (a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3,\ \dots)$
- $\frac{a}{b} := \left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \dots\right)$ se $b_i \neq 0,\ i \in \mathbb{N}$ ⚠

Seja $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_1,\ r_2,\ r_3,\ \dots) : r_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$.
Identificamos o real $r \in \mathbb{R}$ com a sequência $(r,\ r,\ r,\ \dots) \in \mathbb{S}$.

Dados $a = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ e $b = (b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots)$, definimos

- $a + b := (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3,\ \dots)$
- $a - b := (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3,\ \dots)$
- $a \cdot b := (a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3,\ \dots)$
- $\frac{a}{b} := \left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \dots\right)$ se $b_i \neq 0,\ i \in \mathbb{N}$ ⚠
- Se f é uma função definida nos reais, então

$$f(a) := (f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ \dots)$$

Exemplo

Exemplo

$$e < \pi, \text{ então } (e,\ e,\ e,\ \dots) < (\pi,\ \pi,\ \pi,\ \dots)$$

Propriedades

Ordem

Exemplo

$$e < \pi, \text{ então } (e,\ e,\ e,\ \ldots) < (\pi,\ \pi,\ \pi,\ \ldots)$$

$$(1,\ 2,\ 3,\ \ldots) > (0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Exemplo

$$e < \pi, \text{ então } (e,\ e,\ e,\ \dots) < (\pi,\ \pi,\ \pi,\ \dots)$$

$$(1,\ 2,\ 3,\ \dots) > (0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$(1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \dots)\ ?\ (-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

Exemplo

$$e < \pi, \text{ então } (e,\ e,\ e,\ \dots) < (\pi,\ \pi,\ \pi,\ \dots)$$

$$(1,\ 2,\ 3,\ \dots) > (0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$(1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \dots) < (-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

Exemplo

$$e < \pi, \text{ então } (e,\ e,\ e,\ \dots) < (\pi,\ \pi,\ \pi,\ \dots)$$

$$(1,\ 2,\ 3,\ \dots) > (0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$(1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \dots) < (-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots)\ ?\ (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots)$$

Dados $a, b \in \mathbb{S}$ diremos que $a < b$ se $a_i < b_i$ para todo $i \in I$, onde $I \subset \mathbb{N}$ é um conjunto **muito grande**.

Exemplo

$$e < \pi, \text{ então } (e,\ e,\ e,\ \dots) < (\pi,\ \pi,\ \pi,\ \dots)$$

$$(1,\ 2,\ 3,\ \dots) > (0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

$$(1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \dots) < (-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$$

$$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots)\ ?\ (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots)$$

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.
- Se $S \in U$ e $S \subseteq T$, então $T \in U$.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.
- Se $S \in U$ e $S \subseteq T$, então $T \in U$.
- Se $S, T \in U$, então $S \cap T \in U$.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.
- Se $S \in U$ e $S \subseteq T$, então $T \in U$.
- Se $S, T \in U$, então $S \cap T \in U$.
- Para $S \subset \mathbb{N}$, temos $S \in U$ ou $S^c \in U$.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.
- Se $S \in U$ e $S \subseteq T$, então $T \in U$.
- Se $S, T \in U$, então $S \cap T \in U$.
- Para $S \subset \mathbb{N}$, temos $S \in U$ ou $S^c \in U$.

Sejam $a = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots)$ e $b = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots)$.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.
- Se $S \in U$ e $S \subseteq T$, então $T \in U$.
- Se $S, T \in U$, então $S \cap T \in U$.
- Para $S \subset \mathbb{N}$, temos $S \in U$ <u>ou</u> $S^c \in U$.

Sejam $a = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots)$ e $b = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots)$.

Então $a_i > b_i$ para $i \in \{0, 2, 4, \dots\}$ e $a_i < b_i$ para $i \in \{1, 3, 5, \dots\}$.

Subconjuntos Muito Grandes

Seja U um conjunto de **conjuntos muito grandes** de naturais.

Então U deve ter as seguintes propriedades:

- Se S é finito, então $S \notin U$.
- Se $S \in U$ e $S \subseteq T$, então $T \in U$.
- Se $S, T \in U$, então $S \cap T \in U$.
- Para $S \subset \mathbb{N}$, temos $S \in U$ <u>ou</u> $S^c \in U$.

Sejam $a = (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots)$ e $b = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \dots)$.

