Números p-ádicos e o Teorema de Monsky

Érik Amorim

Rutgers, the State University of New Jersey

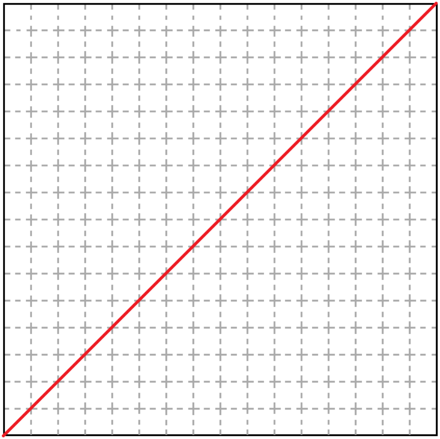
Agosto de 2015

Monsky

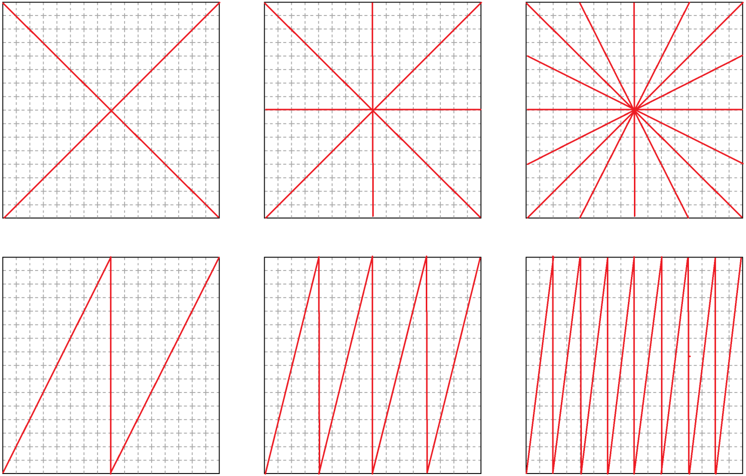
Ideia: dividir um quadrado em triângulos de mesma área.

Monsky

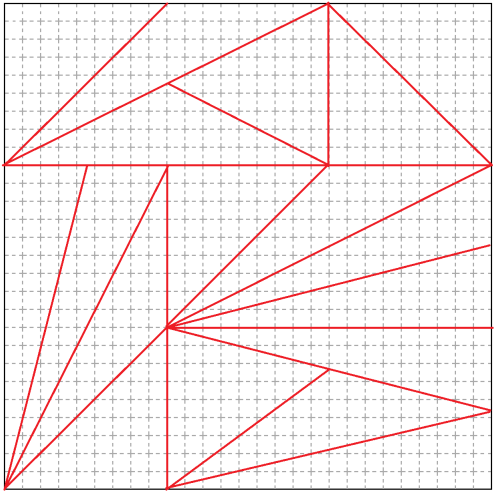
Ideia: dividir um quadrado em triângulos de mesma área.



Monsky



Monsky



Monsky

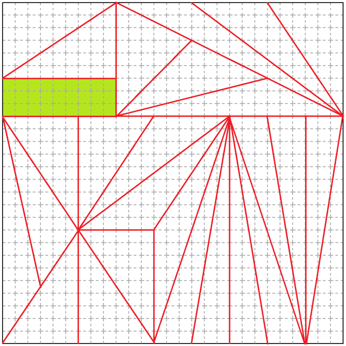
Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.



Base 2

$$10101 =$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 =$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 = 2$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 = 2$$

$111,1 =$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 = 2$$

$$111,1 = \frac{1}{2^1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = 7,5$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 = 2$$

$$111,1 = \frac{1}{2^1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = 7,5$$

$$100101,001011 =$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 = 2$$

$$111,1 = \frac{1}{2^1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = 7,5$$

$$100101,001011 = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} + 2^0 + 2^2 + 2^5$$

Base 2

$$10101 = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$10 = 2$$

$$111,1 = \frac{1}{2^1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = 7,5$$

$$100101,001011 = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} + 2^0 + 2^2 + 2^5$$

Inteiros ímpares terminam em 1
Inteiros pares terminam em 0

Números p-ádicos

O p em "p-ádico" representa um número inteiro positivo.

Números p-ádicos

O p em "p-ádico" representa um número inteiro positivo.
Spoiler! p sempre vai ser um número...

Números p-ádicos

O p em "p-ádico" representa um número inteiro positivo.
Spoiler! p sempre vai ser um número **primo**.

Números p-ádicos

O p em "p-ádico" representa um número inteiro positivo.
Spoiler! p sempre vai ser um número **primo**. Mas por enquanto podemos trabalhar com $p = 10$ pra facilitar.

Inteiros p-ádicos

Inteiros p-ádicos:

Inteiros p-ádicos

Inteiros p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**.

Inteiros p-ádicos

Inteiros p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**.

