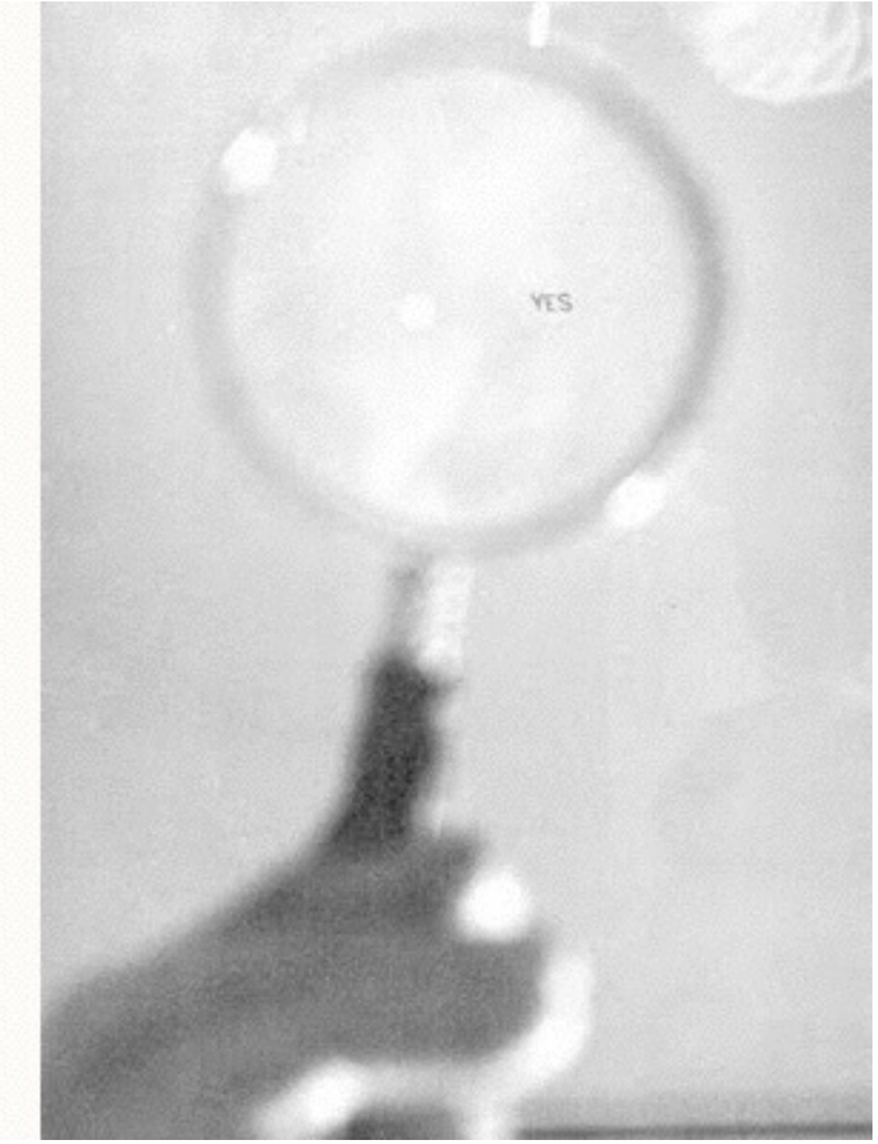
Pense Positivo!!

Daniel Smania
ICMC-USP-São Carlos
www.icmc.usp.br/~smania
smania@icmc.usp.br

Como John Lennon encontrou Yoko Ono

Como John Lennon encontrou Yoko Ono



Sistemas dinâmico discreto (o tempo é discreto)

$$f : X \to X$$

Iterados de f

segundo iterado de f é $f \circ f(x)$, denotado $f^2(x)$.

terceiro iterado de f é $f \circ f \circ f(x)$, denotado $f^3(x)$.