Então $a_i > b_i$ para $i \in \{0, 2, 4, \dots\}$ e $a_i < b_i$ para $i \in \{1, 3, 5, \dots\}$.

O conjunto dos pares <u>ou</u> o conjunto dos ímpares deve ser muito grande.

404

Not found

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Propriedades
Igualdade

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

$a > b$ se $a_i > b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Propriedades

Igualdade

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

$a > b$ se $a_i > b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Mas e se $a_i = b_i$ para um conjunto muito grande de índices?

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

$a > b$ se $a_i > b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Mas e se $a_i = b_i$ para um conjunto muito grande de índices?

Nesse caso $a = b$!

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

$a > b$ se $a_i > b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Mas e se $a_i = b_i$ para um conjunto muito grande de índices?

Nesse caso $a = b$!

Exemplo

Se $b \neq (0,\ 0,\ 0,\ \dots)$, então $b_i = 0$ no máximo para um conjunto muito pequeno de índices.

Propriedades

Igualdade

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

$a > b$ se $a_i > b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Mas e se $a_i = b_i$ para um conjunto muito grande de índices?

Nesse caso $a = b$!

Exemplo

Se $b \neq (0,\ 0,\ 0,\ \dots)$, então $b_i = 0$ no máximo para um conjunto muito pequeno de índices. Trocando $b_i = 0$ por $b_i = 1$ nesses índices, alteramos apenas um conjunto muito pequeno de índices.

$a < b$ se $a_i < b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

$a > b$ se $a_i > b_i$ para um conjunto muito grande de índices.

Mas e se $a_i = b_i$ para um conjunto muito grande de índices?

Nesse caso $a = b$!

Exemplo

Se $b \neq (0,\ 0,\ 0,\ \dots)$, então $b_i = 0$ no máximo para um conjunto muito pequeno de índices. Trocando $b_i = 0$ por $b_i = 1$ nesses índices, alteramos apenas um conjunto muito pequeno de índices. Assim, a divisão por b está bem definida.

Para todo real $r > 0$, temos

$$0 < \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\right) < (r,\ r,\ r,\ r,\ \dots) < (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots)$$

Assim, segue que $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\right)$ é um número infinitesimal e $(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots)$ é um número infinito.

Hiperreais

O conjunto que acabamos de definir se chama **conjunto dos números hiperreais**, e é comumente denotado por ${}^*\mathbb{R}$.

Hiperreais

O conjunto que acabamos de definir se chama **conjunto dos números hiperreais**, e é comumente denotado por $^*\mathbb{R}$.

Teorema (Princípio da Transferência)

Toda sentença de primeira ordem que é verdade em $\mathbb{R}$ é verdade em $^*\mathbb{R}$ e vice versa.

Hiperreais

O conjunto que acabamos de definir se chama **conjunto dos números hiperreais**, e é comumente denotado por ${}^*\mathbb{R}$.

Teorema (Princípio da Transferência)

Toda sentença de primeira ordem que é verdade em $\mathbb{R}$ é verdade em ${}^*\mathbb{R}$ e vice versa.

Definição

Uma **sentença de primeira ordem** é uma afirmação sobre elementos, enquanto uma **sentença de ordem superior** é uma afirmação sobre subconjuntos.

Corpo

Um conjunto K munido de duas operações $+$ e $\cdot$ é dito **corpo** se satisfaz

Para todos $a, b, c \in K$

A1 $(a+b)+c = a+(b+c)$

A2 $a+b = b+a$

A3 $\exists 0 \in K : a+0 = a$

A4 $\exists -a \in K : a+(-a) = 0$

D $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

P1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P2 $a \cdot b = b \cdot a$

P3 $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = a$

P4 $\exists a^{-1} \in K : a \cdot (a^{-1}) = 1,\ a \neq 0$

Corpo

Um conjunto K munido de duas operações $+$ e $\cdot$ é dito **corpo** se satisfaz

Para todos $a, b, c \in K$

A1 $(a+b)+c = a+(b+c)$

A2 $a+b = b+a$

A3 $\exists 0 \in K : a+0 = a$

A4 $\exists -a \in K : a+(-a) = 0$

D $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

P1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P2 $a \cdot b = b \cdot a$

P3 $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = a$

P4 $\exists a^{-1} \in K : a \cdot (a^{-1}) = 1,\ a \neq 0$

A proposição "K é corpo" é uma sentença de primeira ordem.