Com $p = 10$:

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 10 \quad 42 \quad 16384$$

Inteiros p-ádicos

Inteiros p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**.

Com $p = 10$:

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 10 \quad 42 \quad 16384$$

$$\ldots 123123\mathbf{123}6954825962291$$

Inteiros p-ádicos

Inteiros p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**.

Com $p = 10$:

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 10 \quad 42 \quad 16384$$

$$\ldots 123123\mathbf{123}6954825962291$$

$$\ldots 99999\mathbf{9}$$

Inteiros p-ádicos

Inteiros p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**.

Com $p = 10$:

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 8 \quad 10 \quad 42 \quad 16384$$

$$\ldots 123123\mathbf{123}6954825962291$$

$$\ldots 99999\mathbf{9}$$

$$\ldots 14967309367794272004857 10$$

Números p-ádicos

Números p-ádicos:

Números p-ádicos

Números p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**

Números p-ádicos

Números p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**, e podendo ter vírgula.

Números p-ádicos

Números p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**, e podendo ter vírgula. Só não pode estender **infinitamente para a direita**, mesmo depois da vírgula.

Números p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**, e podendo ter vírgula. Só não pode estender **infinitamente para a direita**, mesmo depois da vírgula.

Com $p = 10$:

$$\ldots 5576922,57042 \qquad \text{pode}$$

Números p-ádicos

Números p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**, e podendo ter vírgula. Só não pode estender **infinitamente para a direita**, mesmo depois da vírgula.

Com $p = 10$:

$$\ldots 5576922,57042 \qquad \text{pode}$$

$$0,029594 \qquad \text{pode}$$

Números p-ádicos

Números p-ádicos: números escritos em base p, podendo se estender **infinitamente para a esquerda**, e podendo ter vírgula. Só não pode estender **infinitamente para a direita**, mesmo depois da vírgula.

Com $p = 10$:

$$\ldots 5576922{,}57042 \qquad \text{pode}$$

$$0{,}029594 \qquad \text{pode}$$

$$0{,}\mathbf{3}3333\ldots \qquad \text{não pode!}$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos!

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\
\hline
\end{array}
$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & & \\ \dots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\ \hline & & & & & 0 & \end{array}$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & {}^{1} & {}^{1} & & \\ \ldots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\ \hline & & & & 0 & 0 & \end{array}$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & 1 & 1 & & \\ \dots & & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\ \dots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \ldots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & 9 & \\
\ldots & & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\
\ldots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\
\hline
\ldots & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

10-ádicos

Não existe sinal de menos! Mas também não precisa:

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & & ^1 & ^1 & ^1 & ^1 & & \\
 & \ldots & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & \\
 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\
\hline
 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

O que significa que

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal!

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal! A soma seria

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal! A soma seria

$$\frac{9}{}$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal! A soma seria

$$\frac{9}{1 -}$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal! A soma seria

$$\frac{9}{1-10} =$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal! A soma seria

$$\frac{9}{1-10} = \frac{9}{-9} =$$

Coincidência?

$$\ldots 9999\mathbf{9} = -1$$

O número

$$\ldots 9999\mathbf{9}$$

é a notação decimal para

$$9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots$$

Uma PG infinita ilegal! A soma seria

$$\frac{9}{1-10} = \frac{9}{-9} = -1$$

Coincidência?

É claro que não é coincidência. Coisas legais por trás disso:

Coincidência?

É claro que não é coincidência. Coisas legais por trás disso:

- Divisibilidade por potências de 10
- Métrica 10-ádica
- Norma 10-ádica
- Sequências e séries em espaços normados

Coincidência?

É claro que não é coincidência. Coisas legais por trás disso:

- Divisibilidade por potências de 10
- Métrica 10-ádica
- Norma 10-ádica
- Sequências e séries em espaços normados

Coisas que não cabem nessa apresentação!

Multiplicação

$$\begin{array}{cccccccc} & \dots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 & \\ & \dots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\ \hline \end{array}$$

Multiplicação

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \dots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 & \\
 & & \dots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\
\hline
\dots & 1 & & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 &
\end{array}
$$

Multiplicação

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \dots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 & \\
 & & \dots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\
\hline
 & \dots & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 & \\
\dots & 2 & 0 & 0 & 5 & 9 & 6 & 0 &
\end{array}
$$

10-ádicos

Multiplicação

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \dots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 & \\
 & & & & \dots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\
\hline
 & & & \dots & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 & \\
 & & \dots & 2 & 0 & 0 & 5 & 9 & 6 & 0 & \\
\dots & 4 & 0 & 1 & 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

Multiplicação

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \ldots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 & \\
 & & & & \ldots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\
\hline
 & & & \ldots & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 & \\
 & & \ldots & 2 & 0 & 0 & 5 & 9 & 6 & 0 & \\
 & \ldots & 4 & 0 & 1 & 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & \\
\ldots & 3 & 5 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