o n-ésimo iterado e f é

$$f^n(x) := \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}}$$

Sistema dinâmico discreto

Questão: Dado x, o que acontece com a sequência

$$x, \; f(x), \; f^2(x), \ldots, f^n(x), \; \ldots$$

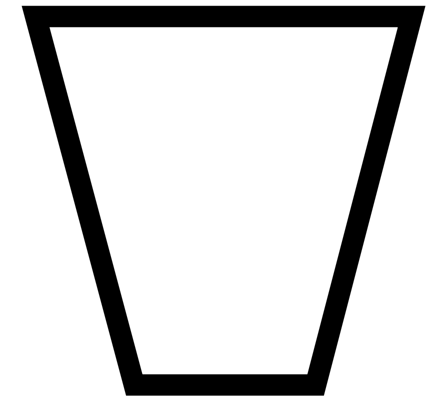
quando

$$n \to +\infty?$$

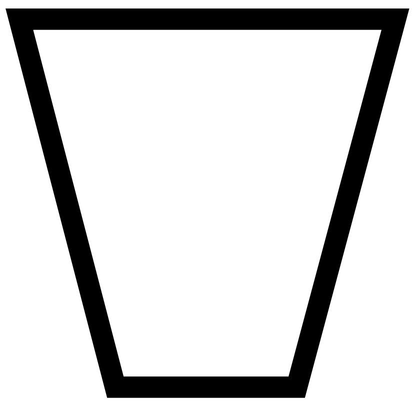
Sobre a dinâmica de baldes de areia

V+L+A=1 Kg de areia

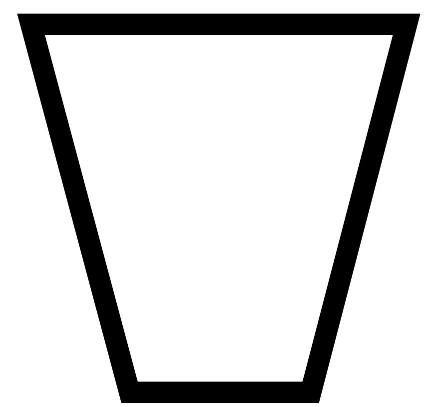
Laranja



Verde



Azul



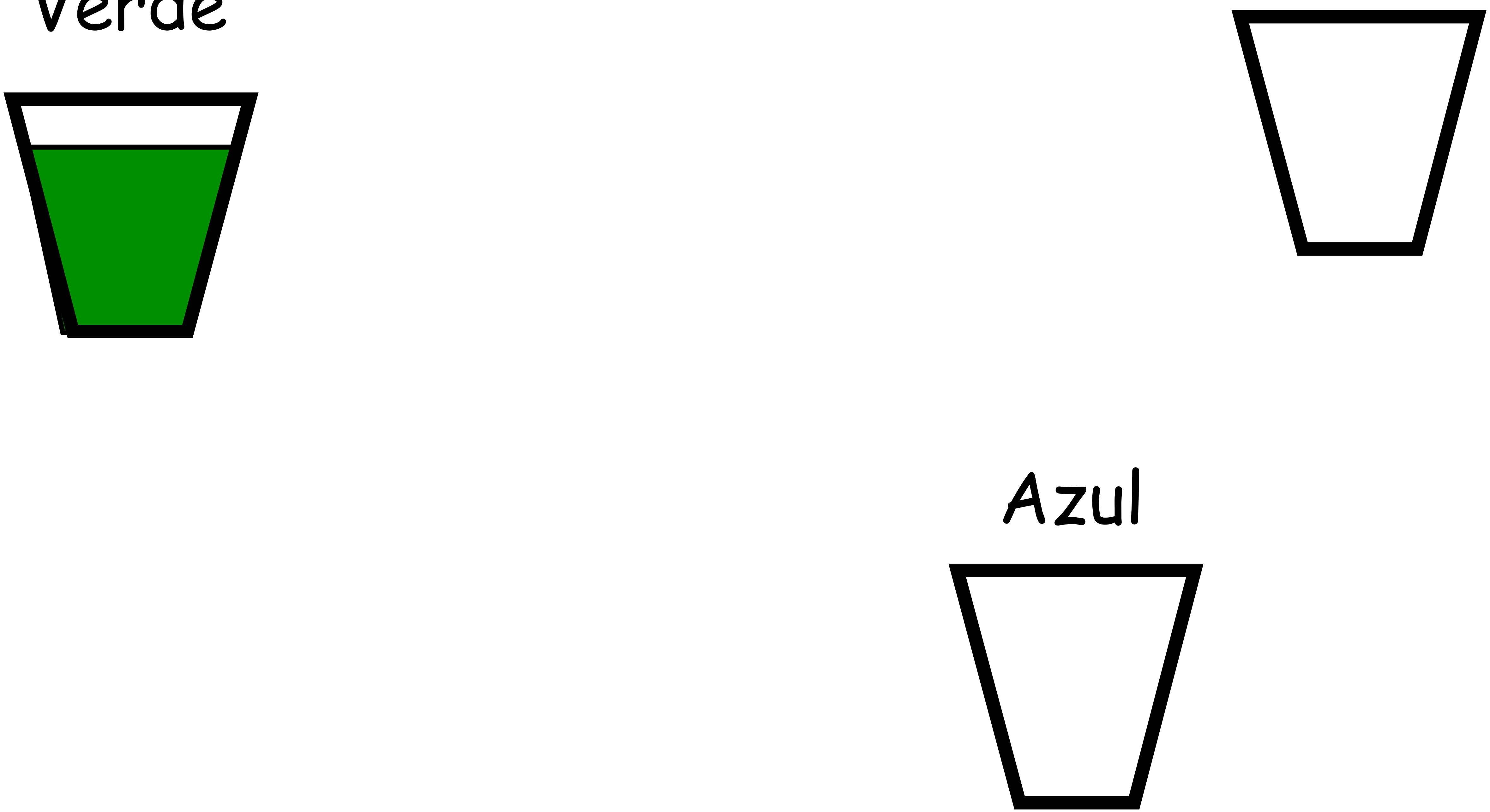
Sobre a dinâmica de baldes de areia

