Parece mentira, mas temos problemas com medidas

Leandro Fiorini Aurichi

ICMC-USP

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo.

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$.

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$. Qual destes você leva?

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$1, 00. Qual destes você leva?

- $[0, 1[$

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$. Qual destes você leva?

- $[0,1[$
- $[0,1]$

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$. Qual destes você leva?

- $[0, 1[$
- $[0, 1]$
- $[0, 2]$

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$. Qual destes você leva?

- $[0, 1[$
- $[0, 1]$
- $[0, 2]$
- $[0, 10]$

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$. Qual destes você leva?

- $[0,1[$
- $[0,1]$
- $[0,2]$
- $[0,10]$
- $[0,+\infty[$

Primeira ideia

Você vai no supermercado comprar um intervalo. Tem uma promoção que diz que qualquer intervalo está custando R$$1,00$. Qual destes você leva?

- $[0, 1[$
- $[0, 1]$
- $[0, 2]$
- $[0, 10]$
- $[0, +\infty[$

(mas você percebe que a quantidade de pontos não muda, certo?)

Medidas sobre $[0, 1]$

Medidas sobre $[0, 1]$

Uma **medida** sobre $[0, 1]$ é uma função $m : \wp([0, 1]) \longrightarrow [0, 1]$ tal que

Medidas sobre $[0,1]$

Uma **medida** sobre $[0,1]$ é uma função $m : \wp([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ tal que

1. $m(\emptyset) = 0$

Medidas sobre $[0,1]$

Uma **medida** sobre $[0,1]$ é uma função $m : \wp([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ tal que

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m([0,1]) = 1$

Medidas sobre $[0, 1]$

Uma **medida** sobre $[0, 1]$ é uma função $m : \wp([0, 1]) \longrightarrow [0, 1]$ tal que

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m([0, 1]) = 1$
3. se $A_j \cap A_k = \emptyset$ para todo $j \neq k$, então $m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Exemplo

Um jeito de criar uma medida assim é o seguinte. Dizemos que $m(A) = 1$ se $0 \in A$ e $m(A) = 0$ caso contrário.

Exemplo

Um jeito de criar uma medida assim é o seguinte. Dizemos que $m(A) = 1$ se $0 \in A$ e $m(A) = 0$ caso contrário.

Funciona, mas não é lá muito interessante.

Exemplo

Um jeito de criar uma medida assim é o seguinte. Dizemos que $m(A) = 1$ se $0 \in A$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Funciona, mas não é lá muito interessante. Vamos chamar medidas "parecidas" com essas de **medidas triviais** (essas tais que $m(\{a\}) = 1$ para algum $a \in [0, 1]$).

Lebesgue

Podemos, além das propriedades impostas anteriormente, pedir que $m([a, b]) = b - a$.

Lebesgue

Podemos, além das propriedades impostas anteriormente, pedir que $m([a, b]) = b - a$. Assim nos livramos das medidas triviais e ainda obtemos algo que parece interessante.

Lebesgue

Podemos, além das propriedades impostas anteriormente, pedir que $m([a, b]) = b - a$. Assim nos livramos das medidas triviais e ainda obtemos algo que parece interessante.
Podemos ser ainda mais gananciosos e pedir que $m(A) = m(B)$ se a única diferença entre A e B é uma translação.

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional.

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$.

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$.
Note que $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Temos

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$.
Note que $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Temos

$$[0,1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset [0,2]$$

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$. Note que $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Temos

$$[0,1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset [0,2]$$

Com isso, dá para mostrar que $1 \leq m(V_n) \leq 2$ para cada n.

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$.
Note que $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Temos

$$[0,1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset [0,2]$$

Com isso, dá para mostrar que $1 \leq m(V_n) \leq 2$ para cada n.
Por outro lado, cada $m(V_n) = m(V)$.

