# Grafos, hipercubos, e o maior número que você já viu

Érik Amorim

ICMC - USP São Carlos (?)

Março de 2014

# Resumo

- Grafos

# Resumo

- Grafos
- Hipercubos

# Resumo

- Grafos
- Hipercubos
- E o maior número que você já viu

# Resumo

- Grafos
- Hipercubos
- E o maior número que você já viu

**Vale um certificado laranja**

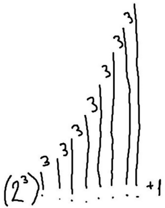
Alguém trouxe um número grande? Só vale uma tentativa por pessoa.

# Resumo

- Grafos
- Hipercubos
- E o maior número que você já viu

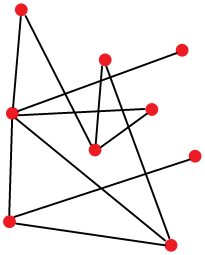
**Vale um certificado laranja**

Alguém trouxe um número grande? Só vale uma tentativa por pessoa.



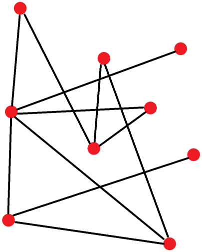
# Grafos

Grafo



# Grafos

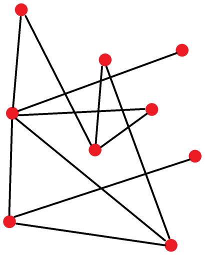
Grafo



Garfo

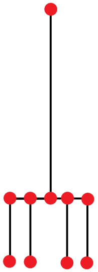
# Grafos

Grafo



Garfo

Grarfo



# Grafos

### Grafo

Um grafo é um conjunto de pontos (**vértices**) no plano, ligados entre si por segmentos de reta (**arestas**).

# Grafos

## Grafo

Um grafo é um conjunto de pontos (**vértices**) no plano, ligados entre si por segmentos de reta (**arestas**). Vamos pedir também que:

- Nenhuma aresta ligue um ponto a si mesmo
- Nenhum par de pontos seja ligado por mais de uma aresta

# Grafos

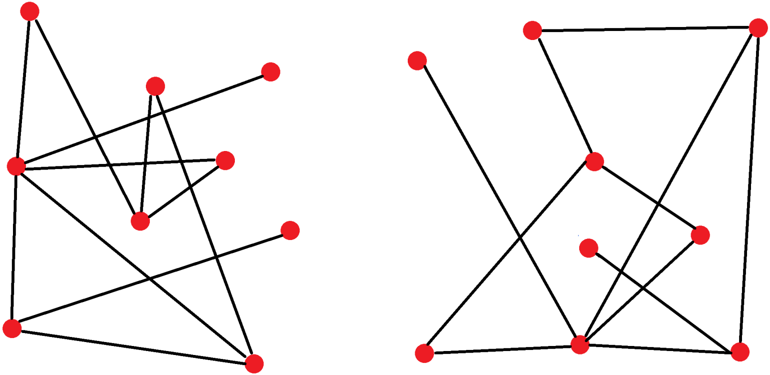
## Grafo

Um grafo é um conjunto de pontos (**vértices**) no plano, ligados entre si por segmentos de reta (**arestas**). Vamos pedir também que:

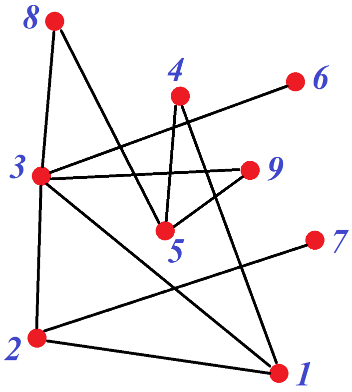
- Nenhuma aresta ligue um ponto a si mesmo
- Nenhum par de pontos seja ligado por mais de uma aresta

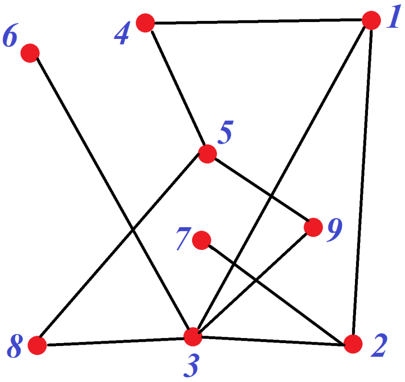
O que determina um grafo são os vértices e suas ligações, mas não sua disposição no plano.

# Grafos



# Grafos



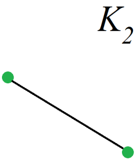



# Grafos completos

Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.

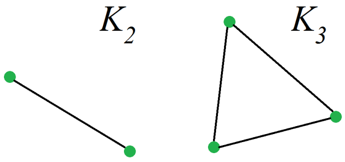
# Grafos completos

Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.



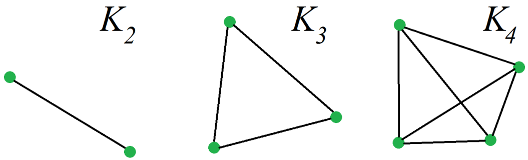
# Grafos completos

Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.



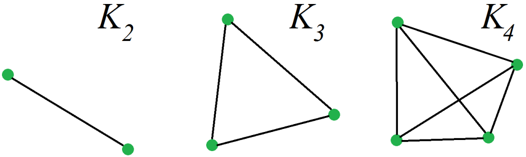
# Grafos completos

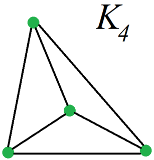
Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.



