A Torre de Pisa de cartas

José Carlos F. Kling
(Guga)

Regras

Regras

- Não pode usar cola

Regras

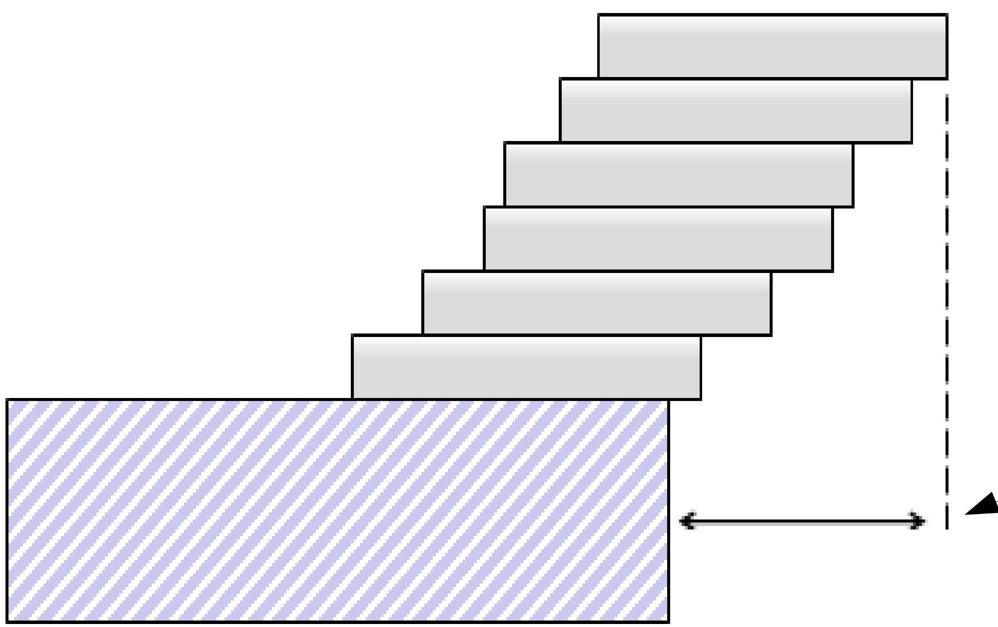
- Não pode usar cola
- Apenas 1 carta por nível

Regras

- Não pode usar cola
- Apenas 1 carta por nível
- Todas as cartas são idênticas

Regras

- Não pode usar cola
- Apenas 1 carta por nível
- Todas as cartas são idênticas



O objetivo é fazer essa distância ser a maior possível

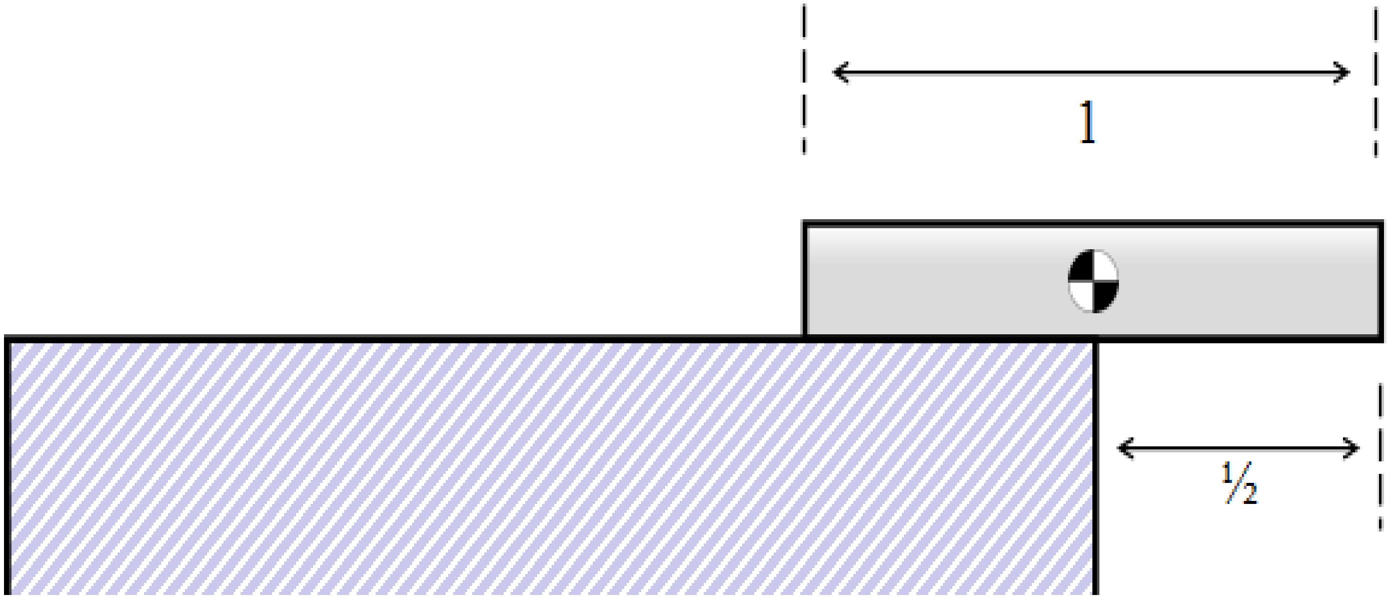
Como fazer?

Como fazer?

- Com apenas 1 carta, alinhamos seu centro de massa com o fim da mesa

Como fazer?

- Com apenas 1 carta, alinhamos seu centro de massa com o fim da mesa



Como fazer?

- Agora para 2 cartas:

Como fazer?