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$.
Note que $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Temos

$$[0,1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset [0,2]$$

Com isso, dá para mostrar que $1 \leq m(V_n) \leq 2$ para cada n.
Por outro lado, cada $m(V_n) = m(V)$. Então

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(V_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V)$$

Vitali

Mas Giuseppe Vitali construiu um conjunto $V \subset [0,1]$ de maneira que, dado qualquer $r \in [0,1]$, existe um único $v \in V$ tal que $v - r$ é racional. (Se quiser tentar em casa: Considere a relação de equivalência $a \equiv b$ se, e somente se, $a - b \in \mathbb{Q}$ e tome um representante de cada classe).
Considere $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos chamar de $V_n = \{v + q_n : v \in V\}$.
Note que $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Temos

$$[0,1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset [0,2]$$

Com isso, dá para mostrar que $1 \leq m(V_n) \leq 2$ para cada n.
Por outro lado, cada $m(V_n) = m(V)$. Então

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(V_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(V)$$

Desta forma, ou $m(V) = 0$ ou $m(V) = \infty$. De qualquer forma, não está entre 1 e 2.

Vamos abrir mão de algo

Já que a ideia anterior não funcionou, vamos abrir mão de algumas das imposições.

Vamos abrir mão de algo

Já que a ideia anterior não funcionou, vamos abrir mão de algumas das imposições. Como a invariância por translações foi a última a aparecer, vamos abdicar dela primeiro.

Digressão

Um jeito de medir tamanhos de conjuntos é simplesmente contar quantos elementos eles têm.

Digressão

Um jeito de medir tamanhos de conjuntos é simplesmente contar quantos elementos eles têm. É lógico que quando trabalhamos com conjuntos infinitos, temos alguns problemas.

Digressão

Um jeito de medir tamanhos de conjuntos é simplesmente contar quantos elementos eles têm. É lógico que quando trabalhamos com conjuntos infinitos, temos alguns problemas. Em geral, simplesmente trabalhamos com existência (ou não) de funções bijetoras.

Digressão

Um jeito de medir tamanhos de conjuntos é simplesmente contar quantos elementos eles têm. É lógico que quando trabalhamos com conjuntos infinitos, temos alguns problemas. Em geral, simplesmente trabalhamos com existência (ou não) de funções bijetoras. Por exemplo, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, enquanto $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

Digressão

Um jeito de medir tamanhos de conjuntos é simplesmente contar quantos elementos eles têm. É lógico que quando trabalhamos com conjuntos infinitos, temos alguns problemas. Em geral, simplesmente trabalhamos com existência (ou não) de funções bijetoras. Por exemplo, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, enquanto $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. Temos o problema que esse tipo de "medida" não satisfaz o que a gente queria no começo (para começar, o valor da medida tinha que ser um valor real).

Digressão da digressão

Mas, ainda assim, vale pergunta:

Digressão da digressão

Mas, ainda assim, vale pergunta:
Será que existe um conjunto X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

Digressão da digressão

Mas, ainda assim, vale pergunta:
Será que existe um conjunto X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?
A resposta curta para isso é

Digressão da digressão

Mas, ainda assim, vale pergunta:
Será que existe um conjunto X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?
A resposta curta para isso é "Bem..."

Digredir é progredir

Esse problema é conhecido como a Hipótese do Contínuo. Mais formalmente, a Hipótese do Contínuo afirma que não existe X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.

Digredir é progredir

Esse problema é conhecido como a Hipótese do Contínuo. Mais formalmente, a Hipótese do Contínuo afirma que não existe X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.
Foi provado por Gödel e Cohen que nem essa afirmação, nem sua negação, levam a contradições

Digredir é progredir

Esse problema é conhecido como a Hipótese do Contínuo. Mais formalmente, a Hipótese do Contínuo afirma que não existe X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.
Foi provado por Gödel e Cohen que nem essa afirmação, nem sua negação, levam a contradições (supondo que já não tinha contradições antes).

