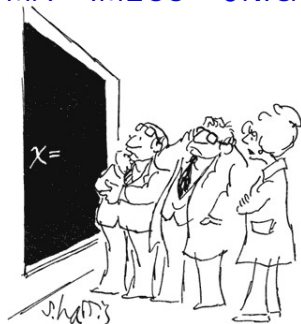


PROBLEMAS DE (QUASE) UM MILHÃO DE DÓLARES

LÚCIO T. SANTOS
DMA – IMECC – UNICAMP





David Hilbert
(1862 – 1943)

Segundo Congresso Internacional de Matemáticos

23 Problemas



Landon Clay
(1927 –)

Problemas do Milênio
Clay Mathematics Institute

US\$ 1.000.000,00

7 Problemas

1852 Equações de Navier–Stokes

Equações Diferenciais

PROBLEMAS DO MILÊNIO

1852 Equações de Navier–Stokes

1859 Hipótese de Riemann

Equações Diferenciais

Teoria dos Números

PROBLEMAS DO MILÊNIO

- 1852 Equações de Navier–Stokes
- 1859 Hipótese de Riemann
- 1895 Conjectura de Poincaré

Equações Diferenciais
Teoria dos Números
Topologia

PROBLEMAS DO MILÊNIO

1852 Equações de Navier–Stokes

1859 Hipótese de Riemann

1895 Conjectura de Poincaré

Grigori Perelman — 2006

Equações Diferenciais

Teoria dos Números

Topologia

PROBLEMAS DO MILÊNIO

1852 Equações de Navier–Stokes

1859 Hipótese de Riemann

1895 Conjectura de Poincaré

Grigori Perelman — 2006

1950 Conjectura de Hodge

Equações Diferenciais

Teoria dos Números

Topologia

Álgebra

PROBLEMAS DO MILÊNIO

1852 Equações de Navier–Stokes

1859 Hipótese de Riemann

1895 Conjectura de Poincaré

Grigori Perelman — 2006

1950 Conjectura de Hodge

1954 Teoria de Yang–Mills

Equações Diferenciais

Teoria dos Números

Topologia

Álgebra

Eletrodinâmica Quântica

PROBLEMAS DO MILÊNIO

1852 Equações de Navier–Stokes

1859 Hipótese de Riemann

1895 Conjectura de Poincaré

Grigori Perelman — 2006

1950 Conjectura de Hodge

1954 Teoria de Yang–Mills

1960 Problema $P \times NP$

Equações Diferenciais

Teoria dos Números

Topologia

Álgebra

Eletrodinâmica Quântica

Computação

PROBLEMAS DO MILÊNIO

1852 Equações de Navier–Stokes

1859 Hipótese de Riemann

1895 Conjectura de Poincaré

Grigori Perelman — 2006

1950 Conjectura de Hodge

1954 Teoria de Yang–Mills

1960 Problema $P \times NP$

1960 Conjectura de Birch & Swinnerton–Dyer

Equações Diferenciais

Teoria dos Números

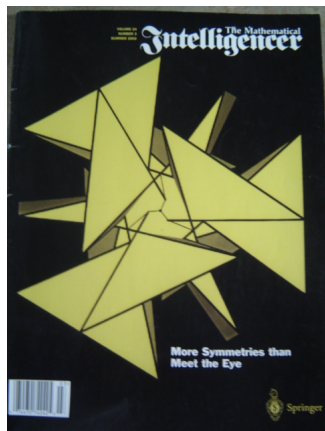
Topologia

Álgebra

Eletrodinâmica Quântica

Computação

Geometria



Million-Buck Problems

Scott W. Williams

University at Buffalo

12 Problemas

NÚMEROS PRIMOS



NÚMEROS PRIMOS

Um número é **PRIMO** se tem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.

NÚMEROS PRIMOS

Um número é **PRIMO** se tem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.

Exemplos: 3, 5, 31, 59, 509, $34.790! - 1$, $19.249 \times 2^{13.018.586} + 1$.