Corpo

Um conjunto K munido de duas operações $+$ e $\cdot$ é dito **corpo** se satisfaz

Para todos $a, b, c \in K$

- A1 $(a+b)+c = a+(b+c)$
- A2 $a+b = b+a$
- A3 $\exists 0 \in K : a+0 = a$
- A4 $\exists -a \in K : a+(-a) = 0$
- D $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

- P1 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- P2 $a \cdot b = b \cdot a$
- P3 $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = a$
- P4 $\exists a^{-1} \in K : a \cdot (a^{-1}) = 1,\ a \neq 0$

A proposição "K é corpo" é uma sentença de primeira ordem.

Como $\mathbb{R}$ é corpo, temos ${}^*\mathbb{R}$ é corpo.

Corpo Ordenado

Um corpo K munido de uma ordem $<$ é dito **corpo ordenado** se satisfaz

Para todos $a, b, c \in K$

- O1 Se $a < b$ então $a + c < b + c$
- O2 Se $0 < a$ e $0 < b$ então $0 < a \cdot b$

Corpo Ordenado

Um corpo K munido de uma ordem $<$ é dito **corpo ordenado** se satisfaz

Para todos $a, b, c \in K$

O1 Se $a < b$ então $a + c < b + c$

O2 Se $0 < a$ e $0 < b$ então $0 < a \cdot b$

A proposição "K é corpo ordenado" é uma sentença de primeira ordem.

Corpo Ordenado

Um corpo K munido de uma ordem $<$ é dito **corpo ordenado** se satisfaz

Para todos $a, b, c \in K$

- O1 Se $a < b$ então $a + c < b + c$
- O2 Se $0 < a$ e $0 < b$ então $0 < a \cdot b$

A proposição "K é corpo ordenado" é uma sentença de primeira ordem.

Como $\mathbb{R}$ é corpo ordenado, temos ${}^*\mathbb{R}$ é corpo ordenado.

Corpo Ordenado Completo

Um corpo ordenado K é dito **corpo ordenado completo** se todo subconjunto $S \subset K$ limitado superiormente admite supremo.

Corpo Ordenado Completo

Um corpo ordenado K é dito **corpo ordenado completo** se todo subconjunto $S \subset K$ limitado superiormente admite supremo.

A proposição "K é corpo ordenado completo" NÃO é uma sentença de primeira ordem.

Corpo Ordenado Completo

Um corpo ordenado K é dito **corpo ordenado completo** se todo subconjunto $S \subset K$ limitado superiormente admite supremo.

A proposição "K é corpo ordenado completo" NÃO é uma sentença de primeira ordem.

Com efeito, $\mathbb{R}$ é corpo ordenado completo, mas $^*\mathbb{R}$ não.

Infinitos

Um número x é infinito se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Infinitos

Um número x é infinito se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A proposição "X contém infinitos" é uma sentença de primeira ordem?

Infinitos

Um número x é infinito se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A proposição "X contém infinitos" é uma sentença de primeira ordem?

Quando transferimos uma sentença de $\mathbb{R}$ para ${}^*\mathbb{R}$ devemos tomar o cuidado de transferir também constantes, funções, relações, etc.

Um número x é infinito se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A proposição "X contém infinitos" é uma sentença de primeira ordem?

Quando transferimos uma sentença de $\mathbb{R}$ para ${}^*\mathbb{R}$ devemos tomar o cuidado de transferir também constantes, funções, relações, etc.

Assim, em ${}^*\mathbb{R}$, estaremos nos perguntando se existem números x tais que $x > n$ para todo $n \in {}^*\mathbb{N} = \{(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \dots) : n_i \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$.

Infinitos

Um número x é infinito se $x > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A proposição "X contém infinitos" é uma sentença de primeira ordem?

Quando transferimos uma sentença de $\mathbb{R}$ para ${}^*\mathbb{R}$ devemos tomar o cuidado de transferir também constantes, funções, relações, etc.

Assim, em ${}^*\mathbb{R}$, estaremos nos perguntando se existem números x tais que $x > n$ para todo $n \in {}^*\mathbb{N} = \{(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \dots) : n_i \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$.

Com efeito, $\mathbb{R}$ não contém infinitos e ${}^*\mathbb{R}$ não contém hiperinfinitos.

Derivadas

Se f é uma função e α é um infinitesimal, a fração $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ está sempre bem definida.

Derivadas

Se f é uma função e α é um infinitesimal, a fração $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ está sempre bem definida.

Se f é contínua, então $|f(x+\alpha)-f(x)|$ é um infinitesimal.