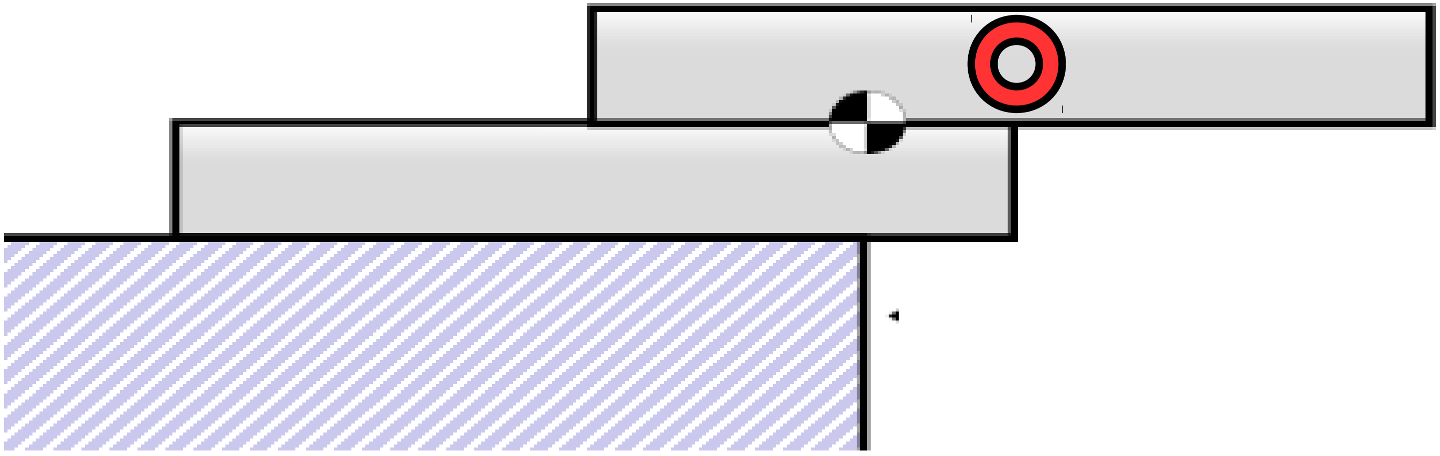
- Agora para 2 cartas:
  - Colocamos a segunda carta embaixo da primeira, com a ponta alinhada com seu centro de massa

Como fazer?

- Agora para 2 cartas:
  - Colocamos a segunda carta embaixo da primeira, com a ponta alinhada com seu centro de massa
  - Então calculamos o centro de massa das duas cartas juntas

Como fazer?

- Agora para 2 cartas:
  - Colocamos a segunda carta embaixo da primeira, com a ponta alinhada com seu centro de massa
  - Então calculamos o centro de massa das duas cartas juntas



Como fazer?

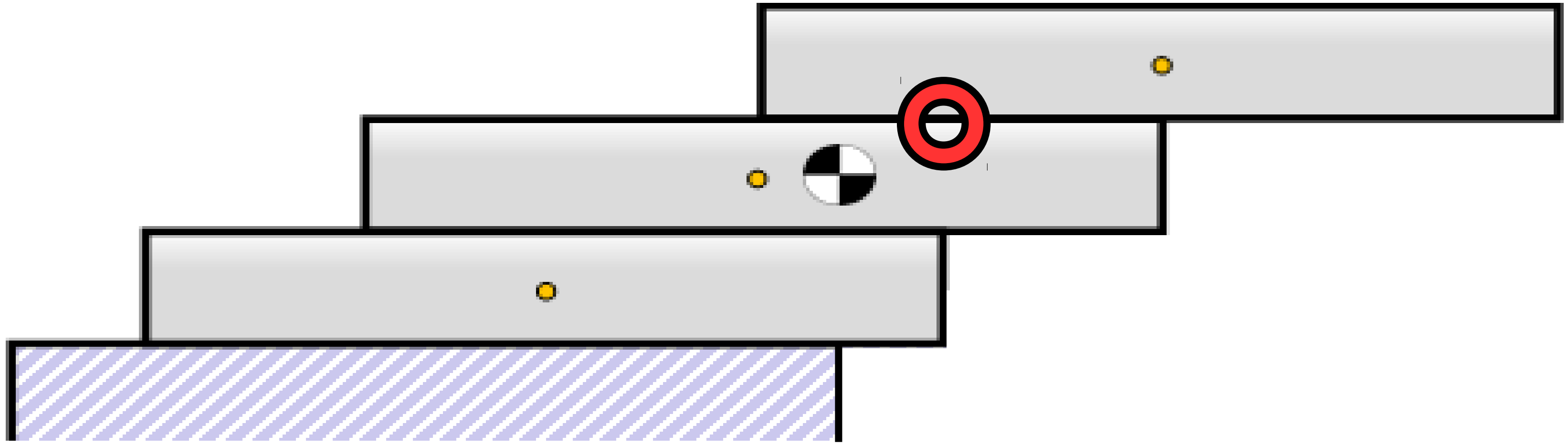
- Para 3 cartas:

Como fazer?

- Para 3 cartas:
  - Do mesmo jeito. Colocamos a terceira carta em baixo das duas com a ponta alinhada com o centro de massa

Como fazer?

- Para 3 cartas:
  - Sim, do mesmo jeito. Colocamos a terceira carta em baixo das duas com a ponta alinhada com o centro de massa



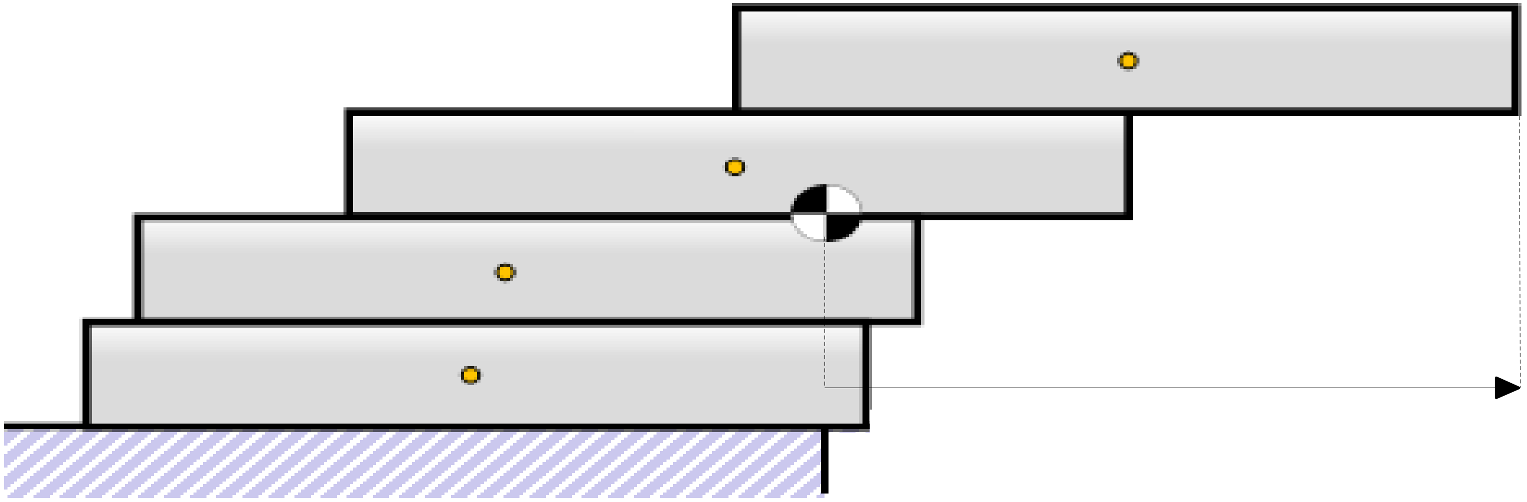
Quão boa é essa estratégia?