10-ádicos

Multiplicação

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & \dots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 & \\
 & & & & & \dots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\
\hline
 & & & & \dots & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 & \\
 & & & \dots & 2 & 0 & 0 & 5 & 9 & 6 & 0 & \\
 & & \dots & 4 & 0 & 1 & 1 & 9 & 2 & 0 & 0 & \\
 & \dots & 3 & 5 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\
\dots & 1 & 5 & 0 & 4 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Multiplicação

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \dots & 5 & 0 & 1 & 4 & 9 \\
 & & & & & \dots & 3 & 7 & 8 & 4 & 2 & \times \\
\hline
 & & & & \dots & 1 & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 \\
 & & & \dots & 2 & 0 & 0 & 5 & 9 & 6 & 0 \\
 & & \dots & 4 & 0 & 1 & 1 & 9 & 2 & 0 & 0 \\
 & \dots & 3 & 5 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 1 & 5 & 0 & 4 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
 & & & & & \dots & 3 & 8 & 4 & 5 & 8
\end{array}
$$

10-ádicos

Divisão?

10-ádicos

Divisão?

É aqui que está o problema com $p = 10$.

Divisão?

É aqui que está o problema com $p = 10$. Mas com p primo dá!

Divisão?

É aqui que está o problema com $p = 10$. Mas com p primo dá! A partir de agora, p será sempre um número primo.

Divisão?

É aqui que está o problema com $p = 10$. Mas com p primo dá! A partir de agora, p será sempre um número primo.

Fato: É sempre possível fazer a divisão entre dois números p-ádicos (exceto divisão por zero).

10-ádicos

Divisão?

É aqui que está o problema com $p = 10$. Mas com p primo dá! A partir de agora, p será sempre um número primo.

Fato: É sempre possível fazer a divisão entre dois números p-ádicos (exceto divisão por zero).

Todos os números racionais são números p-ádicos.

3-ádicos

Exercício: prove que, como números 3-ádicos,

$$\frac{5}{18} = \ldots 1111\mathbf{1},21$$

$$\frac{1}{8} = \ldots 212121\mathbf{21}22$$

p-ádicos

Alguns números reais não são números p-ádicos.

p-ádicos

Alguns números reais não são números p-ádicos. Não existe $\sqrt{2}$ nos números 10-ádicos:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & ? & ? & ? & ? & ? & a & \\ \dots & ? & ? & ? & ? & ? & a & \times \\ \hline \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \end{array}$$

p-ádicos

Alguns números reais não são números p-ádicos. Não existe $\sqrt{2}$ nos números 10-ádicos:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & ? & ? & ? & ? & ? & a & \\ \dots & ? & ? & ? & ? & ? & a & \times \\ \hline \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \end{array}$$

a^2 terminando em 2? Não dá.

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais.

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
 \dots & & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 &
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
\ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\
\ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
 & & \ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & \\
 & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \\
\ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
 & & \ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & \\
 & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \\
\ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & \\
\ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
 & & & & \ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & \\
 & & & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & \ldots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & \\
 & & \ldots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
\ldots & 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & & & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
 & & & & & \dots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & \\
 & & & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & & \dots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & \\
 & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \dots & 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\dots & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

p-ádicos

Alguns números p-ádicos não são números reais. Com $p = 5$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
 & & & & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & \times \\
\hline
 & & & & & \dots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & \\
 & & & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & & \dots & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & \\
 & & & \dots & 4 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & \dots & 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\dots & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
 & & & & & & \dots & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 &
\end{array}
$$

p-ádicos

$$(\ldots 431212)^2 = \ldots 44444\mathbf{4}$$

como números 5-ádicos.

p-ádicos

$$(\ldots 431212)^2 = \ldots 44444\mathbf{4}$$

como números 5-ádicos.

$$\ldots 44444\mathbf{4} =$$

p-ádicos

$$(\ldots 431212)^2 = \ldots 44444\mathbf{4}$$

como números 5-ádicos.

$$\ldots 44444\mathbf{4} = 4 + 20 + 100 + 500 + 2500 + \cdots =$$

p-ádicos

$$(\ldots 431212)^2 = \ldots 44444\mathbf{4}$$

como números 5-ádicos.

$$\ldots 44444\mathbf{4} = 4 + 20 + 100 + 500 + 2500 + \cdots = \frac{4}{1-5} =$$

p-ádicos

$$(\ldots 431212)^2 = \ldots 44444\mathbf{4}$$

como números 5-ádicos.

$$\ldots 44444\mathbf{4} = 4 + 20 + 100 + 500 + 2500 + \cdots = \frac{4}{1-5} = -1$$

p-ádicos

$$(\ldots 431212)^2 = \ldots 44444\mathbf{4}$$

como números 5-ádicos.

$$\ldots 44444\mathbf{4} = 4 + 20 + 100 + 500 + 2500 + \cdots = \frac{4}{1-5} = -1$$

Então existe $\sqrt{-1}$ nos números 5-ádicos!

