Os Normais

Thiago Ramos

ICMC-USP

Motivação

"A história de toda humanidade está escrita nos algarismos do π."

"A história de toda humanidade está escrita nos algarismos do π."

Facebook

Sistemas Dinâmicos: O que é?

Sistemas Dinâmicos: O que é?

Definição

A teoria dos sistemas dinâmicos é uma área da matemática que prevê o futuro.

Sistemas Dinâmicos: O que é?

Definição

A teoria dos sistemas dinâmicos é uma área da matemática que prevê o futuro.
Ou seja, dada uma função $f : X \to X$, *queremos saber como* f *influencia o futuro do conjunto* X.

Sistemas Dinâmicos: Exemplos

- O clima terrestre.

Sistemas Dinâmicos: Exemplos

- O clima terrestre.
  Na década de 60 o matemático Edward Lorenz descreveu simplificadamente um modelo matemático para o clima terrestre através de um sistema de equações diferenciais.

Sistemas Dinâmicos: Exemplos

- O clima terrestre.
  Na década de 60 o matemático Edward Lorenz descreveu simplificadamente um modelo matemático para o clima terrestre através de um sistema de equações diferenciais.

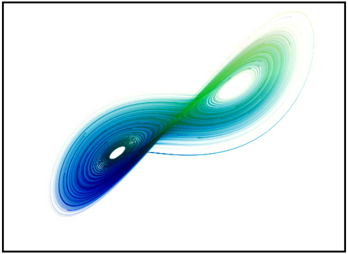


Figura: Atrator de Lorenz.

- O clima terrestre. (Sistema Dinâmico Contínuo)
  Na década de 60 o matemático Edward Lorenz descreveu simplificadamente um modelo matemático para o clima terrestre através de um sistema de equações diferenciais.

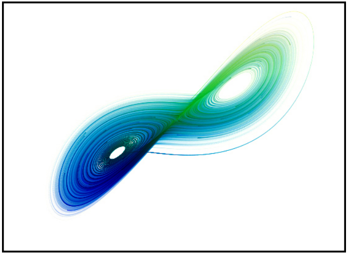


Figura: Atrator de Lorenz.

Sistemas Dinâmicos: Exemplos

Considere $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$.

Sistemas Dinâmicos: Exemplos

Considere $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$. Dado x, o que acontece com o conjunto $O(x)$ das órbitas de x, onde

$$O(x) = \{f^{(n)}(x) = f(f(f(...f(x)))), n \in \mathbb{N}\}$$

Considere $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$. Dado x, o que acontece com o conjunto $O(x)$ das órbitas de x, onde

$$O(x) = \{f^{(n)}(x) = f(f(f(...f(x)))), n \in \mathbb{N}\}$$

Sabemos do Cálculo I, que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{\dfrac{1}{2^n}}$$

Considere $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$. Dado x, o que acontece com o conjunto $O(x)$ das órbitas de x, onde

$$O(x) = \{f^{(n)}(x) = f(f(f(...f(x)))), n \in \mathbb{N}\}$$

Sabemos do Cálculo I, que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

Considere $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$. Dado x, o que acontece com o conjunto $O(x)$ das órbitas de x, onde

$$O(x) = \{f^{(n)}(x) = f(f(f(...f(x)))), n \in \mathbb{N}\}$$

Sabemos do Cálculo I, que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

Então, dado qualquer ponto $x \in (0, \infty)$ sabemos que no futuro, as órbitas de x tendem para 1.

Considere $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$. Dado x, o que acontece com o conjunto $O(x)$ das órbitas de x, onde

$$O(x) = \{f^{(n)}(x) = f(f(f(...f(x)))), n \in \mathbb{N}\}$$

Sabemos do Cálculo I, que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$$

Então, dado qualquer ponto $x \in (0, \infty)$ sabemos que no futuro, as órbitas de x tendem para 1. Esse é um exemplo de um *Sistema Dinâmico Discreto*.

Na definição que vimos de Sistema Dinâmico, f e X podiam ser qualquer coisa.