## Grafos completos

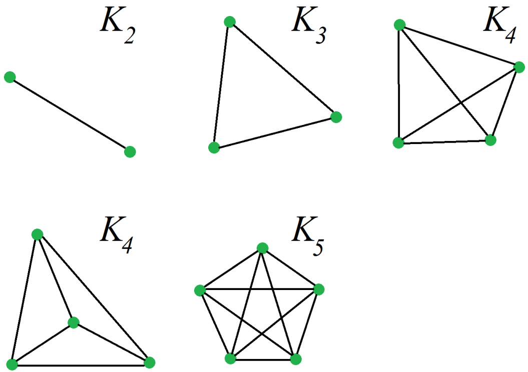
Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.



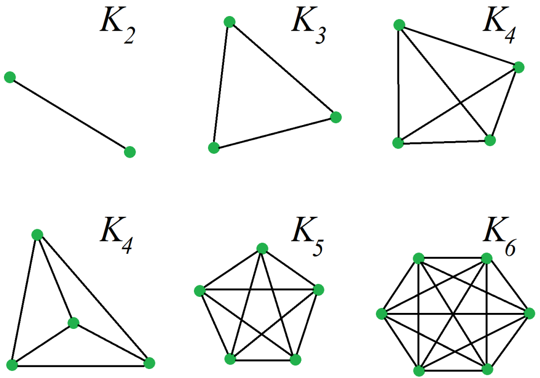
# Grafos completos

Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.



# Grafos completos

Chamamos de grafo completo de grau $n$, ou $K_n$, o grafo de $n$ vértices que possui todas as arestas.



# Grafos completos

# Teoria Extremal dos Grafos

O problema que queremos enunciar se encaixa na área de **Teoria Extremal dos Grafos**

## Teoria Extremal dos Grafos

O problema que queremos enunciar se encaixa na área de **Teoria Extremal dos Grafos**: procurar o maior ou menor grafo que satisfaz certa propriedade.

# Teoria Extremal dos Grafos

O problema que queremos enunciar se encaixa na área de **Teoria Extremal dos Grafos**: procurar o maior ou menor grafo que satisfaz certa propriedade.

> "Extremal graph theory, in its strictest sense, is a branch of graph theory developed and loved by Hungarians." (Bollobás, 2004)

# Teoria de Ramsey

Vamos brincar de pintar as arestas de um grafo completo usando duas cores: vermelho e azul.

# Teoria de Ramsey

Vamos brincar de pintar as arestas de um grafo completo usando duas cores: vermelho e azul. Entramos assim em problemas da **Teoria de Ramsey**.

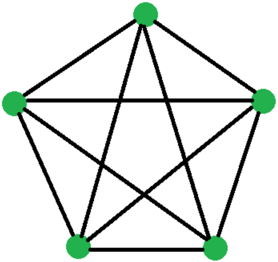
# Teoria de Ramsey

Vamos brincar de pintar as arestas de um grafo completo usando duas cores: vermelho e azul. Entramos assim em problemas da **Teoria de Ramsey**.

## Pintando o $K_5$

**Um típico problema**

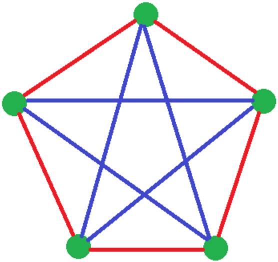
É possível pintar as arestas de um $K_5$ de forma que não existam triângulos monocromáticos?



# Pintando o $K_5$

**Um típico problema**

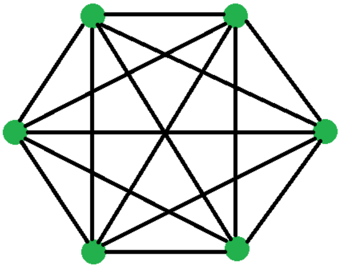
É possível pintar as arestas de um $K_5$ de forma que não existam triângulos monocromáticos? **Sim.**



# Pintando o $K_6$

**Outro típico problema**

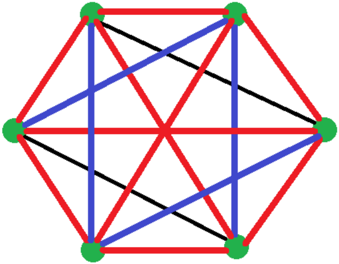
É possível pintar as arestas de um $K_6$ de forma que não existam triângulos monocromáticos?



# Pintando o $K_6$

**Outro típico problema**

É possível pintar as arestas de um $K_6$ de forma que não existam triângulos monocromáticos? **Não.**

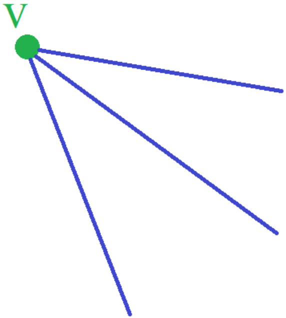


# Demonstração

Seja $v$ um vértice qualquer do $K_6$. Certamente partem de $v$ pelo menos 3 arestas azuis ou pelo menos 3 arestas vermelhas.

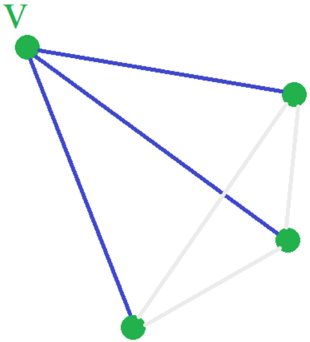
# Demonstração

Seja $v$ um vértice qualquer do $K_6$. Certamente partem de $v$ pelo menos 3 arestas azuis ou pelo menos 3 arestas vermelhas. Suponha SPG que partem 3 azuis.