Valoração

A função v_p

Valoração

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n,

Valoração

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n, denotada por $v_p(n)$,

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n, denotada por $v_p(n)$, é por definição o número de zeros com que n termina.

Valoração

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n, denotada por $v_p(n)$, é por definição o número de zeros com que n termina.

$$v_3(\ldots 0210021120000) = 4$$

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n, denotada por $v_p(n)$, é por definição o número de zeros com que n termina.

$$v_3(\ldots 0210021120000) = 4$$

$$v_3(2) = 0$$

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n, denotada por $v_p(n)$, é por definição o número de zeros com que n termina.

$$v_3(\ldots 0210021120000) = 4$$

$$v_3(2) = 0$$

$$v_3(0) =$$

A função v_p

A valoração p-ádica de um inteiro p-ádico n, denotada por $v_p(n)$, é por definição o número de zeros com que n termina.

$$v_3(\ldots 0210021120000) = 4$$

$$v_3(2) = 0$$

$$v_3(0) = \infty$$

Valoração

A função v_p

Valoração

A função v_p

A valoração p-ádica de um número p-ádico n que tem vírgula é por definição o negativo do número de casas depois da vírgula.

Valoração

A função v_p

A valoração p-ádica de um número p-ádico n que tem vírgula é por definição o negativo do número de casas depois da vírgula.

$$v_3(\ldots 112,0212021) = -7$$

Valoração

A função v_p

A valoração p-ádica de um número p-ádico n que tem vírgula é por definição o negativo do número de casas depois da vírgula.

$$v_3(\ldots 112,0212021) = -7$$

$$v_3(1,1) = -1$$

Propriedade da multiplicação

Propriedade da multiplicação

Se $v_p(m) = u$ e $v_p(n) = w$, então $v_p(mn) =$

Propriedade da multiplicação

Propriedade da multiplicação

Se $v_p(m) = u$ e $v_p(n) = w$, então $v_p(mn) = u + w$

Propriedade da multiplicação

Propriedade da multiplicação

Se $v_p(m) = u$ e $v_p(n) = w$, então $v_p(mn) = u + w$

É só contar os zeros (ou casas depois da vírgula).

Propriedade da multiplicação

Propriedade da multiplicação

Se $v_p(m) = u$ e $v_p(n) = w$, então $v_p(mn) = u + w$

É só contar os zeros (ou casas depois da vírgula).

Em particular,

$$v_p(1/n) = -v_p(n)$$

$$v_p(m/n) = v_p(m) - v_p(n)$$

Desigualdade ultramétrica

Desigualdade ultramétrica

- Se $v_p(m) \neq v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$
- Se $v_p(m) = v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

Desigualdade ultramétrica

Desigualdade ultramétrica

- Se $v_p(m) \neq v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$
- Se $v_p(m) = v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

A quantidade de zeros no final da soma de dois inteiros:

Desigualdade ultramétrica

Desigualdade ultramétrica

- Se $v_p(m) \neq v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$
- Se $v_p(m) = v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

A quantidade de zeros no final da soma de dois inteiros:

- Se os dois inteiros têm uma quantidade diferente, é a mesma que a do inteiro que tem menos

Desigualdade ultramétrica

Desigualdade ultramétrica

- Se $v_p(m) \neq v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$
- Se $v_p(m) = v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

A quantidade de zeros no final da soma de dois inteiros:

- Se os dois inteiros têm uma quantidade diferente, é a mesma que a do inteiro que tem menos
- Se os dois inteiros têm a mesma quantidade, é maior ou igual que essa quantidade

Desigualdade ultramétrica

Desigualdade ultramétrica

- Se $v_p(m) \neq v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$
- Se $v_p(m) = v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

A quantidade de zeros no final da soma de dois inteiros:

- Se os dois inteiros têm uma quantidade diferente, é a mesma que a do inteiro que tem menos
- Se os dois inteiros têm a mesma quantidade, é maior ou igual que essa quantidade

Analogamente para números com vírgula, só que ao contrário.

Desigualdade ultramétrica

Desigualdade ultramétrica

- Se $v_p(m) \neq v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) = \min\{v_p(m), v_p(n)\}$
- Se $v_p(m) = v_p(n)$, então $v_p(m \pm n) \geq \min\{v_p(m), v_p(n)\}$

A quantidade de zeros no final da soma de dois inteiros:

- Se os dois inteiros têm uma quantidade diferente, é a mesma que a do inteiro que tem menos
- Se os dois inteiros têm a mesma quantidade, é maior ou igual que essa quantidade

Analogamente para números com vírgula, só que ao contrário.

Obs.: $v_p(-n) = v_p(n)$

Uma pausa

Você sabia que...

Uma pausa

Você sabia que...

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Uma pausa

Você sabia que...

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x} \frac{\text{sen}(x/3)}{x/3} dx = \frac{\pi}{2}$$

Uma pausa

Você sabia que...