Quão boa é essa estratégia?

- Para responder, temos que descobrir que distância podemos alcançar

Quão boa é essa estratégia?

- Para responder, temos que descobrir que distância podemos alcançar
- Então basta descobrirmos qual a distância entre a ponta da 1ª carta e o centro de massa



Calculando a distância

- O centro de massa de um sistema de objetos pode ser calculado da seguinte forma:

$$C(n) = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2 + ... + x_n M_n}{M1 + M_2 + ... + M_3}$$

Calculando a distância

- O centro de massa de um sistema de objetos pode ser calculado da seguinte forma:

$$C(n) = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2 + ... + x_n M_n}{M1 + M_2 + ... + M_3}$$

- Vamos considerar que cada carta tem comprimento 2

Calculando a distância

- O centro de massa de um sistema de objetos pode ser calculado da seguinte forma:

$$C(n) = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2 + \ldots + x_n M_n}{M1 + M_2 + \ldots + M_3}$$

- Vamos considerar que cada carta tem comprimento 2 bluga (bl)

Calculando a distância

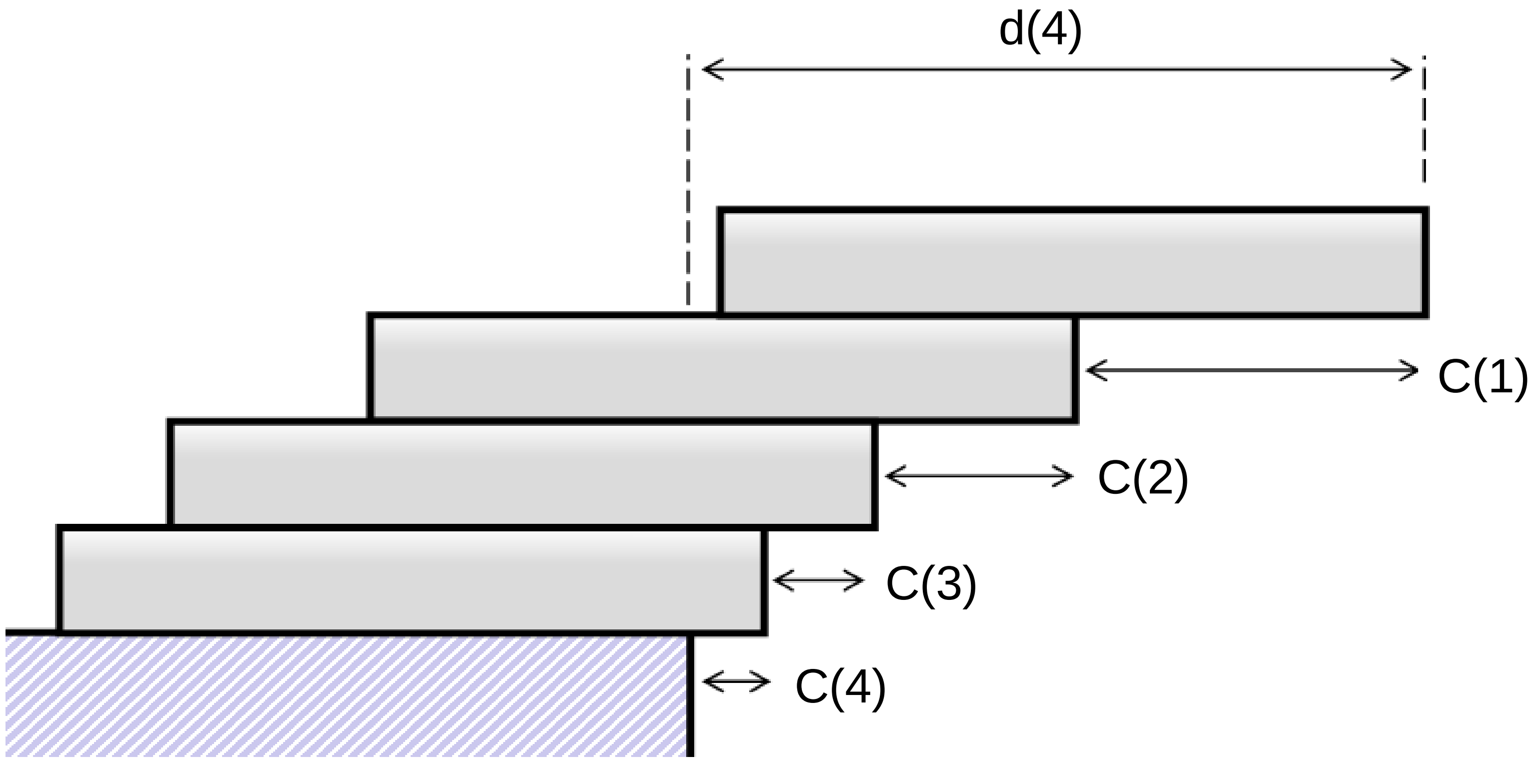
- O centro de massa de um sistema de objetos pode ser calculado da seguinte forma:

$$C(n) = \frac{x_1M_1+x_2M_2+...+x_nM_n}{M1+M_2+...+M_3}$$

- Vamos considerar que cada carta tem comprimento 2 bluga (bl). 1 bl = x cm, onde x é o comprimento de metade de uma carta em cm

Calculando a distância

- Usando essa fórmula, vamos calcular cada um dos C(n):



Calculando a distância

- Temos que C(1) = 1bl

Calculando a distância

- Temos que C(1) = 1bl
- Da forma como construímos a torre, sabemos que em uma torre com k cartas, o centro de massa das k-1 primeiras cartas (de cima) está a 1bl do centro de massa da k-ésima carta