$V+L+A=1$ Kg de areia

Verde

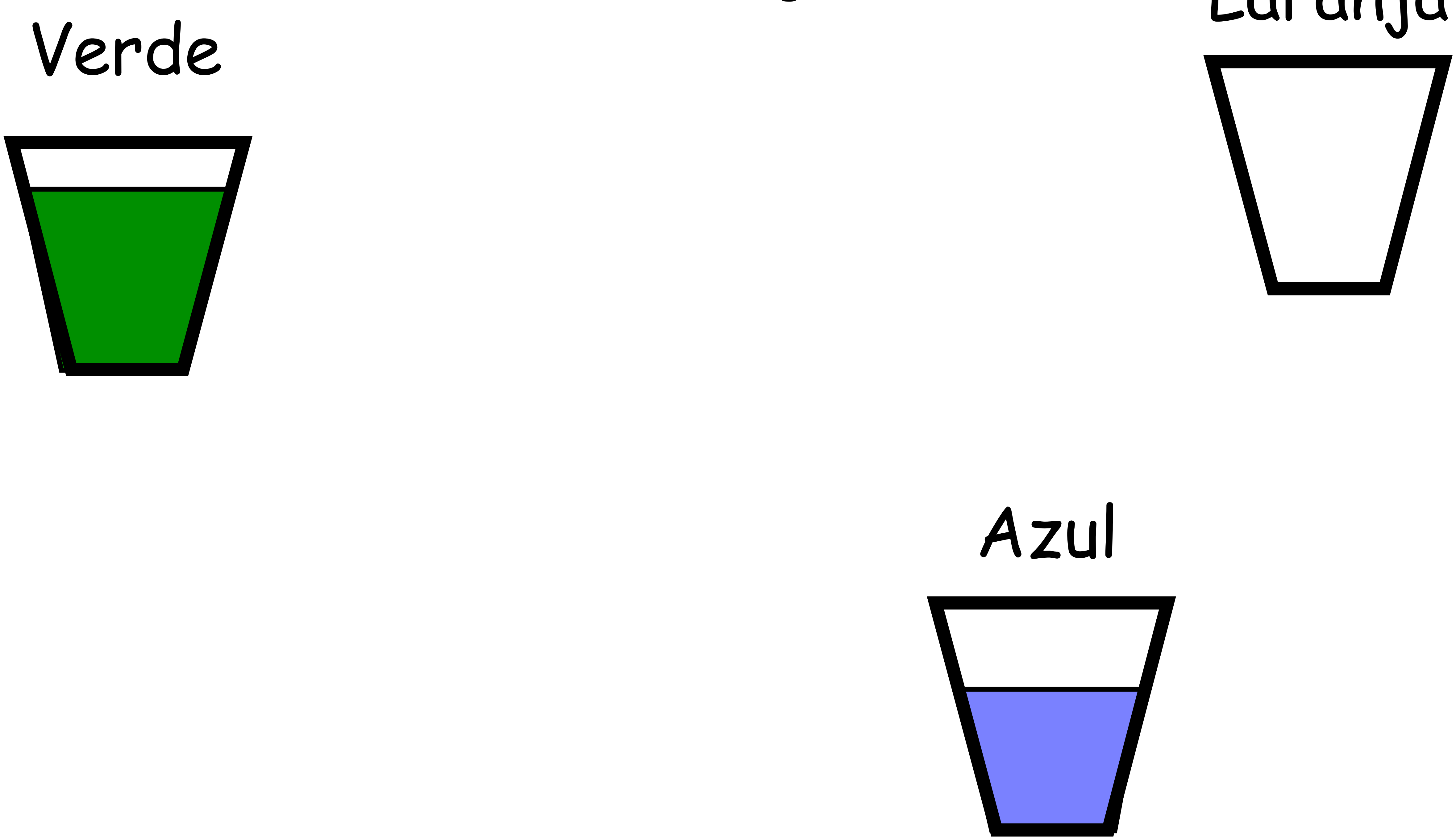
Laranja

Azul



Sobre a dinâmica de baldes de areia

V+L+A=1 Kg de areia



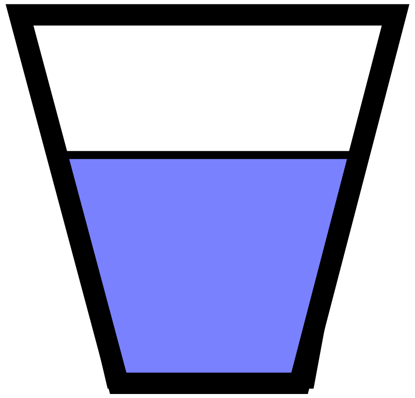
Sobre a dinâmica de baldes de areia

V+L+A=1 Kg de areia

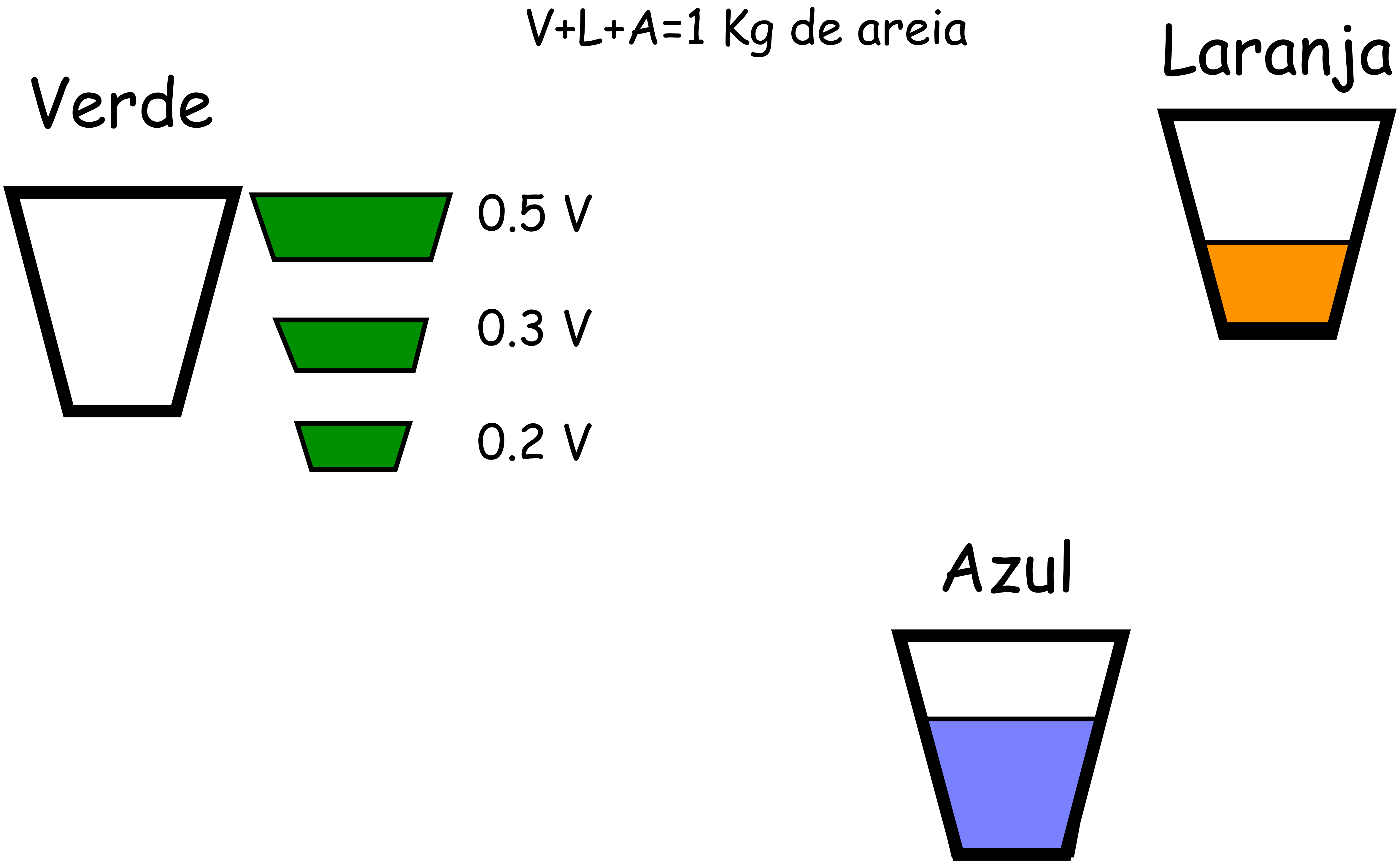