NÚMEROS PRIMOS

Um número é **PRIMO** se tem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.

Exemplos: 3, 5, 31, 59, 509, $34.790! - 1$, $19.249 \times 2^{13.018.586} + 1$.

Maior primo até agora (01/16), $2^{74.207.281} - 1$ com 22.338.618 dígitos.

CONJECTURA DE GOLDBACH



CONJECTURA DE GOLDBACH

Christian Goldbach (1690 – 1764)

Todo par maior que 2 é a soma de dois primos.



FORTE

CONJECTURA DE GOLDBACH

Christian Goldbach (1690 – 1764)

Todo par maior que 2 é a soma de dois primos.



FORTE

$$\text{Ímpar} = \text{Par} + 3 = \text{Primo} + \text{Primo} + 3$$

CONJECTURA DE GOLDBACH

Christian Goldbach (1690 – 1764)

Todo par maior que 2 é a soma de dois primos.



FORTE

$\text{Ímpar} = \text{Par} + 3 = \text{Primo} + \text{Primo} + 3$

Todo ímpar maior que 5 é a soma de três primos.



FRACA

CONJECTURA DE GOLDBACH

Exemplos:

$$60 = 23 + 37, \quad 144 = 43 + 101, \quad 61 = 58 + 3 = 29 + 29 + 3.$$

CONJECTURA DE GOLDBACH

Exemplos:

$$60 = 23 + 37, \quad 144 = 43 + 101, \quad 61 = 58 + 3 = 29 + 29 + 3.$$

Já verificado para pares $< 10^{18}$ e ímpares $< 10^{30}$.

CONJECTURA DE GOLDBACH

Exemplos:

$$60 = 23 + 37, \quad 144 = 43 + 101, \quad 61 = 58 + 3 = 29 + 29 + 3.$$

Já verificado para pares $< 10^{18}$ e ímpares $< 10^{30}$.

A conjectura fraca foi provada em 2013 por [Harald Helfgott](#).

PRIMOS GÊMEOS



PRIMOS GÊMEOS

Dois números primos são **GÊMEOS** se distam 2 um do outro.

PRIMOS GÊMEOS

Dois números primos são **GÊMEOS** se distam 2 um do outro.

Exemplos: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (59, 61), (71, 73), (821, 823), (881, 883).

PRIMOS GÊMEOS

Dois números primos são **GÊMEOS** se distam 2 um do outro.

Exemplos: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (59, 61), (71, 73), (821, 823), (881, 883).

Existem infinitos primos gêmeos.



PRIMOS GÊMEOS

Dois números primos são **GÊMEOS** se distam 2 um do outro.

Exemplos: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (59, 61), (71, 73), (821, 823), (881, 883).

Existem infinitos primos gêmeos.



Existem **808.675.888.577.436** primos gêmeos menores que 10^{18} .

PRIMOS GÊMEOS

Maiores primos gêmeos até agora, $3.756.801.695.685 \times 2^{666.669} \pm 1$.

PRIMOS GÊMEOS

Maiores primos gêmeos até agora, $3.756.801.695.685 \times 2^{666.669} \pm 1$.

Exceto 3 e 5, todos os primos gêmeos são da forma $6n - 1$ e $6n + 1$ com n natural.

PRIMOS GÊMEOS

Maiores primos gêmeos até agora, $3.756.801.695.685 \times 2^{666.669} \pm 1$.

Exceto 3 e 5, todos os primos gêmeos são da forma $6n - 1$ e $6n + 1$ com n natural.

Yitang Zhang anunciou em 2013 a prova de que para algum $N \leq 70.000.000$ existem infinitos pares de primos que distam N . Terence Tao com o projeto *Polymath* reduziu (até o momento) o limite para $N = 246$.

NÚMEROS PERFEITOS



www.marlontenorio.com

NÚMEROS PERFEITOS

Um número é **PERFEITO** se é igual a soma de seus divisores próprios.