Na definição que vimos de Sistema Dinâmico, f e X podiam ser qualquer coisa.
Em Teoria Ergódica, reduzimos nossa classe de funções f e conjuntos X.

Teoria Ergódica

Na definição que vimos de Sistema Dinâmico, f e X podiam ser qualquer coisa.
Em Teoria Ergódica, reduzimos nossa classe de funções f e conjuntos X.
Pedimos que X seja um espaço de medida e f uma transformação que deixa invariante a medida de X.

Teoria Ergódica

Na definição que vimos de Sistema Dinâmico, f e X podiam ser qualquer coisa.
Em Teoria Ergódica, reduzimos nossa classe de funções f e conjuntos X.
Pedimos que X seja um espaço de medida e f uma transformação que deixa invariante a medida de X.

Mas o que isso significa?

Medidas

Medidas

Definição

Seja X um conjunto e $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ uma σ- álgebra sobre X. Uma função $m : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma medida se:

Medidas

Definição

Seja X *um conjunto e* $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ *uma* σ*- álgebra sobre* X*. Uma função* $m : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *é uma medida se:*

- $m(\emptyset) = 0$

Medidas

Definição

Seja X um conjunto e $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ uma σ- álgebra sobre X. Uma função $m : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma medida se:

- $m(\emptyset) = 0$
- *Dada uma sequência enumerável e disjunta $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de Σ, vale que*

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

A medida de Lebesgue

A medida de Lebesgue

Existe uma medida m, chamada de medida de Lebesgue, sobre uma $\sigma-$ álgebra Σ de $\mathbb{R}$, tal que:

A medida de Lebesgue

Existe uma medida m, chamada de medida de Lebesgue, sobre uma $\sigma-$álgebra Σ de $\mathbb{R}$, tal que:

- m é invariante por translação, ou seja, $m(A) = m(A + r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

A medida de Lebesgue

Existe uma medida m, chamada de medida de Lebesgue, sobre uma $\sigma-$álgebra Σ de $\mathbb{R}$, tal que:

- m é invariante por translação, ou seja, $m(A) = m(A + r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$.
- Todo intervalo é mensurável e $m((a, b)) = b - a$ (vale para intervalos abertos, fechados, infinitos, etc).

A medida de Lebesgue

Existe uma medida m, chamada de medida de Lebesgue, sobre uma $\sigma-$ álgebra Σ de $\mathbb{R}$, tal que:

- m é invariante por translação, ou seja, $m(A) = m(A + r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$.
- Todo intervalo é mensurável e $m((a, b)) = b - a$ (vale para intervalos abertos, fechados, infinitos, etc).

Será essa a medida que vamos utilizar daqui em diante!

Quase todo

Quase todo

Proposição

Seja m *uma medida e* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de mensuráveis tal que* $E_{n+1} \subset E_n$ *e* $m(E_1) < \infty$. *Então*

$$m(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

Quase todo

Note que dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\{x\} = \cap_{n=1}^{\infty}(x - 1/n, x + 1/n)$$

Então,

$$m(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m((x - 1/n, x + 1/n)) = 0$$

Note que dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\{x\} = \cap_{n=1}^{\infty}(x - 1/n, x + 1/n)$$

Então,

$$m(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m((x - 1/n, x + 1/n)) = 0$$

Agora, como $\mathbb{Q} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável

Quase todo

Note que dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\{x\} = \cap_{n=1}^{\infty}(x - 1/n, x + 1/n)$$

Então,

$$m(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m((x - 1/n, x + 1/n)) = 0$$

Agora, como $\mathbb{Q} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável, pela segunda propriedade de medida, temos que

$$m(\mathbb{Q}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(\{q\}) = 0$$

Quase todo

Note que dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\{x\} = \cap_{n=1}^{\infty}(x - 1/n, x + 1/n)$$

Então,

$$m(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} m((x - 1/n, x + 1/n)) = 0$$

Agora, como $\mathbb{Q} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável, pela segunda propriedade de medida, temos que

$$m(\mathbb{Q}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(\{q\}) = 0$$

Dizemos então que quase todo ponto não é racional, ou seja, quase todo ponto é *irracional.*