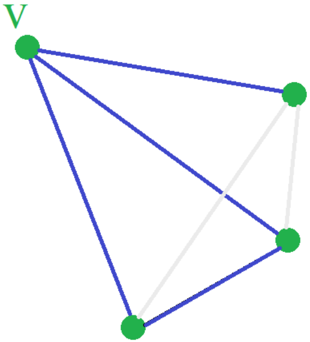
# Demonstração

Considere os três outros vértices aos quais elas ligam $v$, e considere as arestas que os ligam entre si.



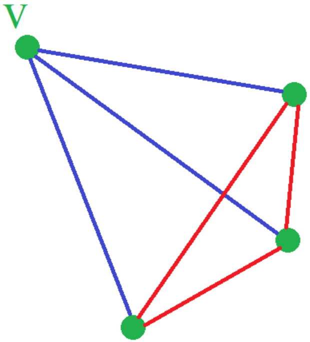
# Demonstração

Se uma dessas arestas for azul, então existe um triângulo monocromático do qual $v$ faz parte.



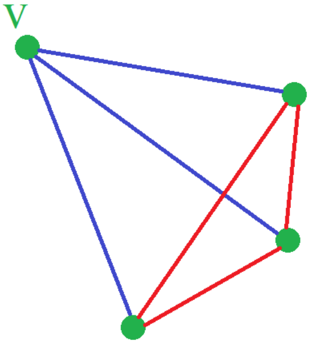
## Demonstração

Se as três forem vermelhas, então os três vértices formam um triângulo monocromático.



# Demonstração

Se as três forem vermelhas, então os três vértices formam um triângulo monocromático. ■



# Pintando o $K_7$

## Mais um típico problema

É possível pintar as arestas de um $K_7$ de forma que não existam triângulos monocromáticos?

# Pintando o $K_7$

**Mais um típico problema**

É possível pintar as arestas de um $K_7$ de forma que não existam triângulos monocromáticos? **Não.**

# Pintando o $K_7$

**Mais um típico problema**

É possível pintar as arestas de um $K_7$ de forma que não existam triângulos monocromáticos? **Não.**

É porque $K_6 \subset K_7$.

# Pintando o $K_7$

**Mais um típico problema**

É possível pintar as arestas de um $K_7$ de forma que não existam triângulos monocromáticos? **Não.**

É porque $K_6 \subset K_7$.

Se usarmos duas cores para pintar um grafo completo de $n$ vértices, então é garantido que existirá algum triângulo monocromático para $n \geq 6$, mas não para $n$ menor.

# Pintando o $K_7$

**Mais um típico problema**

É possível pintar as arestas de um $K_7$ de forma que não existam triângulos monocromáticos? **Não.**

É porque $K_6 \subset K_7$.

Se usarmos duas cores para pintar um grafo completo de $n$ vértices, então é garantido que existirá algum triângulo monocromático para $n \geq 6$, mas não para $n$ menor. Abreviamos este fato dizendo que

$$R(3) = 6$$

# Amigos em uma festa

Você pode enunciar este fato da seguinte maneira:

# Amigos em uma festa

Você pode enunciar este fato da seguinte maneira:

Em uma festa com 6 ou mais pessoas, com certeza existem

# Amigos em uma festa

Você pode enunciar este fato da seguinte maneira:

Em uma festa com 6 ou mais pessoas, com certeza existem

- Três pessoas que se conhecem entre si; ou
- Três pessoas que não se conhecem.

# Números de Ramsey

$R(2) = 2$ $\qquad$ $R(3) = 6$

# Números de Ramsey

$R(2) = 2$

$R(3) = 6$

$R(4) = 18$

$R(5) = 43 \sim 49$

# Números de Ramsey

$$R(2) = 2 \qquad R(3) = 6$$
$$R(4) = 18 \qquad R(5) = 43 \sim 49$$
$$R(6) = 102 \sim 165 \qquad R(7) = 205 \sim 540$$

# Números de Ramsey

$R(2) = 2$ $\quad$ $R(3) = 6$

$R(4) = 18$ $\quad$ $R(5) = 43 \sim 49$

$R(6) = 102 \sim 165$ $\quad$ $R(7) = 205 \sim 540$

$R(8) = 282 \sim 1870$ $\quad$ $R(9) = 565 \sim 6588$

# Números de Ramsey

$R(2) = 2$ $\quad$ $R(3) = 6$

$R(4) = 18$ $\quad$ $R(5) = 43 \sim 49$

$R(6) = 102 \sim 165$ $\quad$ $R(7) = 205 \sim 540$

$R(8) = 282 \sim 1870$ $\quad$ $R(9) = 565 \sim 6588$

"Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of R(5) or they will destroy our planet.

# Números de Ramsey

$R(2) = 2$ | $R(3) = 6$
$R(4) = 18$ | $R(5) = 43 \sim 49$
$R(6) = 102 \sim 165$ | $R(7) = 205 \sim 540$
$R(8) = 282 \sim 1870$ | $R(9) = 565 \sim 6588$

"Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of R(5) or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value.

# Números de Ramsey

$R(2) = 2$ $\quad$ $R(3) = 6$
$R(4) = 18$ $\quad$ $R(5) = 43 \sim 49$
$R(6) = 102 \sim 165$ $\quad$ $R(7) = 205 \sim 540$
$R(8) = 282 \sim 1870$ $\quad$ $R(9) = 565 \sim 6588$

"Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of R(5) or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for R(6).