NÚMEROS PERFEITOS

Um número é **PERFEITO** se é igual a soma de seus divisores próprios.

Exemplos:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8.128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 \\ + 1016 + 2032 + 4064,$$

$$33.550.336, \quad 8.589.869.056.$$

NÚMEROS PERFEITOS

Um número é **PERFEITO** se é igual a soma de seus divisores próprios.

Exemplos:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$$

$$8.128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 \\ + 1016 + 2032 + 4064,$$

$$33.550.336, \quad 8.589.869.056.$$

Maior número perfeito até agora, $2^{57.885.160} \times (2^{57.885.161} - 1)$.

NÚMEROS PERFEITOS

Existe número perfeito ímpar.



NÚMEROS PERFEITOS

Existe número perfeito ímpar.



Leonard Euler (1707 – 1783)

Se existir é da forma $(4n + 1)^{4k+1}(2m + 1)^2$ com $4n + 1$ primo.

NÚMEROS PERFEITOS

Existe número perfeito ímpar.

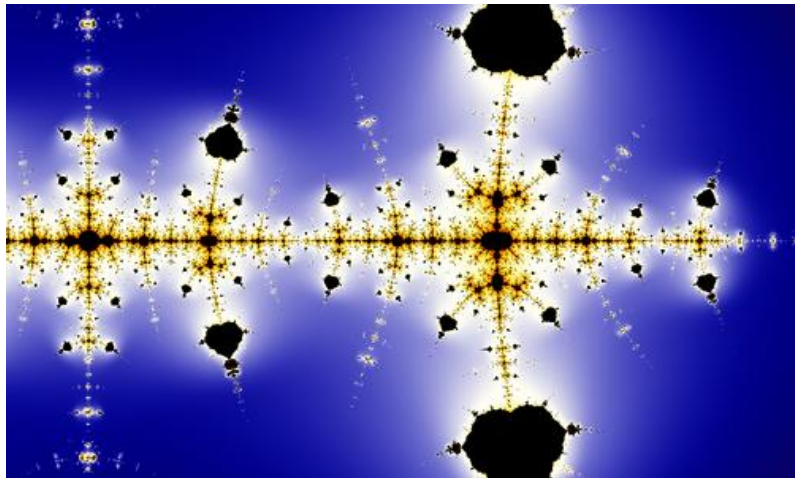


Leonard Euler (1707 – 1783)

Se existir é da forma $(4n + 1)^{4k+1}(2m + 1)^2$ com $4n + 1$ primo.

Não existem números perfeitos ímpares menores que 10^{300}
($\leq 10^{500}$?).

SEQUÊNCIA DE COLLATZ



SEQUÊNCIA DE COLLATZ

$$\text{Dado } x_1 \text{ natural, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k/2 & , x_k \text{ par} \\ 3 x_k + 1 & , x_k \text{ ímpar} \end{cases}$$

SEQUÊNCIA DE COLLATZ

$$\text{Dado } x_1 \text{ natural, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k/2 & , x_k \text{ par} \\ 3x_k + 1 & , x_k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplos:

SEQUÊNCIA DE COLLATZ

$$\text{Dado } x_1 \text{ natural, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k/2 & , x_k \text{ par} \\ 3x_k + 1 & , x_k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplos:

8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

SEQUÊNCIA DE COLLATZ

$$\text{Dado } x_1 \text{ natural, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k/2 & , x_k \text{ par} \\ 3x_k + 1 & , x_k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplos:

8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

SEQUÊNCIA DE COLLATZ

$$\text{Dado } x_1 \text{ natural, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k/2 & , x_k \text{ par} \\ 3x_k + 1 & , x_k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplos:

8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

100 → 50 → 25 → 76 → 38 → 19 → 58 → 29 → 88 → 44 → 22 →
11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 →
8 → 4 → 2 → 1 → ...