Voltando à Teoria Ergódica

Voltando à Teoria Ergódica

Definição

Seja (X, Σ, m) *um espaço de medida. Dizemos que* $f : X \to X$ *deixa a medida* m *invariante se*

$$m(A) = m(f^{-1}(A))$$

para qualque conjunto mensurável A *de* X*.*

Definição

Seja (X, Σ, m) *um espaço de medida. Dizemos que* $f : X \to X$ *deixa a medida* m *invariante se*

$$m(A) = m(f^{-1}(A))$$

para qualque conjunto mensurável A *de* X.

Probabilisticamente falando, isso significa que a chance de um ponto estar em A é a mesma de sua imagem estar em A.

Voltando à Teoria Ergódica

Como foi dito anteriormente, vamos precisar de um espaço de medida e de uma transformação que deixa a medida deste espaço invariante.

Voltando à Teoria Ergódica

Como foi dito anteriormente, vamos precisar de um espaço de medida e de uma transformação que deixa a medida deste espaço invariante.

- O nosso espaço de medida será: $([0,1], \Sigma, m)$, onde m é a medida de Lebesgue.

Voltando à Teoria Ergódica

Como foi dito anteriormente, vamos precisar de um espaço de medida e de uma transformação que deixa a medida deste espaço invariante.

- O nosso espaço de medida será: $([0,1], \Sigma, m)$, onde m é a medida de Lebesgue.
- A nossa transformação será dada por $f : [0,1] \to [0,1]$, tal que

$$f(x) = 10x - [10x]$$

  onde $[x]$ é a parte inteira de x.

Voltando à Teoria Ergódica

Como foi dito anteriormente, vamos precisar de um espaço de medida e de uma transformação que deixa a medida deste espaço invariante.

- O nosso espaço de medida será: $([0,1], \Sigma, m)$, onde m é a medida de Lebesgue.
- A nossa transformação será dada por $f : [0,1] \to [0,1]$, tal que

$$f(x) = 10x - [10x]$$

onde $[x]$ é a parte inteira de x. (Expansão Decimal)

Expansão Decimal: Exemplos

Temos que $f(x) = 10x - [10x]$. Suponha que $x = 0,\overline{1234567890}$.

Expansão Decimal: Exemplos

Temos que $f(x) = 10x - [10x]$. Suponha que $x = 0,\overline{1234567890}$.

Então

$$f(x) = 10x - [10x] = 1,23456789012... - 1 = 0,234567890...$$

Expansão Decimal: Exemplos

Temos que $f(x) = 10x - [10x]$. Suponha que $x = 0,\overline{1234567890}$.

Então

$$f(x) = 10x - [10x] = 1,23456789012... - 1 = 0,234567890...$$

$$f(f(x)) = 10f(x) - [10f(x)] = 2,345678... - 2 = 0,3456789..$$

Expansão Decimal: Exemplos

Temos que $f(x) = 10x - [10x]$. Suponha que $x = 0,\overline{1234567890}$.

Então

$$f(x) = 10x - [10x] = 1,23456789012... - 1 = 0,234567890...$$

$$f(f(x)) = 10f(x) - [10f(x)] = 2,345678... - 2 = 0,3456789..$$

Note que sempre que aplicamos f em x, "retiramos" o número logo depois da vírgula. A sequência dos números retirados, forma exatamente a expansão decimal de x.
No exemplo acima, como $x = 0,1234...$ retiramos 1, depois 2, depois 3, etc.