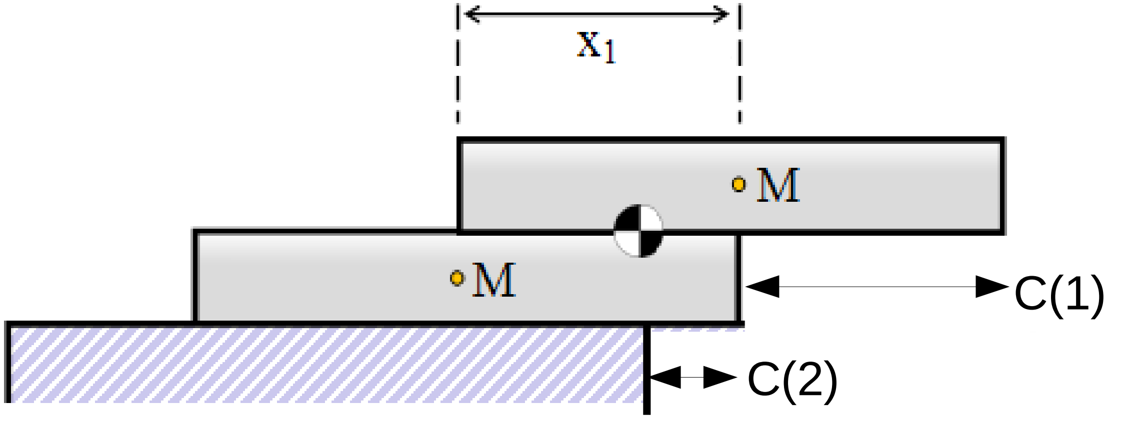
Calculando a distância

- Temos que C(1) = 1bl
- Da forma como construímos a torre, sabemos que em uma torre com k cartas, o centro de massa das k-1 primeiras cartas (de cima) está a 1bl do centro de massa da k-ésima carta
- Para k=2, tomando o centro de massa da 1ª carta como origem (x=0), temos:

Calculando a distância

- Temos que C(1) = 1bl
- Da forma como construímos a torre, sabemos que em uma torre com k cartas, o centro de massa das k-1 primeiras cartas (de cima) está a 1bl do centro de massa da k-ésima carta
- Para k=2, tomando o centro de massa da 1ª carta como origem (x=0), temos:

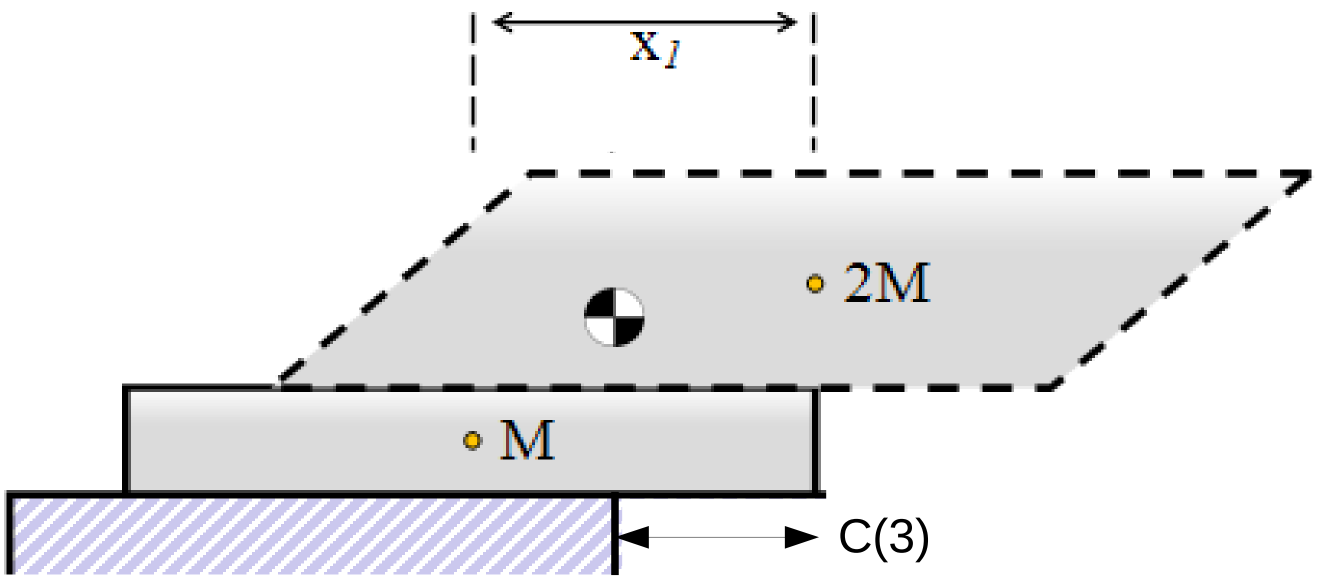
$$C(2) = \frac{0+x_1}{2} = \frac{1}{2}\,\text{bl}$$



Calculando a distância

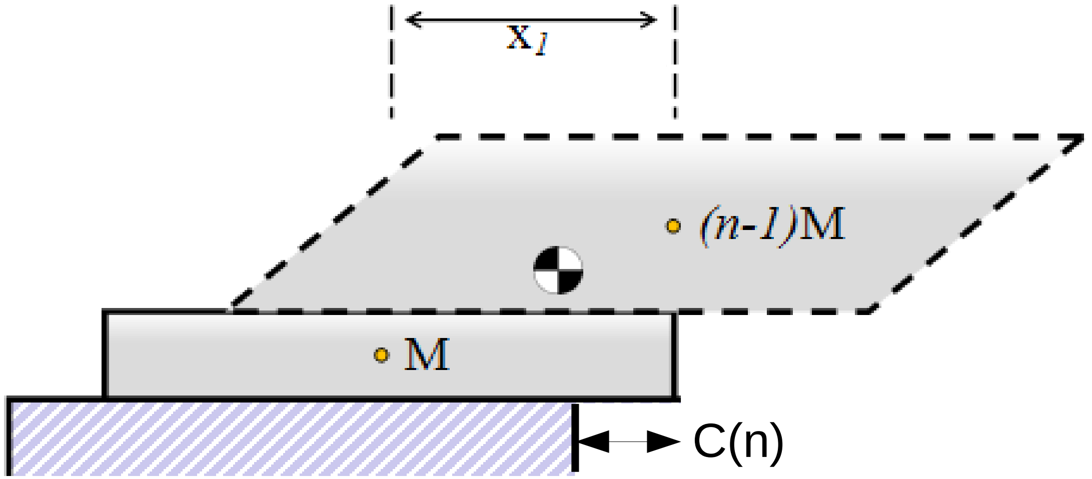
- Para k=3 tomamos a origem como o centro de massa das 2 primeiras cartas