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3} \frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5} dx = \frac{\pi}{2}$$

Uma pausa

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3} \frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5} \cdots \frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13} dx =$$

Uma pausa

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3} \frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5} \cdots \frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13} dx = \frac{\pi}{2}$$

Uma pausa

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3}\frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5}\cdots\frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3}\frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5}\cdots\frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13}\frac{\operatorname{sen}(x/15)}{x/15}dx =$$

Uma pausa

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3} \frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5} \cdots \frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3} \frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5} \cdots \frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13} \frac{\operatorname{sen}(x/15)}{x/15} \, dx =$$

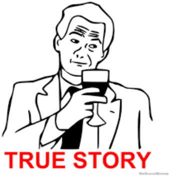
$$= \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000} \pi$$

Uma pausa

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3}\frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5}\cdots\frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\operatorname{sen}(x/3)}{x/3}\frac{\operatorname{sen}(x/5)}{x/5}\cdots\frac{\operatorname{sen}(x/13)}{x/13}\frac{\operatorname{sen}(x/15)}{x/15}\,dx =$$

$$= \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi$$



Teorema de Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração

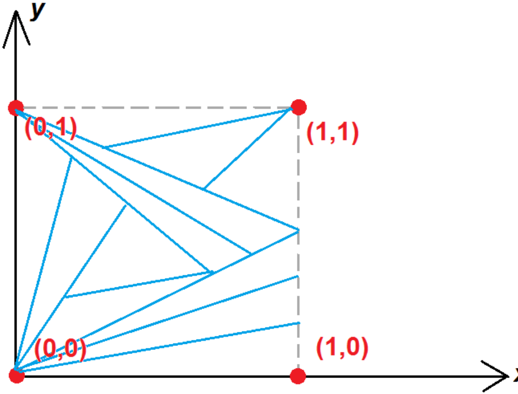
Demonstração:

Demonstração

Demonstração: suponha que o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ no plano cartesiano foi dividido em N triângulos de mesma área $(1/N)$.

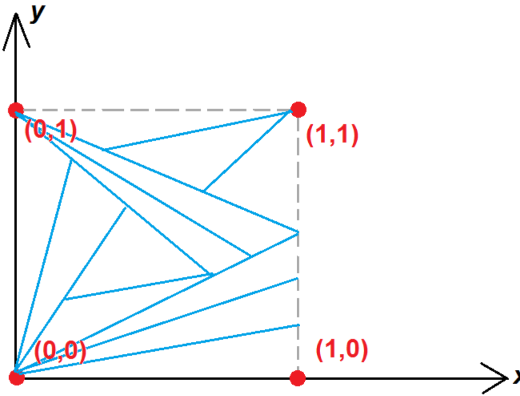
Demonstração

Demonstração: suponha que o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ no plano cartesiano foi dividido em N triângulos de mesma área $(1/N)$.



Demonstração

Demonstração: suponha que o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ no plano cartesiano foi dividido em N triângulos de mesma área $(1/N)$. Vamos provar que N tem que ser par.



Valoração real

Vamos usar os números 2-ádicos.

Valoração real

Vamos usar os números 2-ádicos. O que é muito bom porque 2 é primo.

Valoração real

Vamos usar os números 2-ádicos. O que é muito bom porque 2 é primo. **(Exercício)**

Valoração real

Vamos usar os números 2-ádicos. O que é muito bom porque 2 é primo. **(Exercício)**

Uma coisa que eu esqueci:

Valoração real

Vamos usar os números 2-ádicos. O que é muito bom porque 2 é primo. **(Exercício)**

Uma coisa que eu esqueci: a valoração p-ádica se estende para o conjunto dos números reais, com as mesmas propriedades de antes.

Valoração real

Vamos usar os números 2-ádicos. O que é muito bom porque 2 é primo. **(Exercício)**

Uma coisa que eu esqueci: a valoração p-ádica se estende para o conjunto dos números reais, com as mesmas propriedades de antes.

Isto é, alguns números reais não são 2-ádicos, mas todos têm uma **valoração** 2-**ádica**.

Pintura

Pinte cada um dos infinitos pontos (x, y) do quadrado de vermelho, azul ou verde:

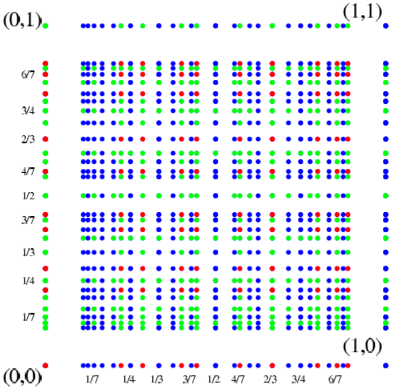
Pintura

Pinte cada um dos infinitos pontos (x, y) do quadrado de vermelho, azul ou verde:

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Pintura

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$



Lema

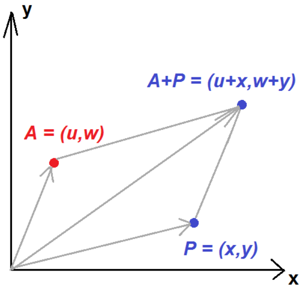
Lema 1

Se A é vermelho, então P e $A + P$ têm a mesma cor, para todo P.