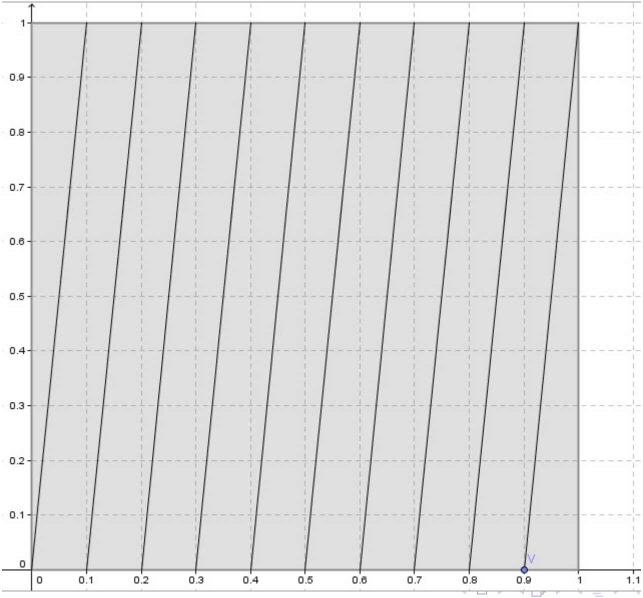
Expansão Decimal

Proposição

A Expansão Decimal deixa a medida de Lebesgue invariante. Ou seja, se A é um mensurável de $[0, 1]$ então

$$m(A) = m(f^{-1}(A))$$

Expansão Decimal



Ergodicidade

Ergodicidade

Definição

Seja (X, Σ, m) um espaço de medida tal que $m(X) = 1$, uma transformação $f : X \to X$ que deixa m invariante é chamada de Ergódica se pra quase todo ponto, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(f^{(i)}(x)) = \int g dm$$

onde g é qualquer função integrável.

Ergodicidade

Definição

Seja (X, Σ, m) um espaço de medida tal que $m(X) = 1$, uma transformação $f : X \to X$ que deixa m invariante é chamada de Ergódica se pra quase todo ponto, vale que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(f^{(i)}(x)) = \int g dm$$

onde g é qualquer função integrável.

WTF?!

Ergodicidade

Dado um conjunto E mensurável, considere $g_E(x) = 1$ se $x \in E$ e 0 caso contrário. g_E é integrável e portanto, temos que se f é ergódica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g_E(f^{(i)}(x)) = \int g_E \, dm$$

Ergodicidade

Dado um conjunto E mensurável, considere $g_E(x) = 1$ se $x \in E$ e 0 caso contrário. g_E é integrável e portanto, temos que se f é ergódica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g_E(f^{(i)}(x)) = \int g_E dm$$

Um resultado básico de teoria das medidas é que nesse caso

$$\int g_E dm = m(E)$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g_E(f^{(i)}(x))$$

conta exatamente a frequência que a órbita de x visitou E.

Ergodicidade

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g_E(f^{(i)}(x))$$

conta exatamente a frequência que a órbita de x visitou E.

Então nesse caso, podemos reescrever a definição de ergocididade como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in E\} = m(E)$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g_E(f^{(i)}(x))$$

conta exatamente a frequência que a órbita de x visitou E.

Então nesse caso, podemos reescrever a definição de ergocididade como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in E\} = m(E)$$

O que temos é uma relação entre médias temporais e medias espaciais.

Ergodicidade: Exemplo prático

Ergodicidade: Exemplo prático

Kajubi: $1000m^2$

Ergodicidade: Exemplo prático

Kajubi: $1000m^2$

Coreto de Kajubi: $100m^2$

Ergodicidade: Exemplo prático

Kajubi: $1000m^2$

Coreto de Kajubi: $100m^2$

Então o coreto de Kajubi ocupa $1/10$ da cidade (medieval) de Kajubi.

Kajubi: $1000m^2$

Coreto de Kajubi: $100m^2$

Então o coreto de Kajubi ocupa $1/10$ da cidade (medieval) de Kajubi.

Se os habitantes de Kajubi andarem de forma Ergodica pela cidade, então quase todo habitante de Kajubi passa $1/10$ do seu tempo visitando o Coreto.

Números Normais (Finalmente!)

Definição

Considere a string de k dígitos, $A = |a_0 a_1 a_2 ... a_{k-1}|$ com $a_i \in \{0, 1, 2..., 9\}$. Dizemos que um número $x \in [0, 1]$ é normal, se a string A aparece na expansão decimal de x com frequência $\dfrac{1}{10^k}$.