# Números de Ramsey

| | |
|---|---|
| $R(2) = 2$ | $R(3) = 6$ |
| $R(4) = 18$ | $R(5) = 43 \sim 49$ |
| $R(6) = 102 \sim 165$ | $R(7) = 205 \sim 540$ |
| $R(8) = 282 \sim 1870$ | $R(9) = 565 \sim 6588$ |

"Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of R(5) or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for R(6). In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens." (Joel Spencer, 1994)

# Hipercubos

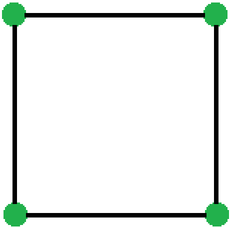
Cubo de dimensão 0:

# Hipercubos

Cubo de dimensão 1:

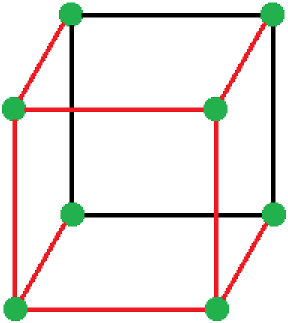
# Hipercubos

Cubo de dimensão 2:



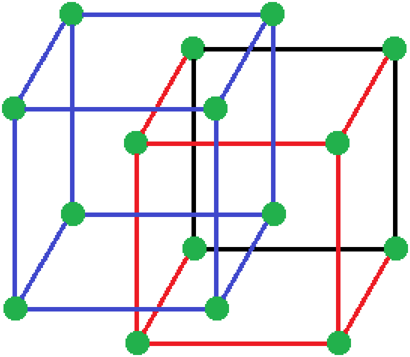
# Hipercubos

Cubo de dimensão 3:



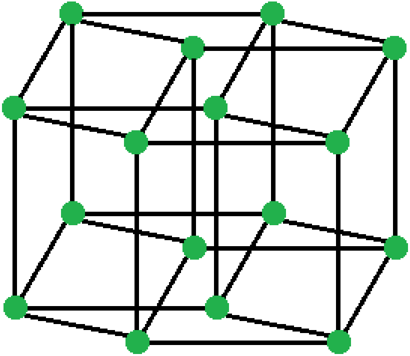
# Hipercubos

Como construir um cubo de dimensão 4:



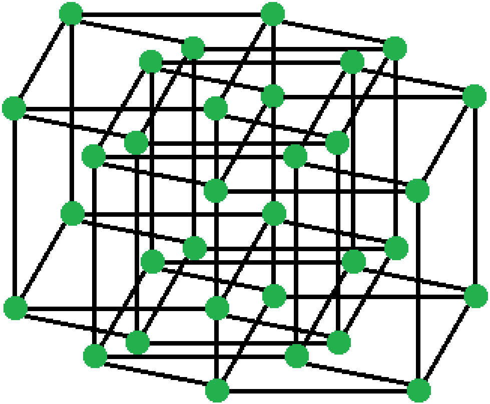
# Hipercubos

Cubo de dimensão 4:



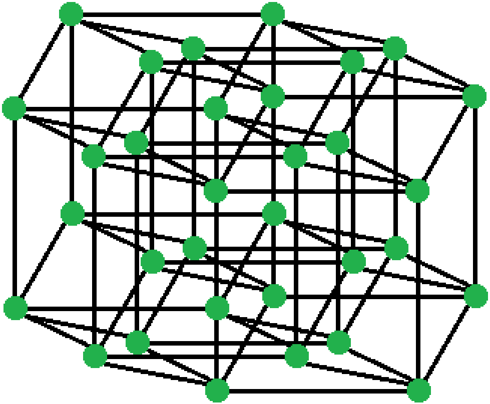
# Hipercubos

Como construir um cubo de dimensão 5:



# Hipercubos

Cubo de dimensão 5:



# Pintando um hipercubo

## Problema

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul.

# Pintando um hipercubo

## Problema

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul. Qual é o menor valor de $n$ para o qual *qualquer coloração dessas* contém pelo menos um

# Pintando um hipercubo

## Problema

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul. Qual é o menor valor de $n$ para o qual *qualquer coloração dessas* contém pelo menos um subgrafo $K_4$ monocromático?

# Pintando um hipercubo

## Problema

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul. Qual é o menor valor de $n$ para o qual *qualquer coloração dessas* contém pelo menos um subgrafo $K_4$ monocromático?

Resposta: $n = 5$

# Pintando um hipercubo

**Problema Jigglypuff**

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul. Qual é o menor valor de $n$ para o qual *qualquer coloração dessas* contém pelo menos um subgrafo $K_4$ monocromático

# Pintando um hipercubo

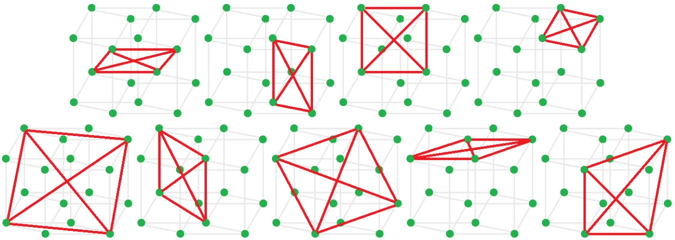
## Problema Jigglypuff

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul. Qual é o menor valor de $n$ para o qual *qualquer coloração dessas* contém pelo menos um subgrafo $K_4$ monocromático que seja **planar** dentro do hipercubo?