Verde

Laranja

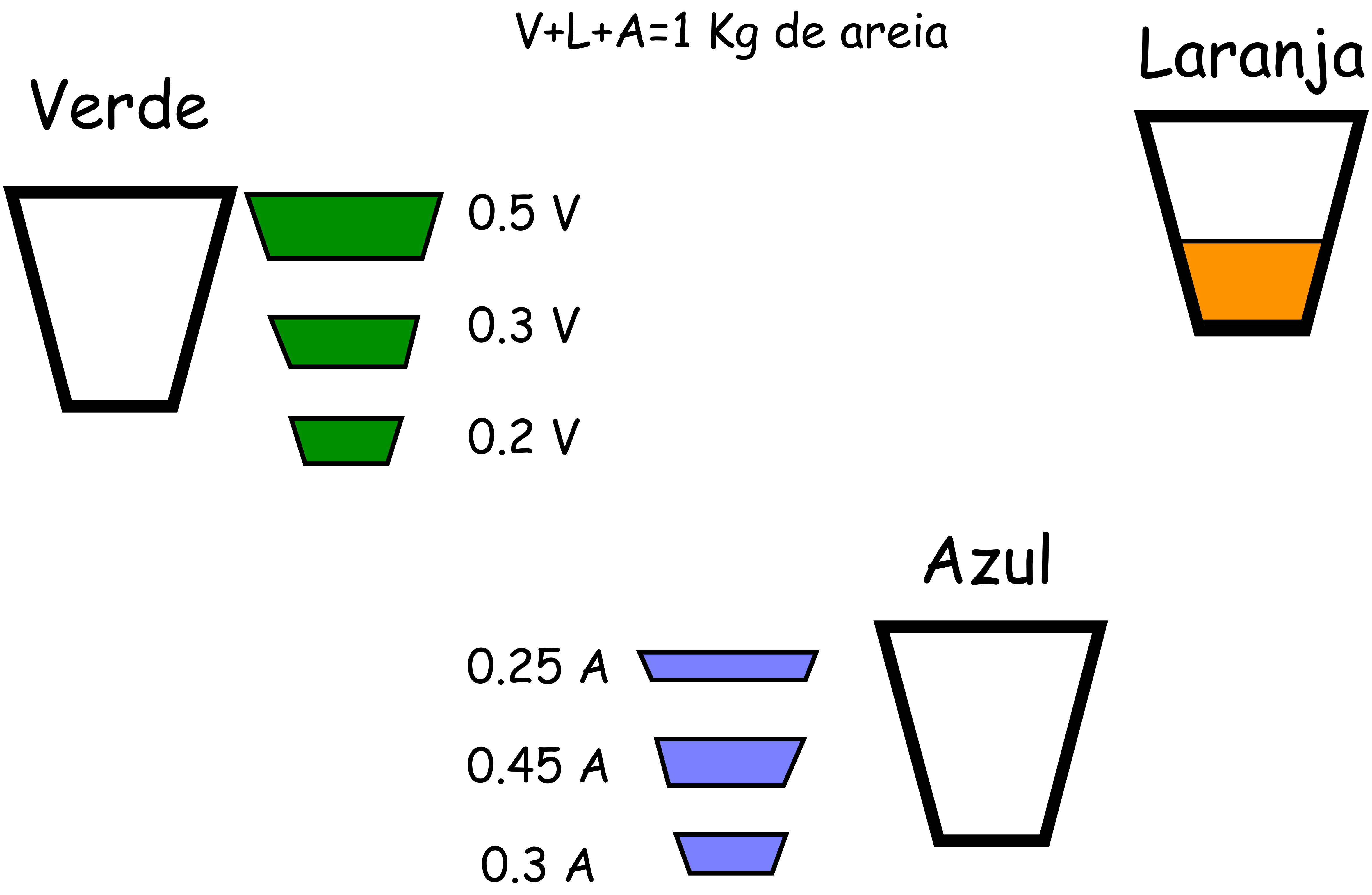
Azul



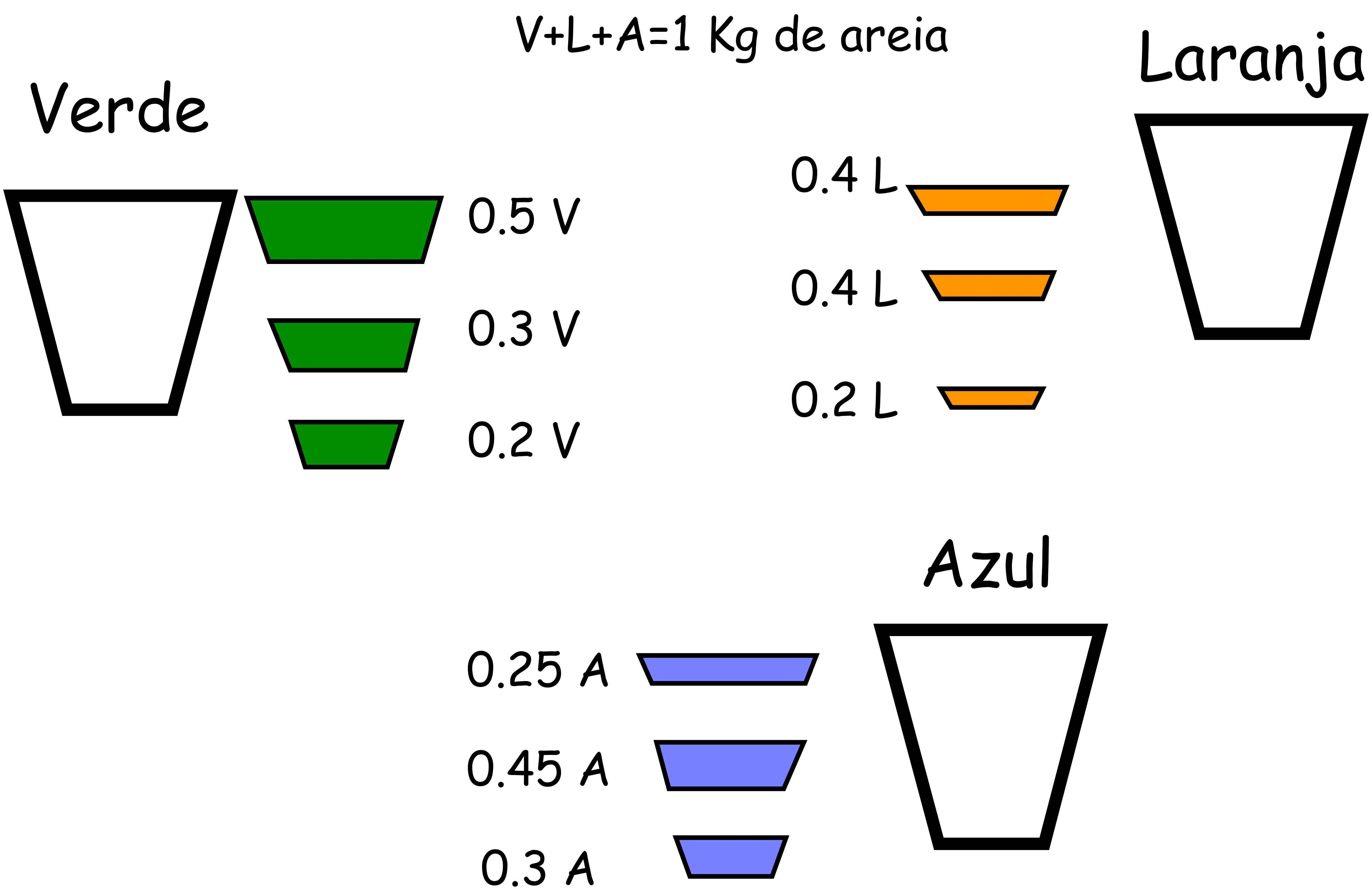
Sobre a dinâmica de baldes de areia



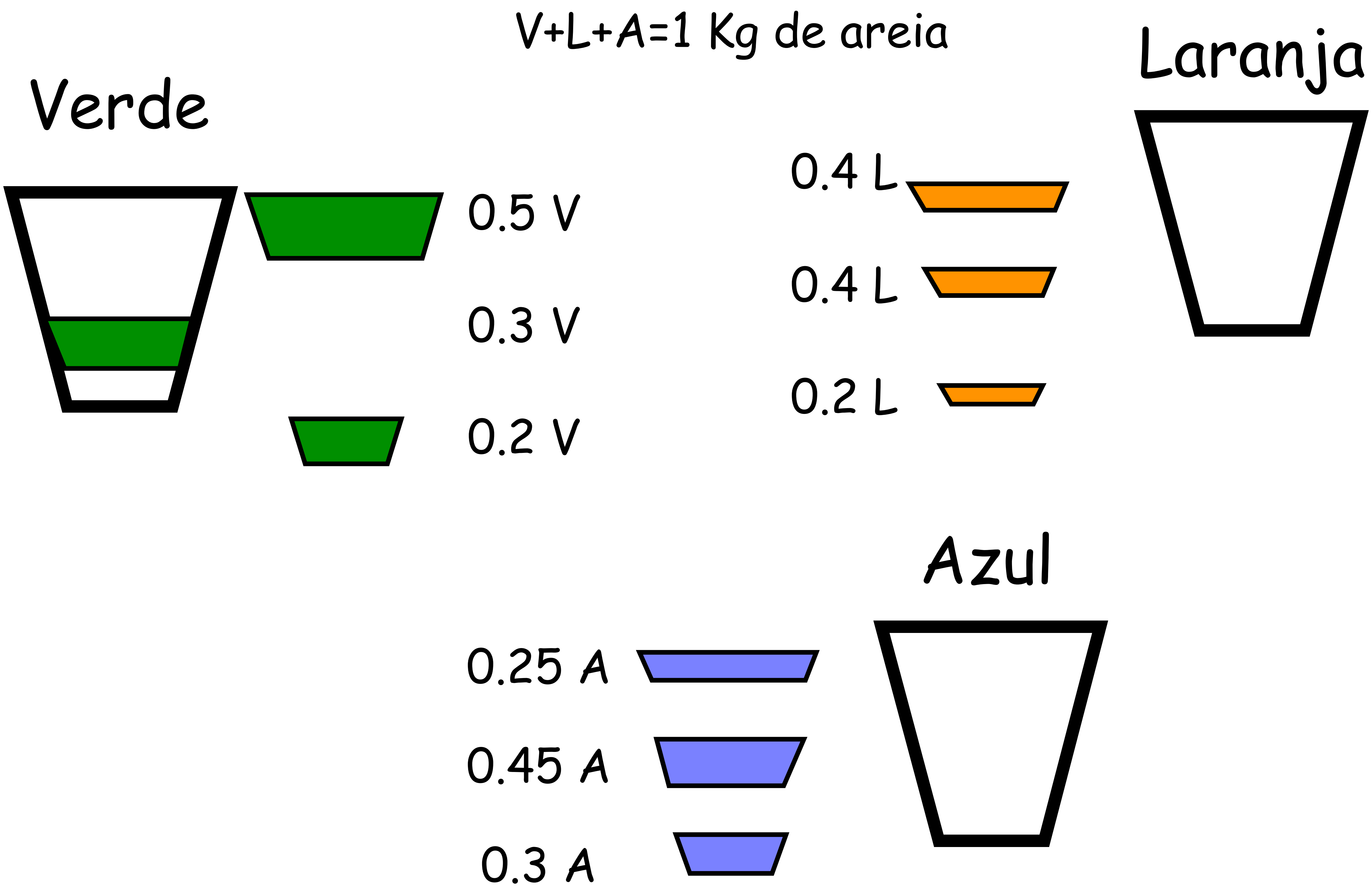
Sobre a dinâmica de baldes de areia



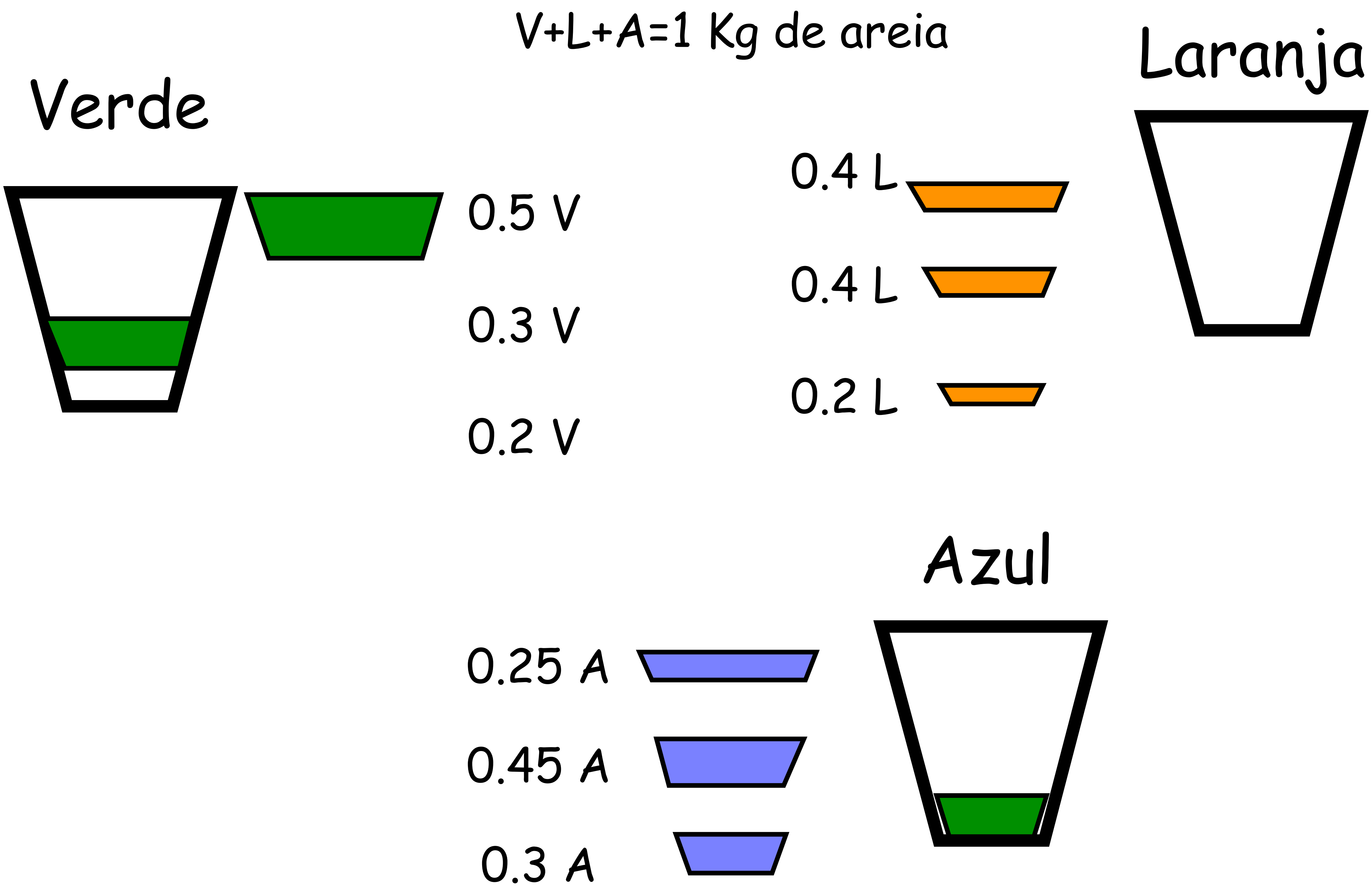