Derivadas

Se f é uma função e α é um infinitesimal, a fração $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ está sempre bem definida.

Se f é contínua, então $|f(x+\alpha)-f(x)|$ é um infinitesimal.

A função f é **diferenciável** se $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \sim \dfrac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta}$ para quaisquer α, β infinitesimais.

Derivadas

Se f é uma função e α é um infinitesimal, a fração $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ está sempre bem definida.

Se f é contínua, então $|f(x+\alpha)-f(x)|$ é um infinitesimal.

A função f é **diferenciável** se $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha} \sim \dfrac{f(x+\beta)-f(x)}{\beta}$ para quaisquer α, β infinitesimais.

Nesse caso, a **derivada** de f é o único real infinitamente próximo de $\dfrac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ para todo infinitesimal α.

Integrais

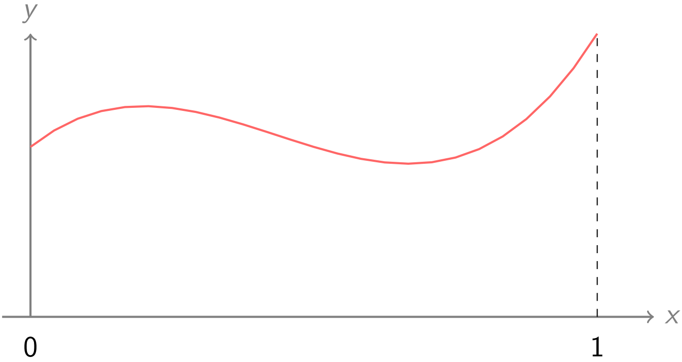
Se f é uma função, definimos

$$\int_0^1 f(x)dx \overset{?}{:=} \sum_{x \in [0,1]} f(x)dx$$

Integrais

Se f é uma função, definimos

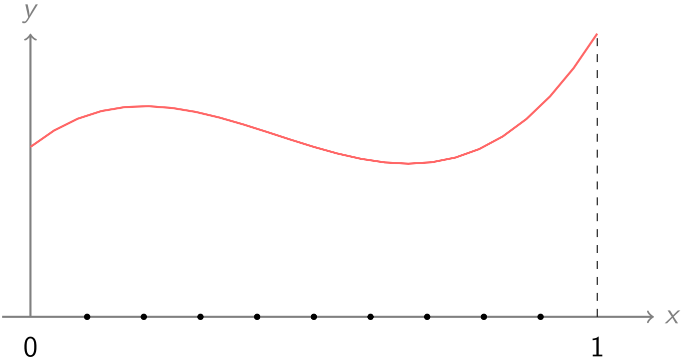
$$\int_0^1 f(x)dx \overset{?}{:=} \sum_{x\in[0,1]} f(x)dx$$



Integrais

Se f é uma função, definimos

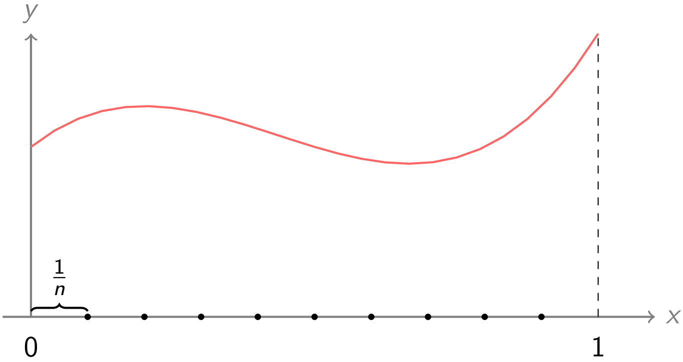
$$\int_0^1 f(x)dx :\overset{?}{=} \sum_{x \in [0,1]} f(x)dx$$