$$C(3) = \frac{x_1}{3} = \frac{1}{3}\,\text{bl}$$



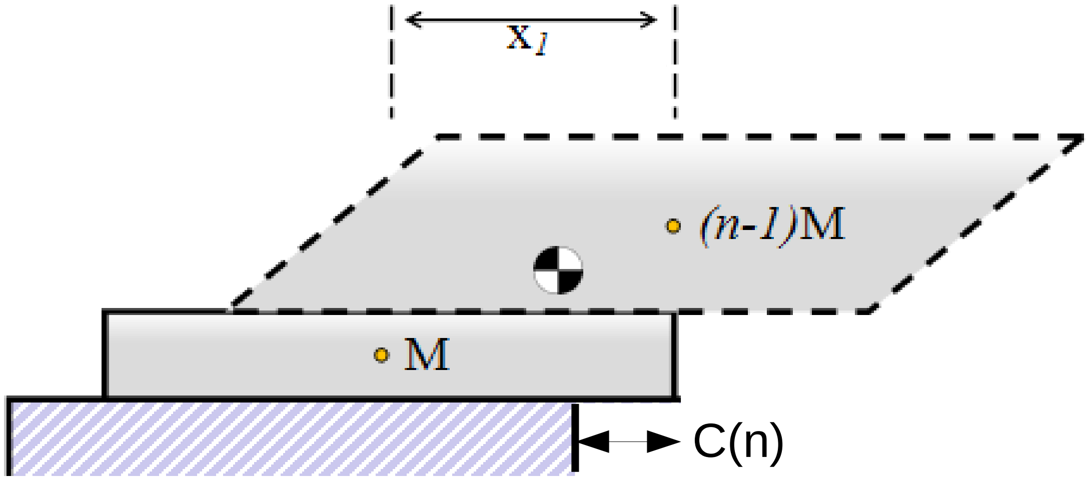
Calculando a distância

- Podemos generalizar esse resultado



Calculando a distância

- Podemos generalizar esse resultado



- Portanto

$$C(n) = \frac{x_1}{(n-1)+1} = \frac{1}{n}\text{bl}$$

Calculando a distância

- Portanto basta somar todos os $C(n)$

$$d(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\text{bl}$$

Calculando a distância

- Portanto basta somar todos os $C(n)$

$$d(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\text{bl}$$

- Tabela qt. de cartas / distância

1	1
2	1.5
3	1.833
4	2.083
5	2.283
10	2.930
15	3.318
20	3.598
30	3.995
40	4.279
50	4.499
100	5.187

Calculando a distância

- Portanto basta somar todos os $C(n)$

$$d(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\text{bl}$$

- Tabela qt. de cartas / distância

1	1
2	1.5
3	1.833
4	2.083
5	2.283
10	2.930

Aqui já temos uma carta que passou da beirada da mesa

15	3.318
20	3.598
30	3.995
40	4.279
50	4.499
100	5.187

E aqui, duas

Calculando a distância

- Portanto basta somar todos os $C(n)$

$$d(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\text{bl}$$

- Tabela qt. de cartas / distância

1	1
2	1.5
3	1.833
4	2.083
5	2.283
10	2.930

Aqui já temos uma carta que passou da beirada da mesa

15	3.318
20	3.598
30	3.995
40	4.279
50	4.499
100	5.187

E aqui, duas

- Até onde isso vai?

Uma comparação

- Vamos ver como nossa torre se sai em relação à Torre de Pisa

Uma comparação

- Vamos ver como nossa torre se sai em relação à Torre de Pisa
- Mas, para ser justo, vamos usar cartas de comprimento 2Sbl (SuperBluga)

Uma comparação

- Vamos ver como nossa torre se sai em relação à Torre de Pisa
- Mas, para ser justo, vamos usar cartas de comprimento 2Sbl (SuperBluga). 1Sbl = raio da base da Torre de Pisa em metros.

Uma comparação

- Vamos ver como nossa torre se sai em relação à Torre de Pisa
- Mas, para ser justo, vamos usar cartas de comprimento 2Sbl (SuperBluga). 1Sbl = raio da base da Torre de Pisa em metros.
- Vamos considerar que nossas cartas têm espessura 1