SEQUÊNCIA DE COLLATZ

$$\text{Dado } x_1 \text{ natural, } x_{k+1} = \begin{cases} x_k/2 & , x_k \text{ par} \\ 3x_k + 1 & , x_k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Exemplos:

8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 → 4 → 2 → 1 → ...

100 → 50 → 25 → 76 → 38 → 19 → 58 → 29 → 88 → 44 → 22 →
11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 →
8 → 4 → 2 → 1 → ...

27 → 82 → 41 → 124 → 62 → 31 → 94 → 47 → 142 → ... →
3.077 → 9.232 → 4.616 → ... → 4 → 2 → 1 → ...

Lothar Collatz (1910 – 1990)

Para qualquer x_1 inicial, existe k finito tal que $x_k = 1$.



SEQUÊNCIA DE COLLATZ

Lothar Collatz (1910 – 1990)

Para qualquer x_1 inicial, existe k finito tal que $x_k = 1$.



Já verificado para números menores que $5 \times 2^{60} \approx 6 \times 10^{18}$.

SEQUÊNCIA DE COLLATZ

Lothar Collatz (1910 – 1990)

Para qualquer x_1 inicial, existe k finito tal que $x_k = 1$.



Já verificado para números menores que $5 \times 2^{60} \approx 6 \times 10^{18}$.

Nos complexos:

$$z_{k+1} = \frac{1}{4} \left[2 + 7z_k - (2 + 5z_k) \cos(\pi z_k) \right].$$

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

$K = 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ \dots$

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B =

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2 1

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2 1 2

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2 1 2 2

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

K = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

B = 1 2 2 1 1 2 1 2 2 1 2 1 1 2 1 1 2 2 1 2 1 1 2 1 2 2 ...

William Kolakoski (1966)

K é a única sequência de 1's e 2's, começando por 1 que é idêntica a sequência de tamanhos de blocos **B**.

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

Qual a expressão geral para K_n ?



SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

Qual a expressão geral para K_n ? 

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, ocorre novamente? 

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

Qual a expressão geral para K_n ? 

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, ocorre novamente? 

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, $K_p \dots K_1$ ocorre? 

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

Qual a expressão geral para K_n ?

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, ocorre novamente?

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, $K_p \dots K_1$ ocorre?

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, $\overline{K_1} \dots \overline{K_p}$ ocorre?

SEQUÊNCIA DE KOLAKOSKI

Qual a expressão geral para K_n ?

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, ocorre novamente?

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, $K_p \dots K_1$ ocorre?

Se $K_1 \dots K_p$ ocorre, $\overline{K_1} \dots \overline{K_p}$ ocorre?

A frequência de 1's é igual a $1/2$?

SOREMÚN SOMORDNÍLAP



NÚMEROS PALÍNDROMOS

Um número é **PALÍNDROMO** ou **CAPICUA** se ele é igual ao seu reverso.

NÚMEROS PALÍNDROMOS

Um número é **PALÍNDROMO** ou **CAPICUA** se ele é igual ao seu reverso.

Exemplos: 121, 35.753, 2.227.222.

NÚMEROS PALÍNDROMOS

Um número é **PALÍNDROMO** ou **CAPICUA** se ele é igual ao seu reverso.

Exemplos: 121, 35.753, 2.227.222.

Sequência: $\boxed{\text{Dado } x_k \text{ natural, } x_{k+1} = x_k + \text{Reverso}(x_k)}$

NÚMEROS PALÍNDROMOS

Exemplos:

NÚMEROS PALÍNDROMOS

Exemplos:

$$29 \rightarrow 29 + 92 = 121,$$

NÚMEROS PALÍNDROMOS

Exemplos:

$$29 \rightarrow 29 + 92 = 121,$$

$$789 \rightarrow 789 + 987 = 1.776 \rightarrow 1.776 + 6.771 = 8.547 \rightarrow \\ 8.547 + 7.458 = 16.005 \rightarrow 16.005 + 50.061 = 660.066$$

NÚMEROS PALÍNDROMOS

Exemplos:

$$29 \rightarrow 29 + 92 = 121,$$

$$789 \rightarrow 789 + 987 = 1.776 \rightarrow 1.776 + 6.771 = 8.547 \rightarrow \\ 8.547 + 7.458 = 16.005 \rightarrow 16.005 + 50.061 = 660.066$$

Para qualquer x_1 inicial, existe k finito tal que x_k é palíndromo.