# Pintando um hipercubo

**Problema Jigglypuff**

Conecte cada par de vértices de um hipercubo $n$-dimensonal para obter o grafo completo $K_{2^n}$. Pinte cada aresta de vermelho ou azul. Qual é o menor valor de $n$ para o qual *qualquer coloração dessas* contém pelo menos um subgrafo $K_4$ monocromático que seja **planar** dentro do hipercubo?



# Propriedades dos hipercubos

- Número de vértices: $2^n$

# Propriedades dos hipercubos

- Número de vértices: $2^n$
- Número de arestas: $\dfrac{2^n(2^n-1)}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$

# Propriedades dos hipercubos

- Número de vértices: $2^n$
- Número de arestas: $\dfrac{2^n(2^n-1)}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$ (!)

## Propriedades dos hipercubos

- Número de vértices: $2^n$
- Número de arestas: $\dfrac{2^n(2^n-1)}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$ (!)
- Número de subgrafos $K_4$: $\frac{1}{24}2^n(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)$

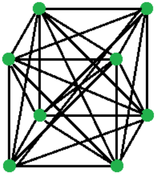
# Propriedades dos hipercubos

- Número de vértices: $2^n$
- Número de arestas: $\dfrac{2^n(2^n-1)}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$ (!)
- Número de subgrafos $K_4$: $\frac{1}{24}2^n(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)$
- Número de subgrafos $K_4$ **planares**:

## Propriedades dos hipercubos

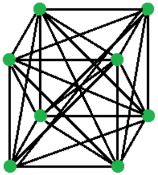
- Número de vértices: $2^n$
- Número de arestas: $\dfrac{2^n(2^n-1)}{2} = 2^{n-1}(2^n-1)$ (!)
- Número de subgrafos $K_4$: $\frac{1}{24}2^n(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)$
- Número de subgrafos $K_4$ **planares**: eu não sei.

# Problema Jigglypuff no cubo 3



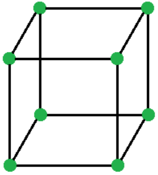
Cubo 3-dimensional completo.

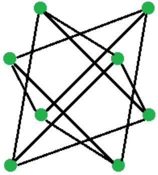
# Problema Jigglypuff no cubo 3

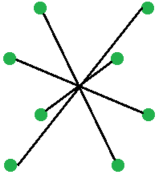


Cubo 3-dimensional completo. As arestas podem ter:

Comprimento 1 Comprimento $\sqrt{2}$ Comprimento $\sqrt{3}$

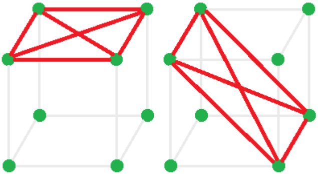






# Problema Jigglypuff no cubo 3

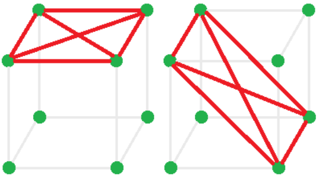
Existem 6 $K_4$ planares que são quadrados e 6 $K_4$ planares que são retângulos.



- **Quadrado:** arestas de comprimento 1 e $\sqrt{2}$
- **Retângulo:** arestas de comprimento 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

# Problema Jigglypuff no cubo 3

Existem 6 $K_4$ planares que são quadrados e 6 $K_4$ planares que são retângulos.



- **Quadrado:** arestas de comprimento 1 e $\sqrt{2}$
- **Retângulo:** arestas de comprimento 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

**Obs.:** *Pinte as arestas de comprimento* 1 *de uma cor, e as de comprimento* $\sqrt{2}$ *de outra, e não poderá haver um* $K_4$ *planar monocromático.*

# Graham

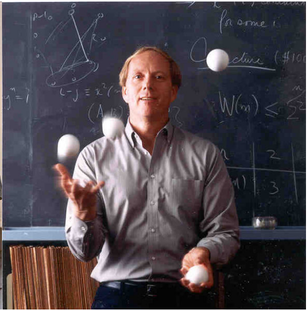
*Ronald Graham* é um matemático discreto

# Graham

*Ronald Graham* é um matemático discreto famoso.

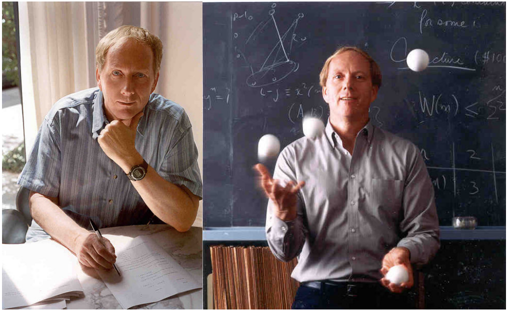
# Graham

*Ronald Graham* é um matemático discreto famoso.

# Graham

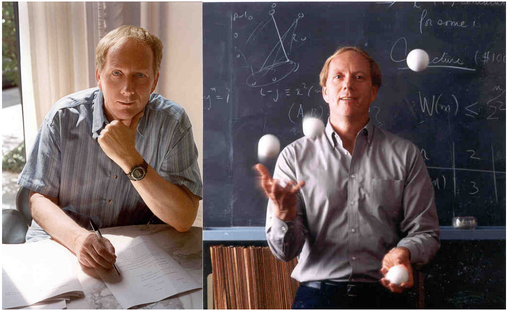
*Ronald Graham* é um matemático discreto famoso.



Número de Erdős $= 1$

# Graham

*Ronald Graham* é um matemático discreto famoso.



Número de Erdős $= 1$

(Segundo a Wikipedia, Graham foi o responsável por popularizar o conceito de *número de Erdős*)

# G

- **1971:** Graham e Rothschild provam que existe solução para o problema Jigglypuff, e exibem um *upper bound* $\mathbf{G}'$.