Sobre a dinâmica de baldes de areia



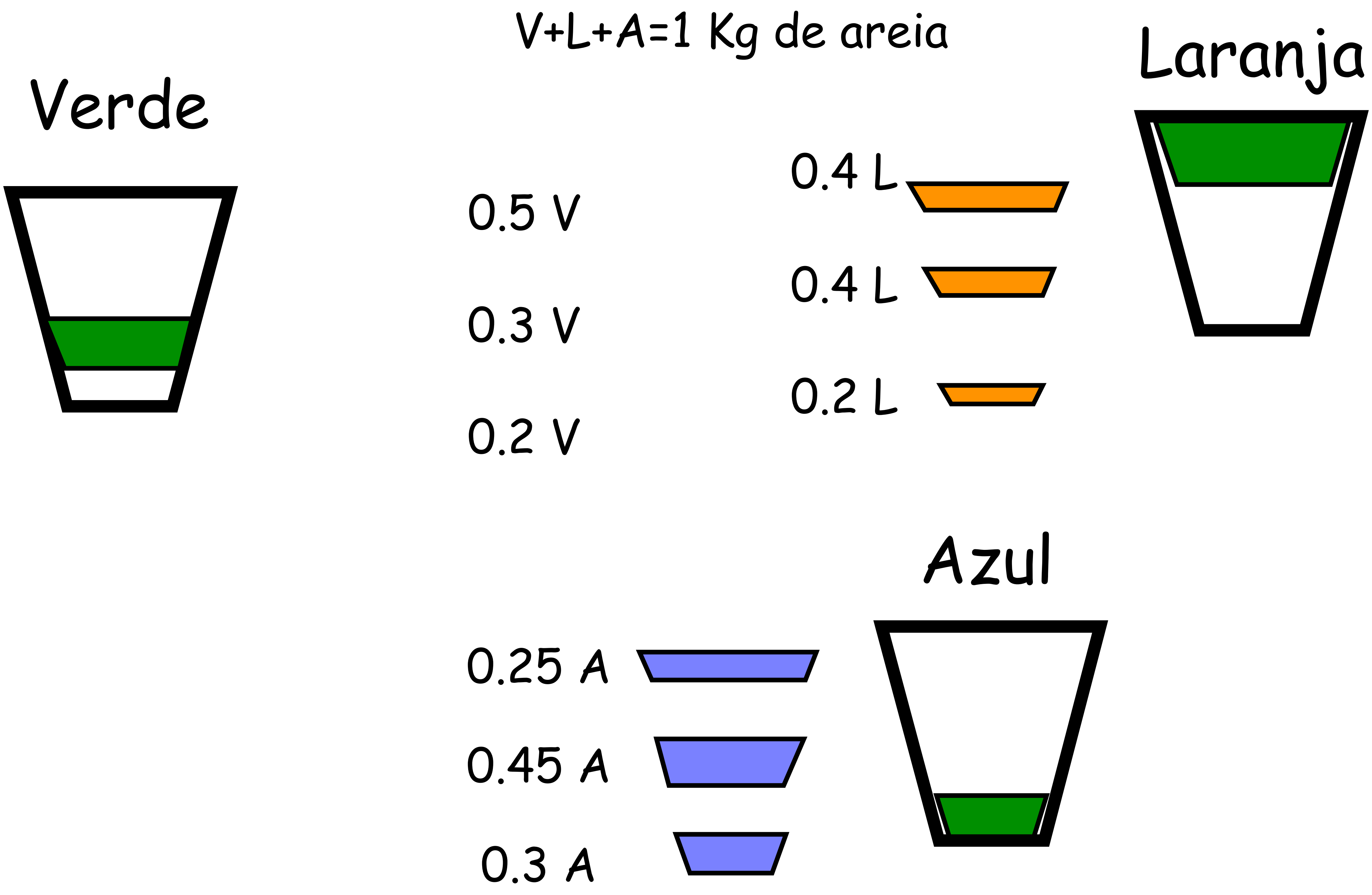
Sobre a dinâmica de baldes de areia



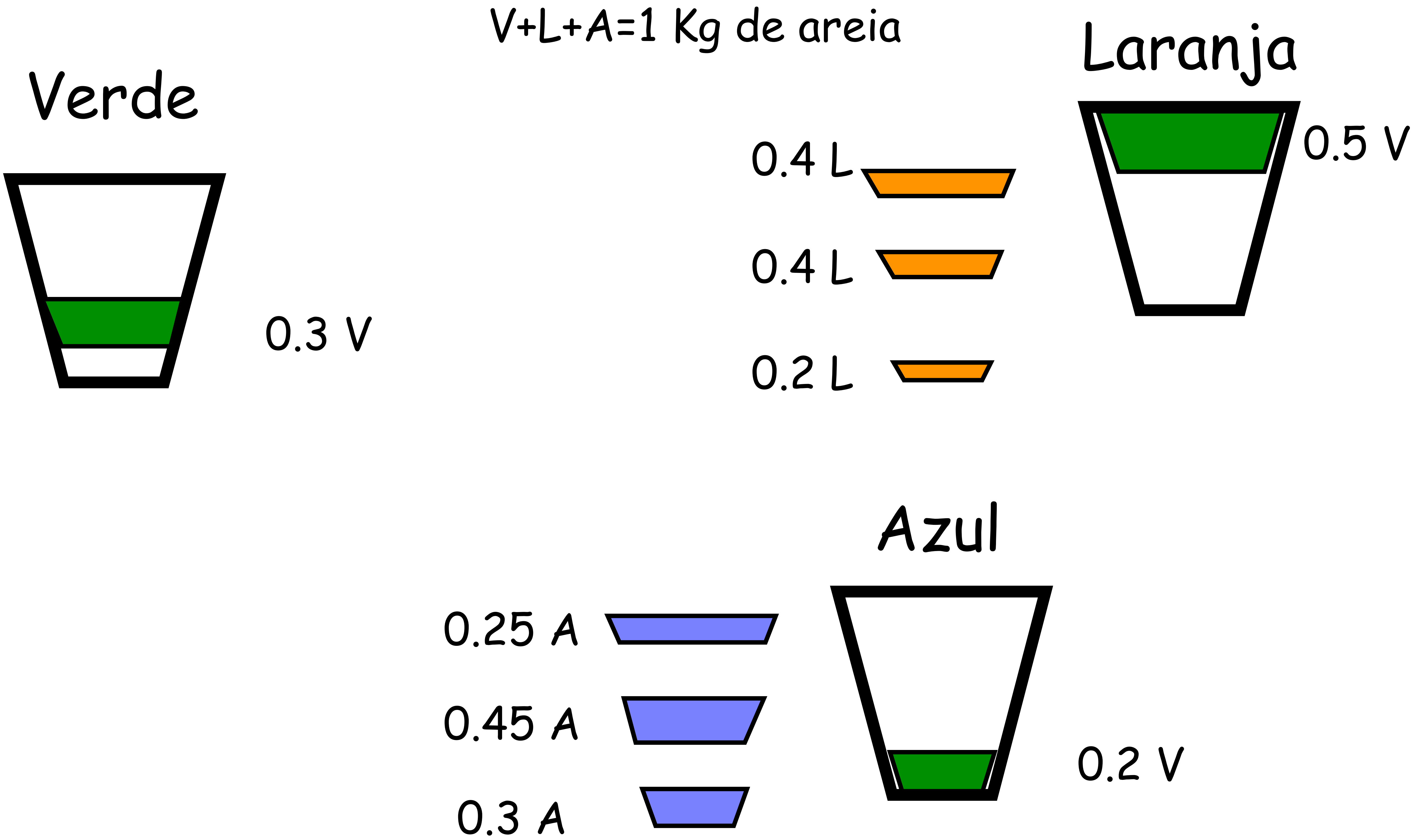
Sobre a dinâmica de baldes de areia



Sobre a dinâmica de baldes de areia