Uma comparação

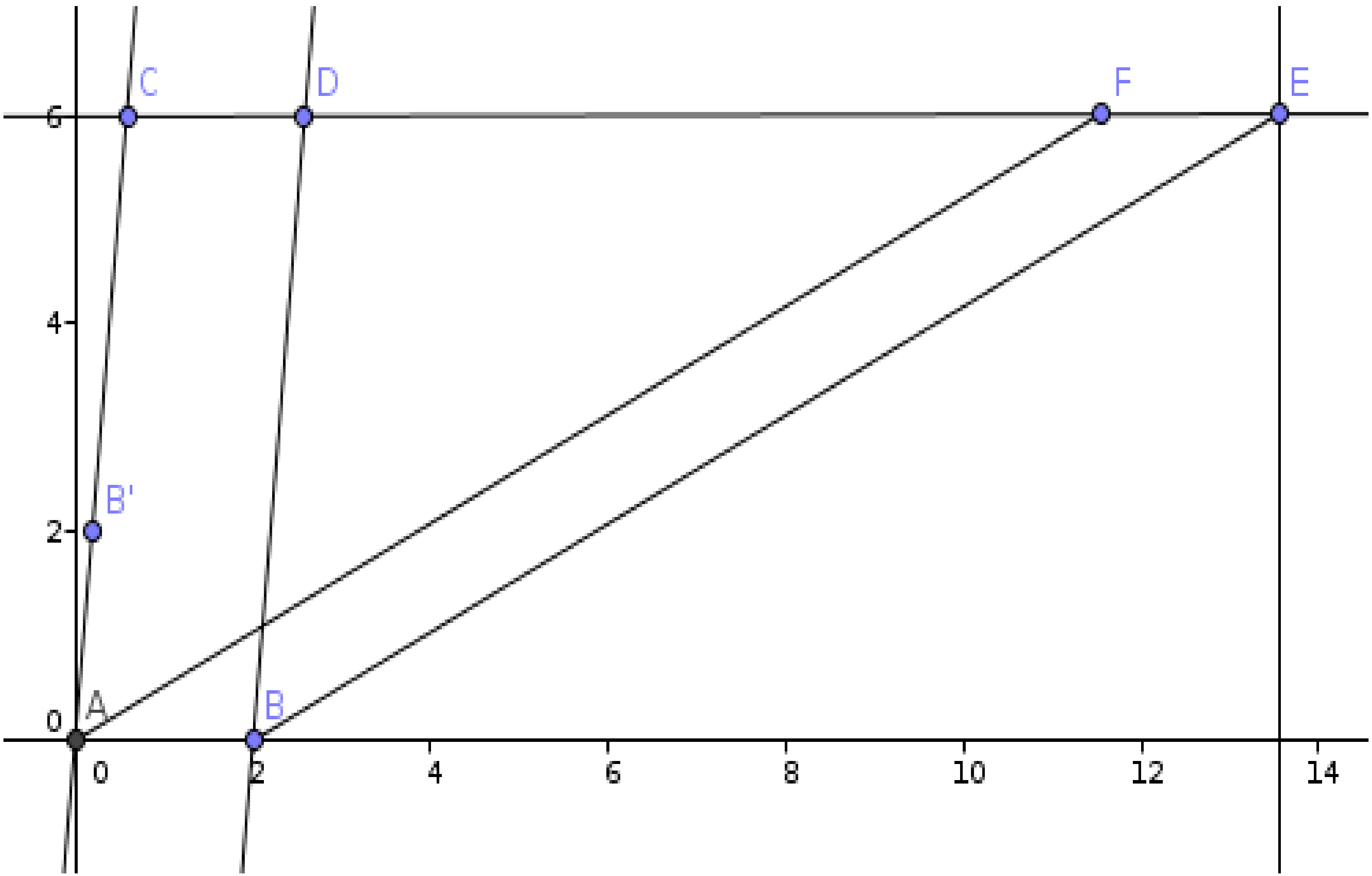
- Vamos ver como nossa torre se sai em relação à Torre de Pisa
- Mas, para ser justo, vamos usar cartas de comprimento 2Sbl (SuperBluga). 1Sbl = raio da base da Torre de Pisa em metros.
- Vamos considerar que nossas cartas tem espessura 1mm

Uma comparação

- Vamos ver como nossa torre se sai em relação à Torre de Pisa
- Mas, para ser justo, vamos usar cartas de comprimento 2Sbl (SuperBluga). 1Sbl = raio da base da Torre de Pisa em metros.
- Vamos considerar que nossas cartas têm espessura 1mm
- Como a Torre tem 56m, então teremos 56.000 cartas

Uma comparação

- Calculando a distância: $d(56.000) \approx 11.51033$ Sbl



A distância máxima

A distância máxima

- Como $d(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$bl , basta sabermos para que valor a série converge e saberemos qual a distância máxima que podemos alcançar

A distância máxima

- Como $d(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$bl , basta sabermos para que valor a série converge e saberemos qual a distância máxima que podemos alcançar
- Vamos compará-la com outra série

A distância máxima

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots$$

- Note que a nossa série é, termo a termo, maior que a outra

A distância máxima

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots\right.$$

1/2 1/2 1/2 1/2

- Note que a nossa série é, termo a termo, maior que a outra
- E note também que a outra série não converge

A distância máxima

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots$$

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{1/2}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{1/2}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots\right.}_{1/2}$$

- Note que a nossa série é, termo a termo, maior que a outra
- E note também que a outra série não converge
- Portanto, podemos fazer a torre de cartas se distanciar da mesa indefinidamente!

Então é fácil

Então é fácil

- Já que podemos fazer a distância tão grande quanto quisermos, vejamos como seria uma torre que pudesse me “pular”

Então é fácil

- Já que podemos fazer a distância tão grande quanto quisermos, vejamos como seria uma torre que pudesse me “pular”
- A minha altura é de aproximadamente de 42bl (ou 1,90m, se preferirem)