Integrais

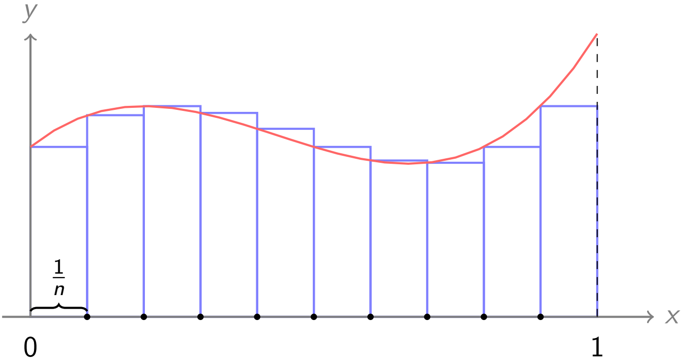
Se f é uma função, definimos

$$\int_0^1 f(x)dx \overset{?}{:=} \sum_{x\in[0,1]} f(x)dx$$



Se f é uma função, definimos

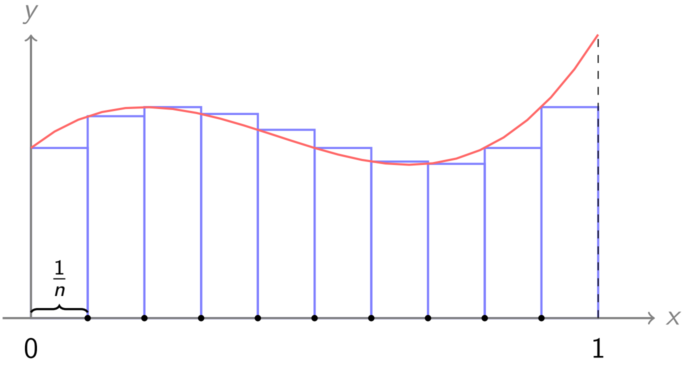
$$\int_0^1 f(x)dx \overset{?}{:=} \sum_{x\in[0,1]} f(x)dx$$



Integrais

Se f é uma função, definimos

$$\int_0^1 f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

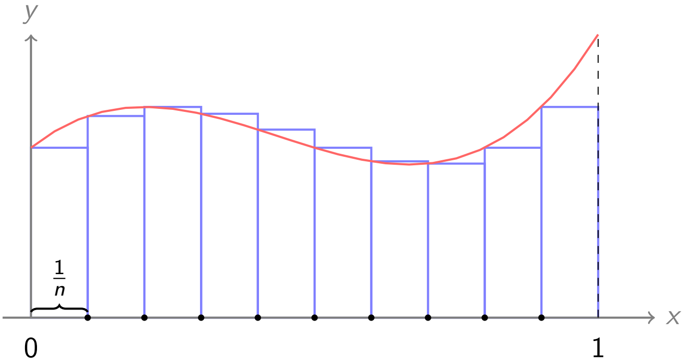


Integrais

Se f é uma função, definimos

$$\int_0^1 f(x)dx := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

onde n é um hipernatural infinito.



Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \frac{dF}{dx} \sim \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \frac{dF}{dx} \sim \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Em particular, $f(x) \sim \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n(F(x+\frac{1}{n}) - F(x))$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \dfrac{dF}{dx} \sim \dfrac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Em particular, $f(x) \sim \dfrac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n(F(x+\frac{1}{n}) - F(x))$.

$$\int_0^1 f(x)dx := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \frac{dF}{dx} \sim \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Em particular, $f(x) \sim \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n(F(x+\frac{1}{n}) - F(x))$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &:= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &\sim \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} n(F\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right))\end{aligned}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \dfrac{dF}{dx} \sim \dfrac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Em particular, $f(x) \sim \dfrac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n(F(x+\frac{1}{n}) - F(x))$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &:= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&\sim \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} n(F\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \frac{dF}{dx} \sim \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Em particular, $f(x) \sim \frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n(F(x+\frac{1}{n}) - F(x))$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &:= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&\sim \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} n(F\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{0}{n}\right) + F\left(\frac{2}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{n}{n}\right) - F\left(\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam F função diferenciável e $f(x) = \dfrac{dF}{dx} \sim \dfrac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$.

Em particular, $f(x) \sim \dfrac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n(F(x+\frac{1}{n}) - F(x))$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &:= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&\sim \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} n(F\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{0}{n}\right) + F\left(\frac{2}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{n}{n}\right) - F\left(\frac{n-1}{n}\right) \\
&= F(1) - F(0)
\end{aligned}
$$

Ada Lovelace (1815-1852)

“Understand well as I may, my comprehension can only be an infinitesimal fraction of all I want to understand.”

Referências

[1] *Hyperreal Numbers: An Introduction to Infinitesimals and Nonstandard Analysis*. YouTube. URL: www.youtube.com/watch?v=ArAjEq8uFvA (acesso em 09/2022).

[2] H. Jerome Keisler. *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*. Courier Corporation, 2012.

[3] Steven Strogatz. *Infinite Powers. How Calculus Reveals the Secrets of the Universe*. Mariner Books, 2019. ISBN: 9781328880017.