Lema

Lema 1

Se A é vermelho, então P e $A + P$ têm a mesma cor, para todo P.



Lema

- $\color{red}{(x, y)}$ se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- $\color{blue}{(x, y)}$ se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- $\color{green}{(x, y)}$ se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Demonstração:

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Demonstração: $A = (u, w), P = (x, y)$. Como A é vermelho, $v_2(u) > 0$ e $v_2(w) > 0$.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Demonstração: $A = (u, w), P = (x, y)$. Como A é vermelho, $v_2(u) > 0$ e $v_2(w) > 0$.

Primeiro, P vermelho implica $A + P$ vermelho:

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Demonstração: $A = (u, w), P = (x, y)$. Como A é vermelho, $v_2(u) > 0$ e $v_2(w) > 0$.

Primeiro, P vermelho implica $A + P$ vermelho: pela desigualdade ultramétrica, como $v_2(x) > 0$ temos $v_2(u + x) > 0$,

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Demonstração: $A = (u, w), P = (x, y)$. Como A é vermelho, $v_2(u) > 0$ e $v_2(w) > 0$.

Primeiro, P vermelho implica $A + P$ vermelho: pela desigualdade ultramétrica, como $v_2(x) > 0$ temos $v_2(u + x) > 0$, e o mesmo para w e $w + y$.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Agora, P azul implica $A + P$ azul:

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Agora, P azul implica $A + P$ azul: suponha $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Agora, P azul implica $A + P$ azul: suponha $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$. Temos $v_2(u + x) = v_2(x) \leq 0$, porque $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(u) > 0$.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Agora, P azul implica $A + P$ azul: suponha $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$. Temos $v_2(u + x) = v_2(x) \leq 0$, porque $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(u) > 0$. E também

$$v_2(w + y) \geq \min\{v_2(w), v_2(y)\} \geq v_2(x) = v_2(u + x)$$

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Agora, P azul implica $A + P$ azul: suponha $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$. Temos $v_2(u + x) = v_2(x) \leq 0$, porque $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(u) > 0$. E também

$$v_2(w + y) \geq \min\{v_2(w), v_2(y)\} \geq v_2(x) = v_2(u + x)$$

Então $A + P$ é azul.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Agora, P azul implica $A + P$ azul: suponha $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$. Temos $v_2(u + x) = v_2(x) \leq 0$, porque $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(u) > 0$. E também

$$v_2(w + y) \geq \min\{v_2(w), v_2(y)\} \geq v_2(x) = v_2(u + x)$$

Então $A + P$ é azul.

O mesmo para verde. $\blacksquare$.

Lema

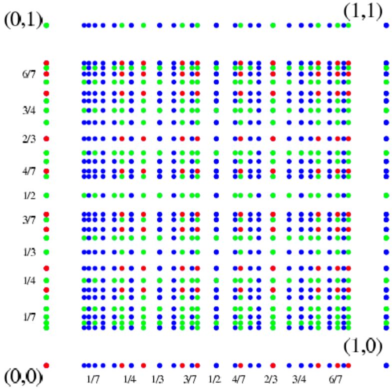
Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Lema

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.



Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Demonstração:

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Demonstração: Suponha que uma reta possa ter as 3 cores. SPG, a reta parte da origem.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Demonstração: Suponha que uma reta possa ter as 3 cores. SPG, a reta parte da origem. Então os pontos (x, y) nessa reta têm a razão x/y constante, denotada por λ.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Demonstração: Suponha que uma reta possa ter as 3 cores. SPG, a reta parte da origem. Então os pontos (x, y) nessa reta têm a razão x/y constante, denotada por λ. Se (x, y) é azul, $v_p(\lambda) = v_p(x) - v_p(y) \leq 0$.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Demonstração: Suponha que uma reta possa ter as 3 cores. SPG, a reta parte da origem. Então os pontos (x, y) nessa reta têm a razão x/y constante, denotada por λ. Se (x, y) é azul, $v_p(\lambda) = v_p(x) - v_p(y) \leq 0$. Se (x, y) é verde, $v_p(\lambda) = v_p(x) - v_p(y) > 0$.

Lema

- (x, y) se $v_2(x) > 0$ e $v_2(y) > 0$
- (x, y) se $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (x, y) se $v_2(y) \leq 0$ e $v_2(y) < v_2(x)$

Lema 2

Qualquer reta só tem no máximo 2 cores.