# G

- **1971:** Graham e Rothschild provam que existe solução para o problema Jigglypuff, e exibem um *upper bound* $\mathbf{G}'$.
- **1977:** Martin Gardner escreve sobre o problema na *Scientific American*, dizendo ter conversado com Graham a respeito de um outro *upper bound*, $\mathbf{G}$, que é bem maior.

# G

- **1971:** Graham e Rothschild provam que existe solução para o problema Jigglypuff, e exibem um *upper bound* $\mathbf{G}'$.
- **1977:** Martin Gardner escreve sobre o problema na *Scientific American*, dizendo ter conversado com Graham a respeito de um outro *upper bound*, **G**, que é bem maior. Mas BEM MAIOR mesmo.

# G

- **1971:** Graham e Rothschild provam que existe solução para o problema Jigglypuff, e exibem um *upper bound* $\mathbf{G}'$.
- **1977:** Martin Gardner escreve sobre o problema na *Scientific American*, dizendo ter conversado com Graham a respeito de um outro *upper bound*, **G**, que é bem maior. Mas BEM MAIOR mesmo. Gardner dá o nome a esse número de **Número de Graham**.

- **1971:** Graham e Rothschild provam que existe solução para o problema Jigglypuff, e exibem um *upper bound* $\mathbf{G}'$.
- **1977:** Martin Gardner escreve sobre o problema na *Scientific American*, dizendo ter conversado com Graham a respeito de um outro *upper bound*, **G**, que é bem maior. Mas BEM MAIOR mesmo. Gardner dá o nome a esse número de **Número de Graham**.
- **1980:** O Guinness dá a **G** o título de maior número natural que já foi útil para alguma coisa na história da matemática.

# Números grandes

- **Estrelas no universo:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo)**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}} 10^{\left(10^{82}\right)}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}} 10^{\left(10^{82}\right)}$
- **1 googolplex:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}} 10^{\left(10^{82}\right)}$
- **1 googolplex:** $10^{10^{100}}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}} 10^{\left(10^{82}\right)}$
- **1 googolplex:** $10^{10^{100}}$
- **Número de multiversos:**

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}}10^{\left(10^{82}\right)}$
- **1 googolplex:** $10^{10^{100}}$
- **Número de multiversos:** $2^{10^{245}}$

# Números grandes

- **Estrelas no universo:** $10^{22}$
- **1 mol:** $10^{23}$
- **Átomos no universo:** $10^{80}$
- **1 googol:** $10^{100}$
- **Pixels no espaço-tempo:** $10^{245}$
- **1 centilhão:** $10^{303}$
- **Maior primo conhecido:** $10^{17.000.000}$
- **(Átomos no universo) fatorial:** $10^{10^{82}} 10^{\left(10^{82}\right)}$
- **1 googolplex:** $10^{10^{100}}$
- **Número de multiversos:** $2^{10^{245}} = 10^{10^{144}}$

# Torres de potências

- $3 =$

## Torres de potências

- $3 = 3$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 =$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$

## Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} =$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} =$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$ ("comparável" com o fatorial do número de átomos do universo)

## Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$ ("comparável" com o fatorial do número de átomos do universo)
- $3^{3^{3^{3^3}}} =$

## Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$ ("comparável" com o fatorial do número de átomos do universo)
- $3^{3^{3^{3^3}}} = 10^{10^{9.9999999999996786 \times 10^{12}}} =$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$ ("comparável" com o fatorial do número de átomos do universo)
- $3^{3^{3^{3^3}}} = 10^{10^{9.9999999999996786\times 10^{12}}} = 10^{10^{10^{13}}}$

# Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$ ("comparável" com o fatorial do número de átomos do universo)
- $3^{3^{3^{3^3}}} = 10^{10^{9.9999999999996786 \times 10^{12}}} = 10^{10^{10^{13}}}$ (nada a comentar)

## Torres de potências

- $3 = 3$
- $3^3 = 27$
- $3^{3^3} = 7.625.597.484.987$ (1000 vezes a população do mundo)
- $3^{3^{3^3}} = 10^{10^{13}}$ ("comparável" com o fatorial do número de átomos do universo)
- $3^{3^{3^{3^3}}} = 10^{10^{9.9999999999996786 \times 10^{12}}} = 10^{10^{10^{13}}}$ (nada a comentar)
- $\vdots$

# $G =$

$$3$$

## G =

$$3^3$$

## G =

$$3^{3^{3}}$$

## G =

$$3^{3^{3^{3}}}$$

## G =

$$3^{3^{3^{3^{3}}}}$$

# $G =$

$$3^{3^{3^{3^{3^{4}}}}}$$

## $G =$

$$3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}$$

## G =

$$3^{3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}}$$

## $G =$

$$3^{3^{3^{3^{3^{3^{3^{3}}}}}}}$$

## G =

$$3^{3^{3^{3^{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}}}}$$

## $G =$

$$\left. 3^{3^{3^{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}}} \right\}$$

## G =

$$\left.3^{3^{3^{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}}}\right\}3^{3^{3}}$$

# G =

$$\left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} 3^{3^{3}}$$

## G =

$$3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}$$

# $G =$

$$\left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\}$$

# G =

$$\underbrace{\left.\left.\left.\left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} 3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\}\cdots\right\}}$$

# $G =$

$$\underbrace{\left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} \cdots \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\} \left.3^{3^{3}}\right\} 3}$$

# G =

$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3}}\Big\}3}_{3^{3^{3}}}$$

# G =

$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}_{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}}$$