Digredir é progredir

Esse problema é conhecido como a Hipótese do Contínuo. Mais formalmente, a Hipótese do Contínuo afirma que não existe X tal que $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$.
Foi provado por Gödel e Cohen que nem essa afirmação, nem sua negação, levam a contradições (supondo que já não tinha contradições antes).
Isso implica que, informalmente, com o que se supõe normalmente como verdadeiro em matemática, não dá para provar nem a Hipótese do Contínuo, nem a sua negação.

Chega de digredir

Pode-se mostrar o seguinte resultado:

Chega de digredir

Pode-se mostrar o seguinte resultado:

Proposição

Se existe uma medida $m : \wp([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ *tal que* $m([a,b]) = b - a$, *então*

Chega de digredir

Pode-se mostrar o seguinte resultado:

Proposição

Se existe uma medida $m : \wp([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ *tal que* $m([a,b]) = b - a$, *então não vale a Hipótese do Contínuo.*

Chega de digredir

Pode-se mostrar o seguinte resultado:

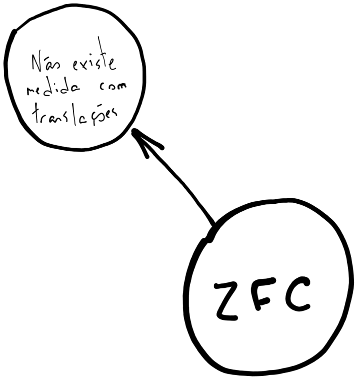
Proposição

Se existe uma medida $m : \wp([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ *tal que* $m([a,b]) = b - a$, *então não vale a Hipótese do Contínuo.*

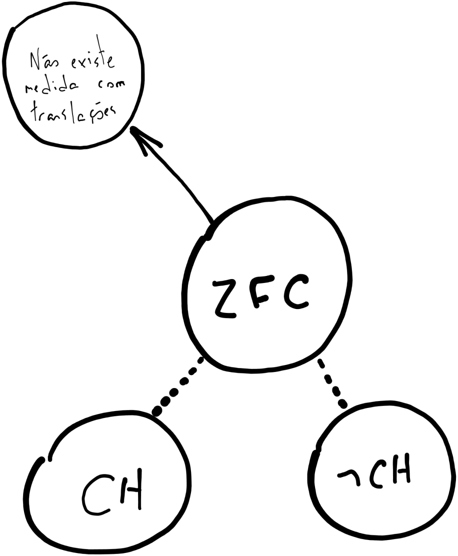
(só lembrando que aqui a gente abriu mão da invariância por translações)

Hein?

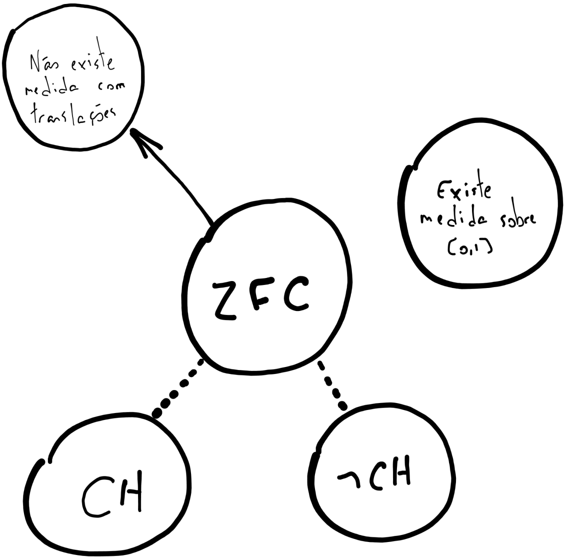
Hein?



Hein?