NÚMEROS PALÍNDROMOS

Exemplos:

$$29 \rightarrow 29 + 92 = 121,$$

$$789 \rightarrow 789 + 987 = 1.776 \rightarrow 1.776 + 6.771 = 8.547 \rightarrow \\ 8.547 + 7.458 = 16.005 \rightarrow 16.005 + 50.061 = 660.066$$

Para qualquer x_1 inicial, existe k finito tal que x_k é palíndromo.

Fácil de verificar para $x_1 = 195$ e $x_1 = 197$, mas ainda não provado nem para $x_1 = 196$.



CONJECTURA DE BEAL



$$A^x + B^y = C^z$$

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



Exemplos:

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.

Exemplos:

$$2^3 + 2^3 = 2^4$$

[2]

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



Exemplos:

$$2^3 + 2^3 = 2^4 \quad [2]$$

$$3^3 + 6^3 = 3^5 \quad [3]$$

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



Exemplos:

$$2^3 + 2^3 = 2^4 \quad [2]$$

$$3^3 + 6^3 = 3^5 \quad [3]$$

$$7^6 + 7^7 = 98^3 \quad [7]$$

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



Exemplos:

$$2^3 + 2^3 = 2^4 \quad [2]$$

$$3^3 + 6^3 = 3^5 \quad [3]$$

$$7^6 + 7^7 = 98^3 \quad [7]$$

$$33^5 + 66^5 = 33^6 \quad [11]$$

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



Exemplos:

$$2^3 + 2^3 = 2^4 \quad [2]$$

$$3^3 + 6^3 = 3^5 \quad [3]$$

$$7^6 + 7^7 = 98^3 \quad [7]$$

$$33^5 + 66^5 = 33^6 \quad [11]$$

$$34^5 + 51^4 = 85^4 \quad [17]$$

CONJECTURA DE BEAL

Se $A^x + B^y = C^z$, onde A, B, C, x, y, z são inteiros positivos e x, y, z são todos maiores que 2, então A, B, C têm um fator primo comum.



Exemplos:

$$2^3 + 2^3 = 2^4 \quad [2]$$

$$3^3 + 6^3 = 3^5 \quad [3]$$

$$7^6 + 7^7 = 98^3 \quad [7]$$

$$33^5 + 66^5 = 33^6 \quad [11]$$

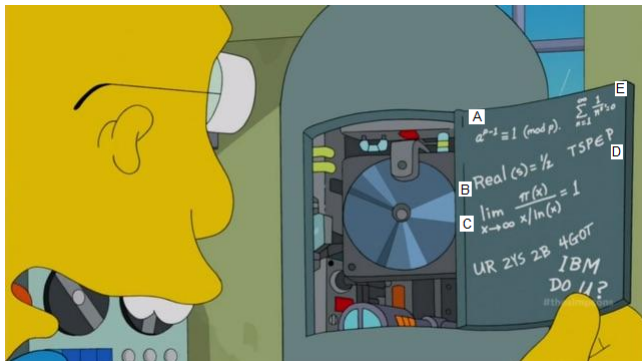
$$34^5 + 51^4 = 85^4 \quad [17]$$

$$19^4 + 38^3 = 57^3 \quad [19]$$

CONJECTURA DE BEAL

BEAL \Rightarrow FERMAT





A = Pequeno Teorema de Fermat
 B = Hipótese de Riemann
 C = Teorema dos Números Primos

D = Problema do Caixeiro Viajante
 E = Função Zeta de Riemann