Números Normais (Finalmente!)

Definição

Considere a string de k dígitos, $A = |a_0 a_1 a_2 ... a_{k-1}|$ *com* $a_i \in \{0, 1, 2..., 9\}$. *Dizemos que um número* $x \in [0, 1]$ *é normal, se a string A aparece na expansão decimal de x com frequência* $\dfrac{1}{10^k}$.

Por exemplo, nenhum número racional é normal, pois todo número racional ou "termina"em zeros, ou é uma dízima periódica.

Números Normais (Finalmente!)

Definição

Considere a string de k dígitos, $A = |a_0 a_1 a_2 ... a_{k-1}|$ *com* $a_i \in \{0, 1, 2..., 9\}$. *Dizemos que um número* $x \in [0, 1]$ *é normal, se a string A aparece na expansão decimal de x com frequência* $\frac{1}{10^k}$.

Por exemplo, nenhum número racional é normal, pois todo número racional ou "termina" em zeros, ou é uma dízima periódica.

Em $0,\overline{1234567890}$ cada string de tamanho 1, aparece com frequência $1/10$, mas a string de tamanho 2, $A = |11|$ aparece com frequência 0.

Teorema

A função $f : [0,1] \to [0,1]$ *dada por*

$$f(x) = 10x - [10x]$$

é Ergódica.

Números Normais

Teorema

A função $f : [0,1] \to [0,1]$ *dada por*

$$f(x) = 10x - [10x]$$

é Ergódica.

Teorema

Quase todo número real é normal.

Números Normais

Considere o intervalo $[0, 1/10]$.Se f é ergódica, então temos que para quase todo x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in [0, 1/10]\} = m([0, 1/10]) = 1/10$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in [0, 1/10]\} = 1/10$$

Números Normais

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in [0, 1/10]\} = 1/10$$

Note que se $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, então $f^{(n)}(x)$ está em $[0, 1/10]$ se, e somente se, $a_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in [0, 1/10]\} = 1/10$$

Note que se $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, então $f^{(n)}(x)$ está em $[0, 1/10]$ se, e somente se, $a_n = 0$.

Por exemplo, se $x = 0,2301$, então $f^{(3)}(x) \in [0, 1/10]$, mas $f^{(4)}(x) \in [1/10, 2/10]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{f^{(n)}(x),\ n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) \in [0, 1/10]\} = 1/10$$

Note que se $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, então $f^{(n)}(x)$ está em $[0, 1/10]$ se, e somente se, $a_n = 0$.

Por exemplo, se $x = 0, 2301$, então $f^{(3)}(x) \in [0, 1/10]$, mas $f^{(4)}(x) \in [1/10, 2/10]$

Então, pelo limite acima, sabemos que para quase todo ponto x, o digito 0 parece com frequência $1/10$ em sua expansão decimal.

O teorema 42

Teorema

Se um número é normal, então a história da vida, do universo e tudo mais está escrita nos algarismos de sua expansão decimal.

Motivação

"A história de toda humanidade está escrita nos algarismos do π."

Motivação

"A história de toda humanidade está escrita nos algarismos do π."

Mas então π é normal?

"A história de toda humanidade está escrita nos algarismos do π."

Mas então π é normal?

Motivação

"A história de toda humanidade está escrita nos algarismos do π."

Mas então π é normal?

Não sei.

Não fique tão frustrado!

Não fique tão frustrado!

- $0,012345678910111213...$ é normal. (Constante de Champernowne)

Não fique tão frustrado!

- $0,012345678910111213...$ é normal. (Constante de Champernowne)

- $0,01234567890102...99001002...999...$ é normal.

Não fique tão frustrado!

- $0,012345678910111213...$ é normal. (Constante de Champernowne)
- $0,01234567890102...99001002...999...$ é normal.
- $0,235711131719...$ é normal. (Copeland - Erdos)

Referências

- Ergodic Theory with a view towards Number Theory - Eisiedler, Manfred
- An introduction to Chaotic Dynamical Systems - Devaney, Robert
- Caos: A criação de uma nova ciência - Gleick, James