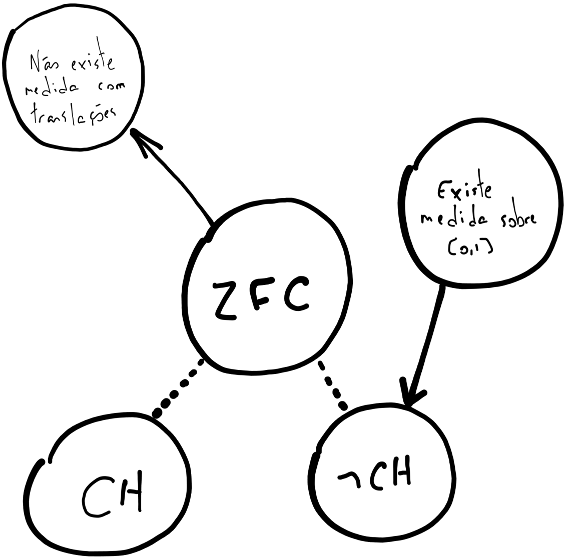


Hein?

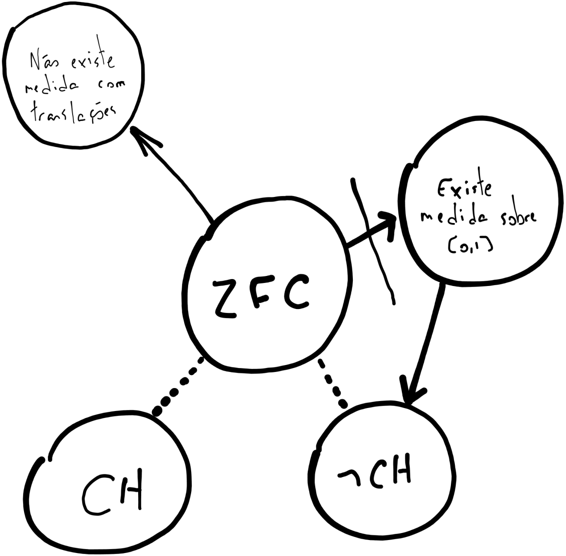


Não existe medida com translações
Existe medida sobre [0,1]
ZFC
CH
¬CH

Hein?


Não existe medida com translações
Existe medida sobre [0,1]
ZFC
CH
¬CH

Hein?



Não existe
medida com
translações
Existe
medida sobre
[0,1]
ZFC
CH
¬CH

Vamos ser mais humildes

Vamos tentar algo mais simples. Vamos tentar trabalhar só com conjuntos grandes (1) e pequenos (0).

Vamos ser mais humildes

Vamos tentar algo mais simples. Vamos tentar trabalhar só com conjuntos grandes (1) e pequenos (0).

Definição

Dado X um conjunto, uma medida "grande-pequeno" sobre X é uma função $m : \wp(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que:

Vamos ser mais humildes

Vamos tentar algo mais simples. Vamos tentar trabalhar só com conjuntos grandes (1) e pequenos (0).

Definição

Dado X um conjunto, uma medida "grande-pequeno" sobre X é uma função $m : \wp(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que:

1. $m(\emptyset) = 0$

Vamos ser mais humildes

Vamos tentar algo mais simples. Vamos tentar trabalhar só com conjuntos grandes (1) e pequenos (0).

Definição

Dado X um conjunto, uma medida "grande-pequeno" sobre X é uma função $m : \wp(X) \longrightarrow \{0,1\}$ tal que:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(X) = 1$

Vamos ser mais humildes

Vamos tentar algo mais simples. Vamos tentar trabalhar só com conjuntos grandes (1) e pequenos (0).

Definição

Dado X um conjunto, uma medida "grande-pequeno" sobre X é uma função $m : \wp(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(X) = 1$
3. $m(\{x\}) = 0$ *para cada* $x \in X$*.*

Vamos ser mais humildes

Vamos tentar algo mais simples. Vamos tentar trabalhar só com conjuntos grandes (1) e pequenos (0).