# $G =$

$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3}}\Big\}3}_{\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}3^{3^{3}}\Big\}3}}$$

# G =

$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}$$

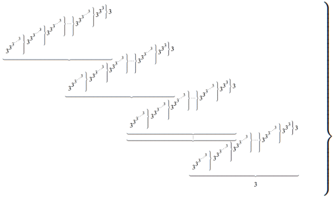
$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}$$

$$\underbrace{\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\cdots\Bigg\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Bigg\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}_{\vdots}}$$

# $G =$

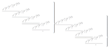
$$\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\cdots\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}_{\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\cdots\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}_{\underbrace{\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\cdots\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}_{\vdots}}_{\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\cdots\Big\}\,3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\Big\}\,3^{3^{3}}\Big\}\,3}_{3}}}}$$

# G =

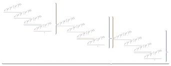


# G =

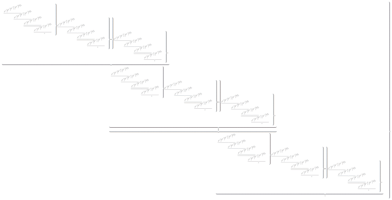
# G =



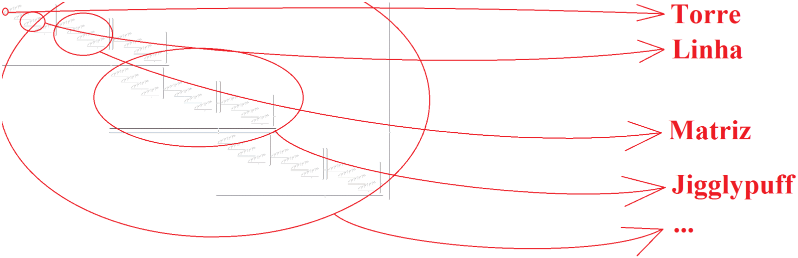
# G =



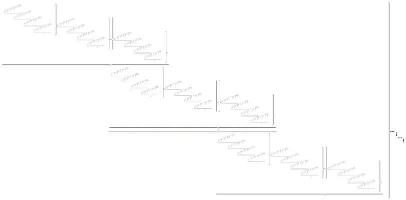
# G =



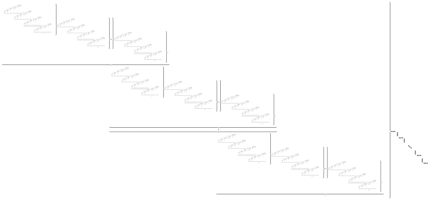
# G =



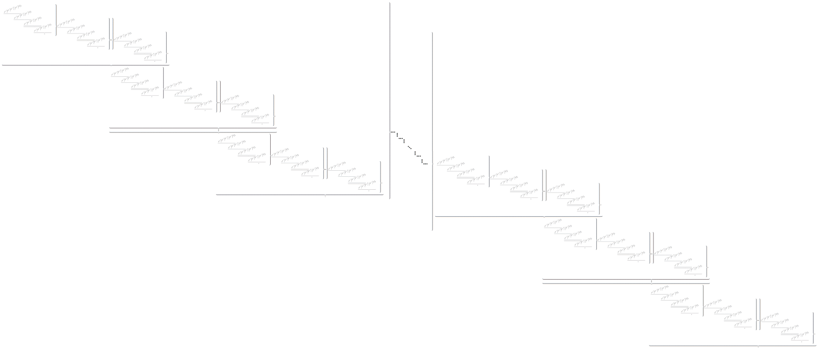
# G =



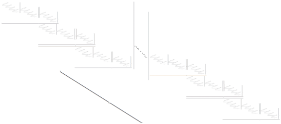
# $G =$



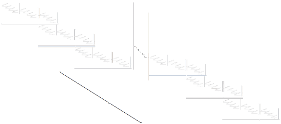
# $G =$



# $G =$

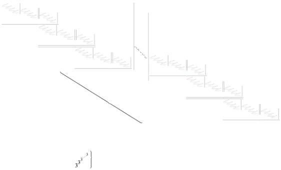


# $G =$

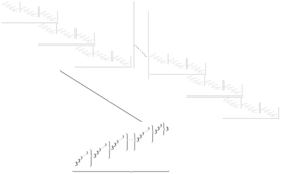


3

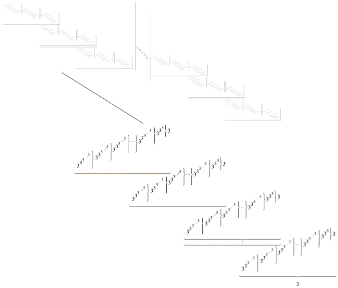
# $G =$



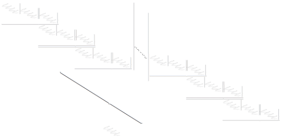