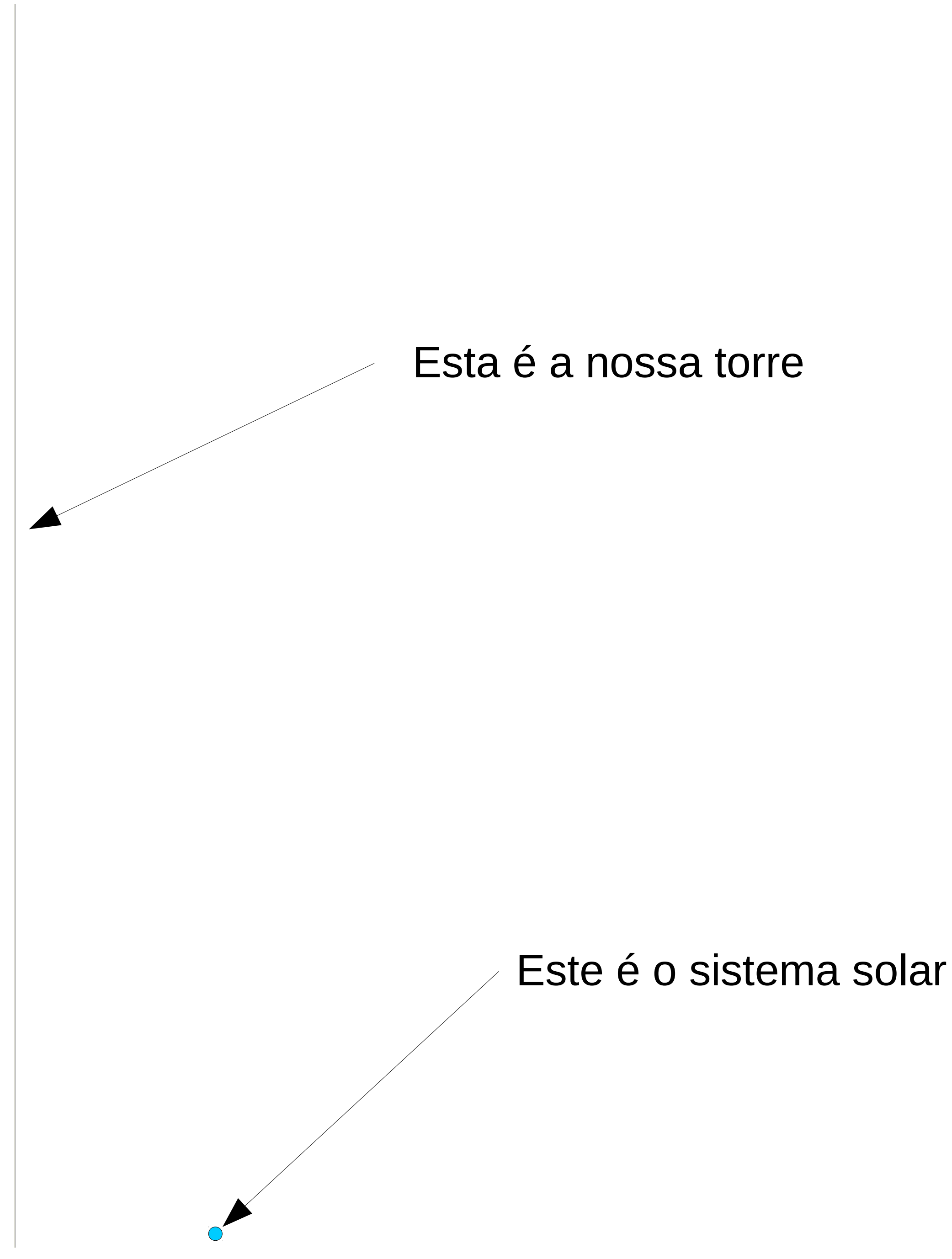
Então é fácil

- Já que podemos fazer a distância tão grande quanto quisermos, vejamos como seria uma torre que pudesse me “pular”
- A minha altura é de aproximadamente de 42bl (ou 1,90m, se preferirem)
- A quantidade de cartas necessárias é da ordem de 10^{18}

Então é fácil

- Já que podemos fazer a distância tão grande quanto quisermos, vejamos como seria uma torre que pudesse me “pular”
- A minha altura é de aproximadamente de 42bl (ou 1,90m, se preferirem)
- A quantidade de cartas necessárias é da ordem de 10^{18}
- Portanto nossa torre teria 10^{15}m de altura

Esta é a nossa torre


Esta é a nossa torre
Este é o sistema solar

A série harmônica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

A série harmônica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

- Os termos da série harmônica não admitem uma forma compacta, mas para valores n grande, podem ser aproximados por:

$$H_n \approx \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$$

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- Os termos da série harmônica não admitem uma forma compacta, mas para valores n grande, podem ser aproximados por:

$$H_n \approx \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$$

- Onde $\gamma \approx 0.5772156649$ a constante de Euler-Mascheroni.

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- Os termos da série harmônica não admitem uma forma compacta, mas para valores n grande, podem ser aproximados por:

$$H_n \approx \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$$

- Onde $\gamma \approx 0.5772156649$ a constante de Euler-Mascheroni.
- Ainda não se sabe se essa constante é irracional

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- Podemos computar, então:

$$H(56.000) \approx 11.51$$

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- Podemos computar, então:

$$H(56.000) \approx 11.51 \qquad H(10^6) \approx 14.39$$

A série harmônica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

- Podemos computar, então:

$$H(56.000) \approx 11.51$$

$$H(10^6) \approx 14.39$$

$$H(10^9) \approx 21,30$$

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- Podemos computar, então:

$H(56.000) \approx 11.51$

$H(10^6) \approx 14.39$

$H(10^9) \approx 21,30$

$H(10^{12}) \approx 28,21$

A série harmônica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$

- Podemos computar, então:

$$H(56.000) \approx 11.51 \qquad H(10^6) \approx 14.39$$

$$H(10^9) \approx 21,30 \qquad H(10^{12}) \approx 28,21$$

- O 1º termo na série que é maior do que 100 é da ordem 10^{43}

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- A série harmônica aparece em diversos outros “paradoxos”. Por exemplo no da minhoca no elástico:

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- A série harmônica aparece em diversos outros “paradoxos”. Por exemplo no da minhoca no elástico:
  - Uma minhoca percorre um elástico de 1m com velocidade constante de 1cm/min

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- A série harmônica aparece em diversos outros “paradoxos”. Por exemplo no da minhoca no elástico:
  - Uma minhoca percorre um elástico de 1m com velocidade constante de 1cm/min
  - Mas alguém está esticando o elástico, que aumenta seu comprimento em 1m a cada 1min

A série harmônica: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

- A série harmônica aparece em diversos outros “paradoxos”. Por exemplo no da minhoca no elástico:
  - Uma minhoca percorre um elástico de 1m com velocidade constante de 1cm/min
  - Mas alguém está esticando o elástico, que aumenta seu comprimento em 1m a cada 1min
- O paradoxo é que a minhoca eventualmente consegue atravessar o elástico

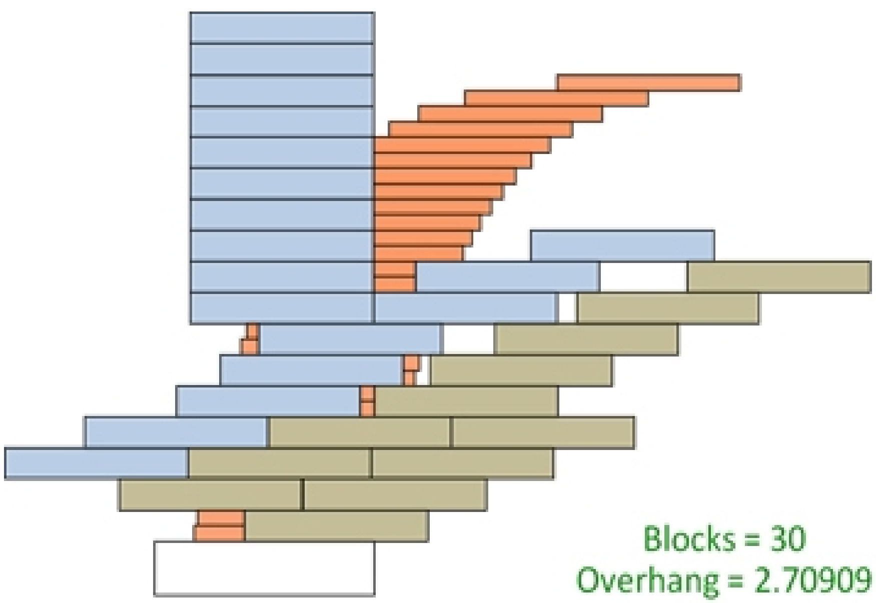
$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