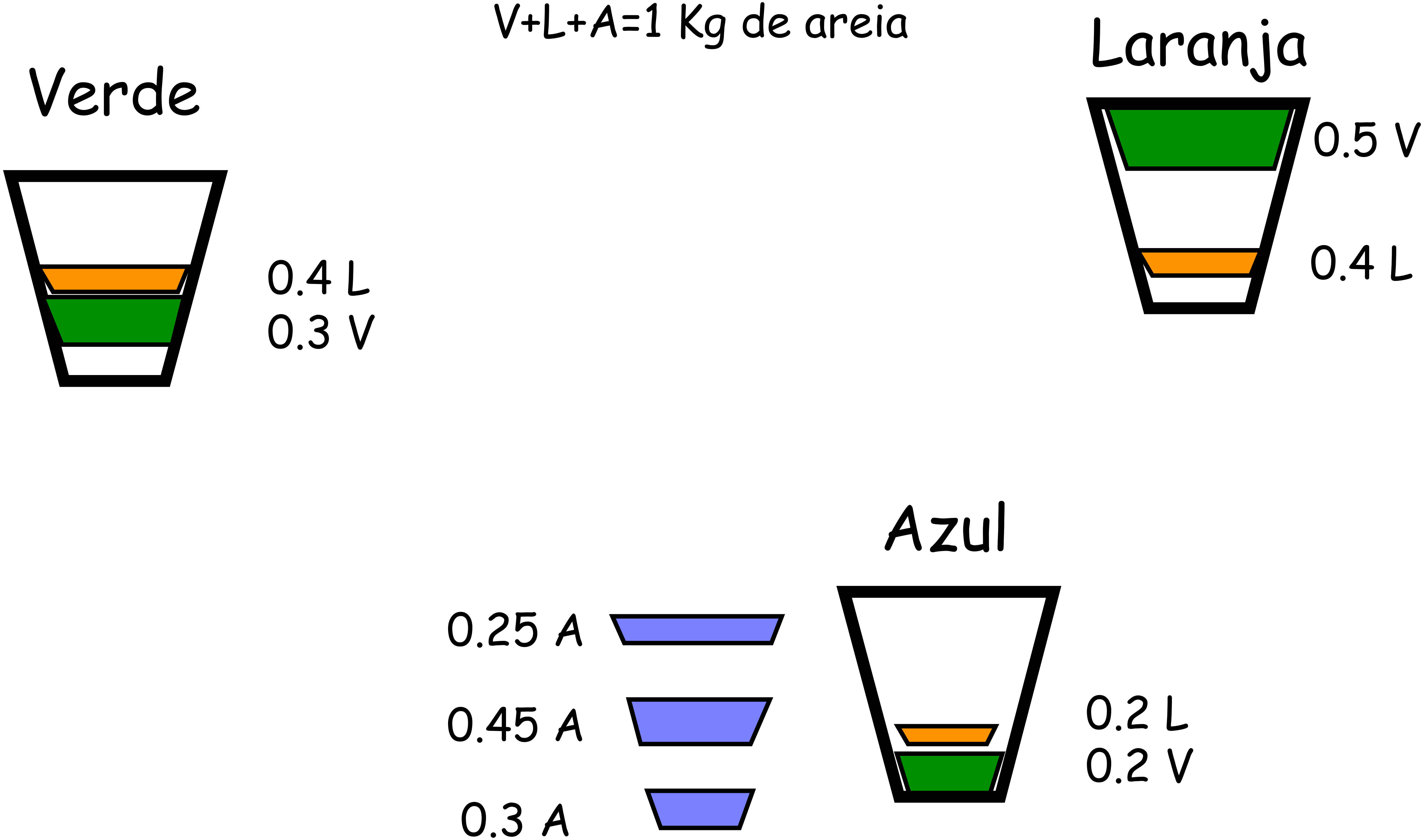


Sobre a dinâmica de baldes de areia



Sobre a dinâmica de baldes de areia

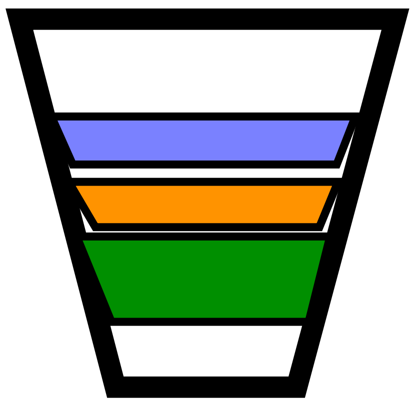
V+L+A=1 Kg de areia



Sobre a dinâmica de baldes de areia

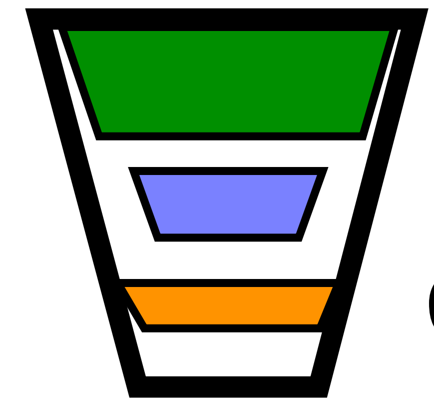
V+L+A=1 Kg de areia

Verde