Demonstração: Suponha que uma reta possa ter as 3 cores. SPG, a reta parte da origem. Então os pontos (x, y) nessa reta têm a razão x/y constante, denotada por λ. Se (x, y) é azul, $v_p(\lambda) = v_p(x) - v_p(y) \leq 0$. Se (x, y) é verde, $v_p(\lambda) = v_p(x) - v_p(y) > 0$. Absurdo. ■

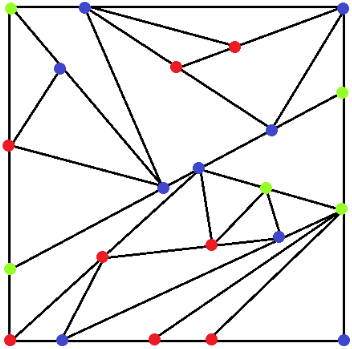
Combinatória

Lema 3

Existe pelo menos um triângulo com vértices um de cada cor.

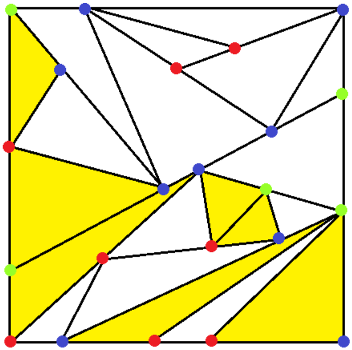
Lema 3

Existe pelo menos um triângulo com vértices um de cada cor.



Lema 3

Existe pelo menos um triângulo com vértices um de cada cor.



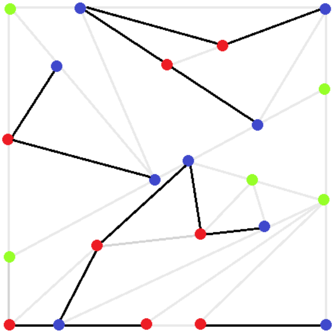
Demonstração: Suponha por absurdo que todos os triângulos têm seus 3 vértices pintados de no máximo 2 cores.

Demonstração: Suponha por absurdo que todos os triângulos têm seus 3 vértices pintados de no máximo 2 cores.

Considerar as arestas vermelho-azul. **Existe um número par ou ímpar delas na fronteira do quadrado?**

Demonstração: Suponha por absurdo que todos os triângulos têm seus 3 vértices pintados de no máximo 2 cores.

Considerar as arestas vermelho-azul. **Existe um número par ou ímpar delas na fronteira do quadrado?**



Combinatória

Duas maneiras de descobrir a **paridade** do número de arestas vermelho-azul na fronteira do quadrado:

Combinatória

Duas maneiras de descobrir a **paridade** do número de arestas vermelho-azul na fronteira do quadrado:

- Contar todas elas na fronteira do quadrado e ver se é par ou ímpar

Combinatória

Duas maneiras de descobrir a **paridade** do número de arestas vermelho-azul na fronteira do quadrado:

- Contar todas elas na fronteira do quadrado e ver se é par ou ímpar
- Somar o número de arestas vermelho-azul em cada triângulo.

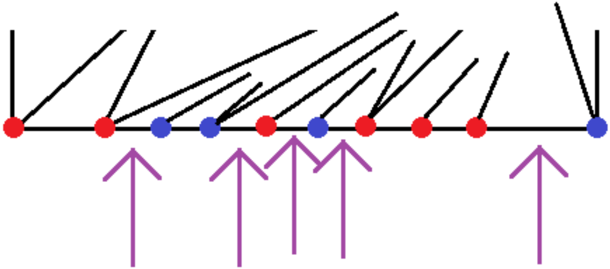
Combinatória

Duas maneiras de descobrir a **paridade** do número de arestas vermelho-azul na fronteira do quadrado:

- Contar todas elas na fronteira do quadrado e ver se é par ou ímpar
- Somar o número de arestas vermelho-azul em cada triângulo. Afinal, cada aresta interior vai ser contada duas vezes, e não vai contribuir para a **paridade** do resultado final.

Combinatória

A contagem pelo primeiro método dá um número ímpar.



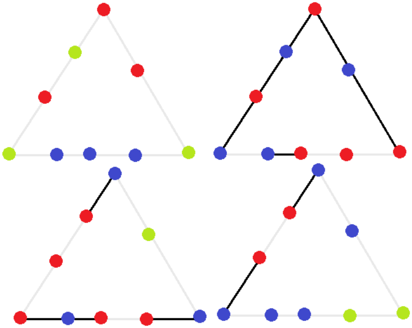
Combinatória

A contagem pelo segundo método dá um número par,

Combinatória

A contagem pelo segundo método dá um número par, porque dá um número par **para cada triângulo**.

A contagem pelo segundo método dá um número par, porque dá um número par **para cada triângulo**. Lembre-se que estamos assumindo que os triângulos só têm vértices de no máximo 2 cores.



Combinatória

Absurdo!