Definição

Dado X um conjunto, uma medida "grande-pequeno" sobre X é uma função $m : \wp(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(X) = 1$
3. $m(\{x\}) = 0$ *para cada* $x \in X$.
4. *se* $A_j \cap A_k = \emptyset$ *para todo* $j \neq k$ *e* $|\mathcal{F}| < |X|$, *então* $m(\bigcup_{j \in \mathcal{F}} A_j) = \sum_{j \in \mathcal{F}} A_j$.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Com um pouco de conta, dá para provar que tudo funciona.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Com um pouco de conta, dá para provar que tudo funciona. Se quiser tentar em casa, algumas coisas que ajudam a provar são, dados $A, B \subset \mathbb{N}$:

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Com um pouco de conta, dá para provar que tudo funciona. Se quiser tentar em casa, algumas coisas que ajudam a provar são, dados $A, B \subset \mathbb{N}$:

- Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Com um pouco de conta, dá para provar que tudo funciona. Se quiser tentar em casa, algumas coisas que ajudam a provar são, dados $A, B \subset \mathbb{N}$:

- Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Vale uma, e só uma, das seguintes: $A \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{N} \smallsetminus A \in \mathcal{F}$.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Com um pouco de conta, dá para provar que tudo funciona. Se quiser tentar em casa, algumas coisas que ajudam a provar são, dados $A, B \subset \mathbb{N}$:

- Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Vale uma, e só uma, das seguintes: $A \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{N} \smallsetminus A \in \mathcal{F}$.
- Se $A \notin \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap C = \emptyset$.

Em $\mathbb{N}$, tudo bem

Nos naturais dá para fazer isso. Considere $\mathcal{F}$ uma família que contenha todos os subconjuntos cofinitos e que seja maximal com a segunte propriedade: dados $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
Daí basta dizer que $m(A) = 1$ se $A \in \mathcal{F}$ e $m(A) = 0$ caso contrário.
Com um pouco de conta, dá para provar que tudo funciona. Se quiser tentar em casa, algumas coisas que ajudam a provar são, dados $A, B \subset \mathbb{N}$:

- Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Vale uma, e só uma, das seguintes: $A \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{N} \smallsetminus A \in \mathcal{F}$.
- Se $A \notin \mathcal{F}$, existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap C = \emptyset$.
- Também ajuda procurar a palavra "ultrafiltro" na internet.

Ai caramba

Proposição

Se existe algum X não enumerável tal que existe m medida "grande-pequeno" sobre X, então $|X|$ é um cardinal grande.

Ai caramba

Proposição

Se existe algum X não enumerável tal que existe m medida "grande-pequeno" sobre X, então $|X|$ é um cardinal grande.

Um cardinal não enumerável κ é dito grande se κ é regular

Ai caramba

Proposição

Se existe algum X não enumerável tal que existe m medida "grande-pequeno" sobre X, então $|X|$ é um cardinal grande.

Um cardinal não enumerável κ é dito grande se κ é regular e, para todo $\alpha < \kappa$, $2^\alpha < \kappa$.

Mas é grande mesmo?

Vamos tentar dar a ideia de como isso é grande. Dado um cardinal α, 2^α representa o tamanho do conjunto $\wp(X)$, onde $|X| = \alpha$.

Mas é grande mesmo?

Vamos tentar dar a ideia de como isso é grande. Dado um cardinal α, 2^α representa o tamanho do conjunto $\wp(X)$, onde $|X| = \alpha$.
Se começamos com um conjunto finito, digamos de tamanho n, é um exercício mostrar que $\wp(X)$ tem 2^n elementos (daí a notação).

É grande

Então a definição de cardinal grande implica que, para qualquer conjunto X de tamanho menor que κ, $\wp(X)$ também tem tamanho menor que X.

É grande

Então a definição de cardinal grande implica que, para qualquer conjunto X de tamanho menor que κ, $\wp(X)$ também tem tamanho menor que X.
Repare que o tamanho dos reais não satisfaz isso, já que o tamanho de $\mathbb{N}$ é menor que o tamanho dos reais enquanto que o tamanho de $\wp(\mathbb{N})$ é igual ao de $\mathbb{R}$.