# G =



# G =

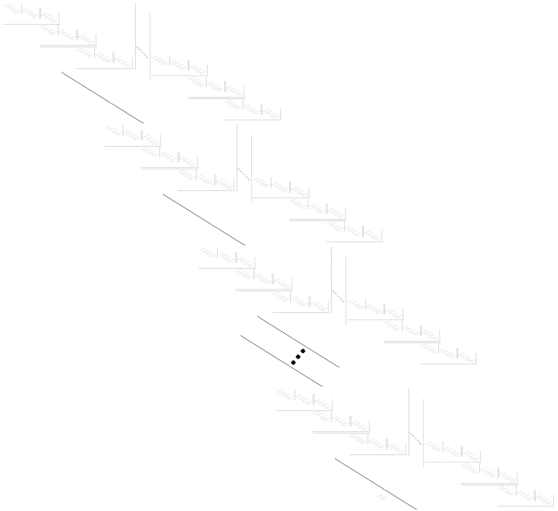


# G =

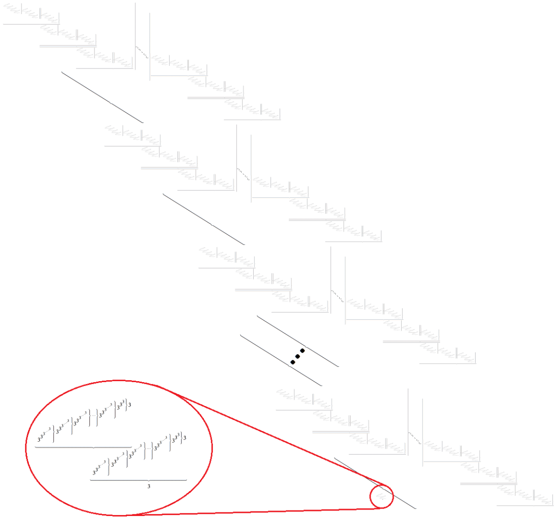


## G =

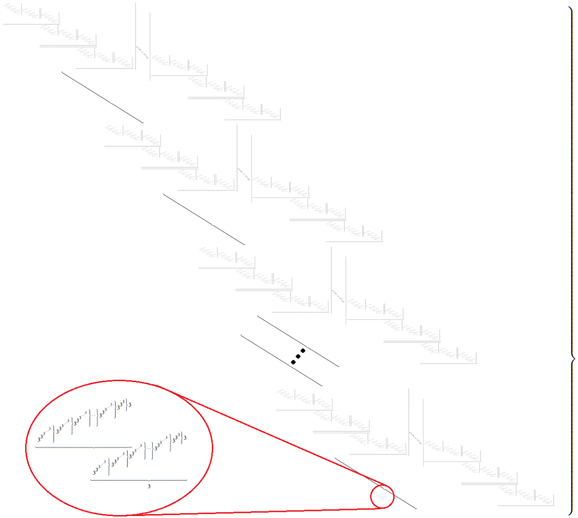
# G =



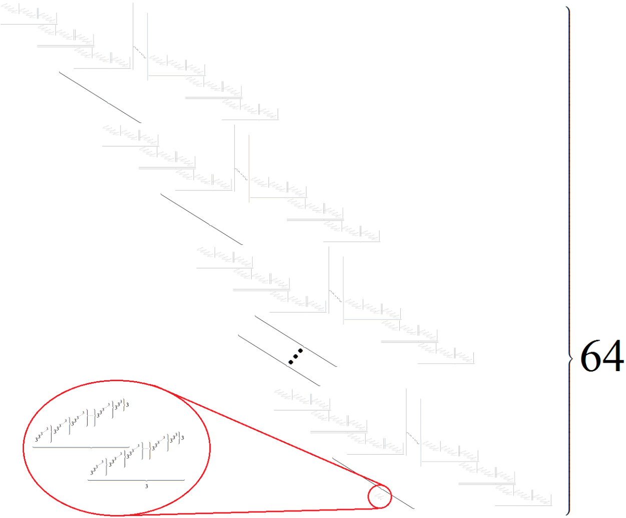
## G =



# G =



# G =



## G =

322234872396701848518643905910457562726246419538 7

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}$$

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\} \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}$$

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}}$$

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \left.\vphantom{\Bigg|}\right\} 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \left.\vphantom{\Bigg|}\right\} 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}} = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \left.\vphantom{\Bigg|}\right\} 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \left.\vphantom{\Bigg|}\right\} 10^{10^{10^{10^{10^{10^{19700}}}}}}$$

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}} = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 10^{10^{10^{10^{10^{19700}}}}}$$

O melhor *lower bound* conhecido hoje é

# Situação atual do problema Jigglypuff

O melhor *upper bound* conhecido hoje é:

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}} = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Bigg\}\, 10^{10^{10^{10^{10^{10^{19700}}}}}}$$

O melhor *lower bound* conhecido hoje é

$$13$$

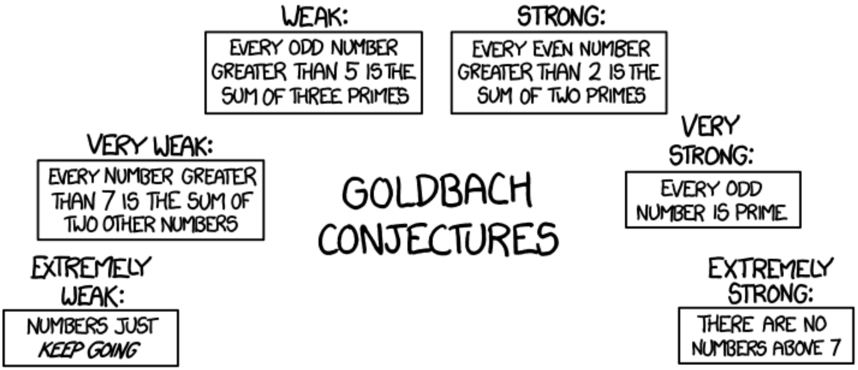
# Referências

- Wikipedia

- *Artigo de Martin Gardner*:

  http://iteror.org/big/Source/Graham-Gardner/GrahamsNumber.html
  *(Acesso ontem)*

- Imagens tiradas da internet




http://xkcd.com/1310/