Combinatória

Absurdo! Então tem que existir pelo menos um triângulo com vértices um de cada cor. ■

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração: estamos tentando mostrar que N é par. A área de cada triângulo é $1/N$, e já sabemos que existe pelo menos um com vértices um de cada cor.

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração: estamos tentando mostrar que N é par. A área de cada triângulo é $1/N$, e já sabemos que existe pelo menos um com vértices um de cada cor.

Qual é a área desse triângulo?

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração: estamos tentando mostrar que N é par. A área de cada triângulo é $1/N$, e já sabemos que existe pelo menos um com vértices um de cada cor.

Qual é a área desse triângulo? SPG seu vértice vermelho é a origem.

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração: estamos tentando mostrar que N é par. A área de cada triângulo é $1/N$, e já sabemos que existe pelo menos um com vértices um de cada cor.

Qual é a área desse triângulo? SPG seu vértice vermelho é a origem. Sejam (x,y) e (a,b) os outros dois.

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração: estamos tentando mostrar que N é par. A área de cada triângulo é $1/N$, e já sabemos que existe pelo menos um com vértices um de cada cor.

Qual é a área desse triângulo? SPG seu vértice vermelho é a origem. Sejam (x,y) e (a,b) os outros dois.

$$\pm A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} =$$

Monsky

Teorema de Monsky

É impossível dividir um quadrado em um número **ímpar** de triângulos de mesma área.

Demonstração: estamos tentando mostrar que N é par. A área de cada triângulo é $1/N$, e já sabemos que existe pelo menos um com vértices um de cada cor.

Qual é a área desse triângulo? SPG seu vértice vermelho é a origem. Sejam (x,y) e (a,b) os outros dois.

$$\pm A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{xb - ay}{2}$$

Monsky

- (x, y): $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (a, b): $v_2(b) \leq 0$ e $v_2(b) < v_2(a)$

$$A = \frac{1}{N} = \pm \frac{xb - ay}{2}$$

Monsky

- (x, y): $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (a, b): $v_2(b) \leq 0$ e $v_2(b) < v_2(a)$

$$A = \frac{1}{N} = \pm\frac{xb - ay}{2}$$

$$v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b)$$

Monsky

- (x, y): $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (a, b): $v_2(b) \leq 0$ e $v_2(b) < v_2(a)$

$$A = \frac{1}{N} = \pm\frac{xb - ay}{2}$$

$$v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b) < v_2(y) + v_2(a) = v_2(ay)$$

Monsky

- (x, y): $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (a, b): $v_2(b) \leq 0$ e $v_2(b) < v_2(a)$

$$A = \frac{1}{N} = \pm\frac{xb - ay}{2}$$

$$v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b) < v_2(y) + v_2(a) = v_2(ay)$$

$$v_2(xb - ay) = v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b)$$

Monsky

- (x, y): $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (a, b): $v_2(b) \leq 0$ e $v_2(b) < v_2(a)$

$$A = \frac{1}{N} = \pm\frac{xb - ay}{2}$$

$$v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b) < v_2(y) + v_2(a) = v_2(ay)$$

$$v_2(xb - ay) = v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b) \leq 0$$

Monsky

- (x, y): $v_2(x) \leq 0$ e $v_2(y) \geq v_2(x)$
- (a, b): $v_2(b) \leq 0$ e $v_2(b) < v_2(a)$

$$A = \frac{1}{N} = \pm\frac{xb - ay}{2}$$

$$v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b) < v_2(y) + v_2(a) = v_2(ay)$$

$$v_2(xb - ay) = v_2(xb) = v_2(x) + v_2(b) \leq 0$$

$$v_2(1/N) = v_2(xb - ay) - v_2(2) = v_2(xb - ay) - 1 \leq -1 < 0$$

Monsky

$$v_2\left(1/N\right) < 0$$

Monsky

$$v_2\left(1/N\right) < 0$$

$$v_2(1) - v_2(N) < 0$$

Monsky

$$v_2\left(1/N\right) < 0$$

$$v_2(1) - v_2(N) < 0$$

$$-v_2(N) < 0$$

Monsky

$$v_2\left(1/N\right) < 0$$

$$v_2(1) - v_2(N) < 0$$

$$-v_2(N) < 0$$

$$v_2(N) > 0$$

Monsky

$$v_2\left(1/N\right) < 0$$

$$v_2(1) - v_2(N) < 0$$

$$-v_2(N) < 0$$

$$v_2(N) > 0$$

$$N = \ldots ????0$$

Monsky

$$v_2\left(1/N\right) < 0$$

$$v_2(1) - v_2(N) < 0$$

$$-v_2(N) < 0$$

$$v_2(N) > 0$$

$$N = \ldots ????0$$

N é par!

Referências

- **p-adic Numbers: An introduction** (Universitext), Gouvêa F., Springer, 2003
- en.wikipedia.org/wiki/Monsky%27s_theorem
- www.math.lsu.edu/∼verrill/teaching/math7280/triangles.pdf

Nada a ver com nada