É grande

Então a definição de cardinal grande implica que, para qualquer conjunto X de tamanho menor que κ, $\wp(X)$ também tem tamanho menor que X.
Repare que o tamanho dos reais não satisfaz isso, já que o tamanho de $\mathbb{N}$ é menor que o tamanho dos reais enquanto que o tamanho de $\wp(\mathbb{N})$ é igual ao de $\mathbb{R}$.
Mas o tamanho de $\mathbb{N}$ satisfaz, já que qualquer coisa menor que isso é finita e, portanto, a quantidade de subconjuntos também vai ser finita.

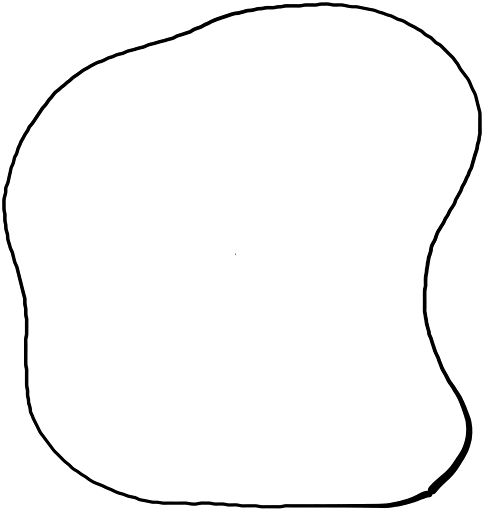
É grande

Então a definição de cardinal grande implica que, para qualquer conjunto X de tamanho menor que κ, $\wp(X)$ também tem tamanho menor que X.
Repare que o tamanho dos reais não satisfaz isso, já que o tamanho de $\mathbb{N}$ é menor que o tamanho dos reais enquanto que o tamanho de $\wp(\mathbb{N})$ é igual ao de $\mathbb{R}$.
Mas o tamanho de $\mathbb{N}$ satisfaz, já que qualquer coisa menor que isso é finita e, portanto, a quantidade de subconjuntos também vai ser finita.
Mas na definição de cardinal grande, pedimos que ele fosse não enumerável.

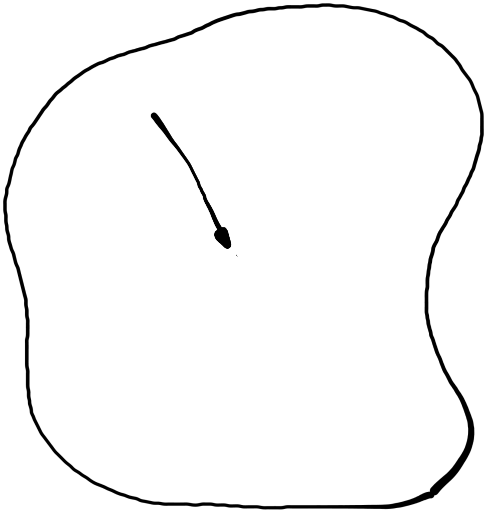
É grande

Então a definição de cardinal grande implica que, para qualquer conjunto X de tamanho menor que κ, $\wp(X)$ também tem tamanho menor que X.
Repare que o tamanho dos reais não satisfaz isso, já que o tamanho de $\mathbb{N}$ é menor que o tamanho dos reais enquanto que o tamanho de $\wp(\mathbb{N})$ é igual ao de $\mathbb{R}$.
Mas o tamanho de $\mathbb{N}$ satisfaz, já que qualquer coisa menor que isso é finita e, portanto, a quantidade de subconjuntos também vai ser finita.
Mas na definição de cardinal grande, pedimos que ele fosse não enumerável.
Ou seja, em algum sentido, estamos pedindo que o salto que existe entre finito e infinito **aconteça de novo**.