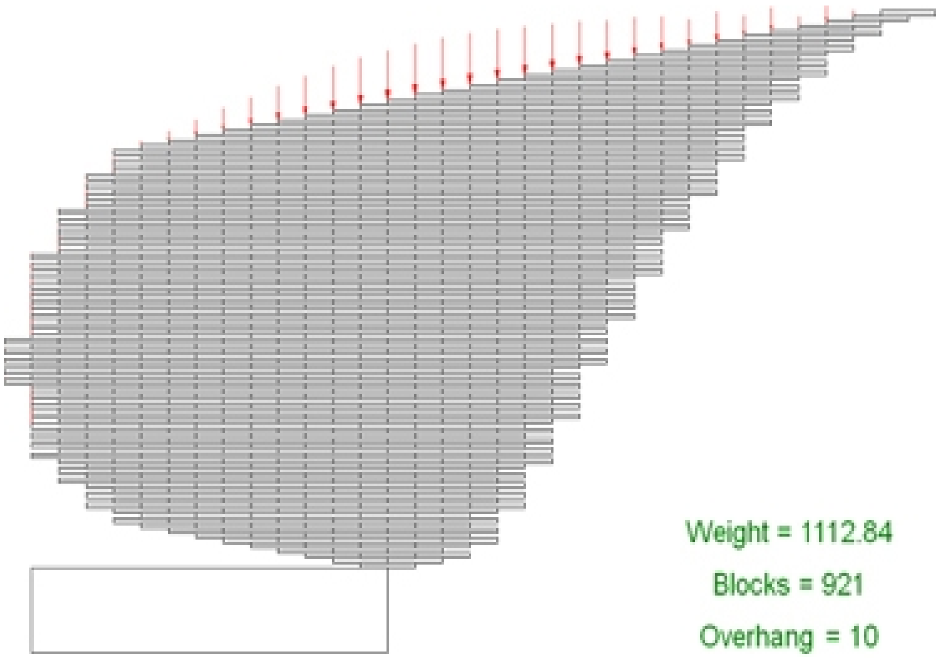
Desafio do alcance máximo

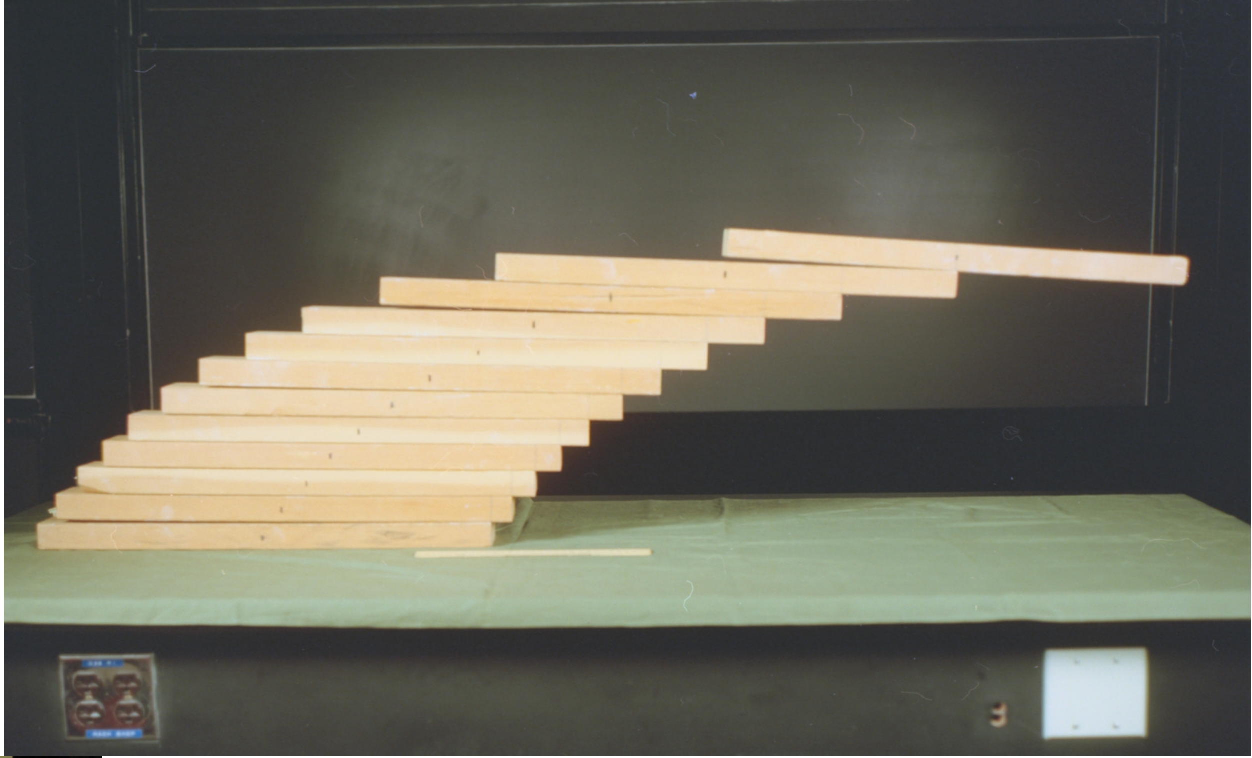
- Podemos fazer o mesmo desafio, mas sem a regra de ter apenas uma carta por nível.

Desafio do alcance máximo

- Podemos fazer o mesmo desafio, mas sem a regra de ter apenas uma carta por nível.








Put It To The Test
Stack each block carefully so the colored part extends over the edge of the block below. Stack the blocks in order beginning with the highest number on the bottom.
Think It Over
The center of gravity of all the blocks cannot extend beyond the base of the bottom block.
There is a number pattern to the way the blocks are stacked.
The top block, #1, extends out about half of its total length. This overhang is the unit length for the series.
The second block extends out about 1/2 of the unit length
The third block extends out about 1/3 of the unit length.
The fourth block extends out about 1/4 of the unit length... and so on.
So What?
0
1
The Harmonic Series of the cantilever is the same pattern that gives us our familiar musical scale.
Last one...
Hold your breath!
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Referências

- Wikipedia
- *Concrete mathematics* - Graham, Knuth, Patashnik
- http://datagenetics.com
  - How far can you ovehang blocks?
- http://www.math.utah.edu/~carlson/teaching/calculus/harmonic.html
  - Calculadora de números harmônicos