Resumindo numa figura



Resumindo numa figura



Melhor voltar a digredir

O primeiro teorema da incompletude de Gödel basicamente diz que existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas.

Melhor voltar a digredir

O primeiro teorema da incompletude de Gödel basicamente diz que existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas. Um exemplo famoso é a Hipótese do Contínuo.

Melhor voltar a digredir

O primeiro teorema da incompletude de Gödel basicamente diz que existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas. Um exemplo famoso é a Hipótese do Contínuo.

Mas o segundo teorema da incompletude de Gödel diz algo ainda mais "enrolado".

Melhor voltar a digredir

O primeiro teorema da incompletude de Gödel basicamente diz que existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas. Um exemplo famoso é a Hipótese do Contínuo.

Mas o segundo teorema da incompletude de Gödel diz algo ainda mais "enrolado". Entre outras coisas, ele afirma que é impossível provar que ZFC não deriva contradições

Melhor voltar a digredir

O primeiro teorema da incompletude de Gödel basicamente diz que existem afirmações que não podem ser provadas nem refutadas. Um exemplo famoso é a Hipótese do Contínuo.
Mas o segundo teorema da incompletude de Gödel diz algo ainda mais "enrolado". Entre outras coisas, ele afirma que é impossível provar que ZFC não deriva contradições (a menos que ZFC de fato derive contradições).

A gente prova qualquer coisa

$$(\varphi \land \neg\varphi)$$

A gente prova qualquer coisa

$$(\varphi \land \neg\varphi) \Rightarrow \psi$$

E lá vamos nós

Teorema

Se existe um cardinal grande, então ZFC é consistente

E lá vamos nós

Teorema

Se existe um cardinal grande, então ZFC é consistente (isto é, não deriva contradições).

E lá vamos nós

Teorema

Se existe um cardinal grande, então ZFC é consistente (isto é, não deriva contradições).

Ou seja, a existência de um cardinal grande implica em algo que é impossível de se mostrar.

E lá vamos nós

Teorema

Se existe um cardinal grande, então ZFC é consistente (isto é, não deriva contradições).

Ou seja, a existência de um cardinal grande implica em algo que é impossível de se mostrar. Assim, é impossível provar que existe um cardinal grande

E lá vamos nós

Teorema

Se existe um cardinal grande, então ZFC é consistente (isto é, não deriva contradições).

Ou seja, a existência de um cardinal grande implica em algo que é impossível de se mostrar. Assim, é impossível provar que existe um cardinal grande (e nada impede que não existam).

E lá vamos nós

Teorema

Se existe um cardinal grande, então ZFC é consistente (isto é, não deriva contradições).

Ou seja, a existência de um cardinal grande implica em algo que é impossível de se mostrar. Assim, é impossível provar que existe um cardinal grande (e nada impede que não existam). Pior ainda, é impossível provar que supor a existência de cardinais grandes não implica em contradições.

Pode parecer mentira

Resultados que implicam na existência de cardinais grandes não são tão raros assim.

Pode parecer mentira

Resultados que implicam na existência de cardinais grandes não são tão raros assim. Diversos matemáticos trabalham com teorias do tipo "se existe um cardinal grande desse jeito, então...".

Pode parecer mentira

Resultados que implicam na existência de cardinais grandes não são tão raros assim. Diversos matemáticos trabalham com teorias do tipo "se existe um cardinal grande desse jeito, então...". Apesar de ser impossível mostrar que "tudo bem".

Pode parecer mentira

Resultados que implicam na existência de cardinais grandes não são tão raros assim. Diversos matemáticos trabalham com teorias do tipo "se existe um cardinal grande desse jeito, então...". Apesar de ser impossível mostrar que "tudo bem". Em alguns casos que o pessoal "foi longe demais", já se mostrou que, de fato, chegam a contradições.

Expressão

Expressão

Cutucar onça com vara curta.

Bibliografia

Just, W.; Weese, M.; Discovering Modern Set Theory (I & II)