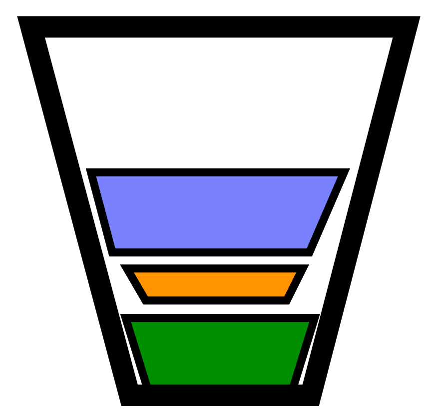
0.25 A
0.4 L
0.3 V

Laranja



0.5 V
0.3 A
0.4 L

Azul

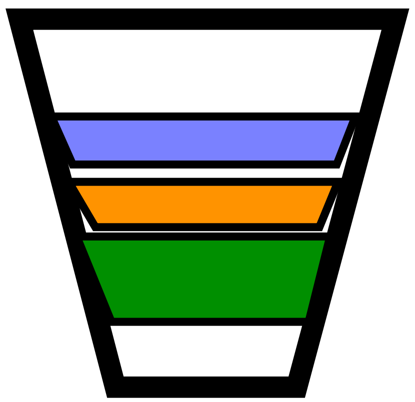


0.45 A
0.2 L
0.2 V

Sobre a dinâmica de baldes de areia

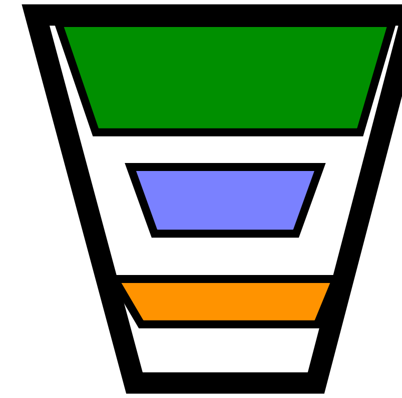
V+L+A=1 Kg de areia

Verde



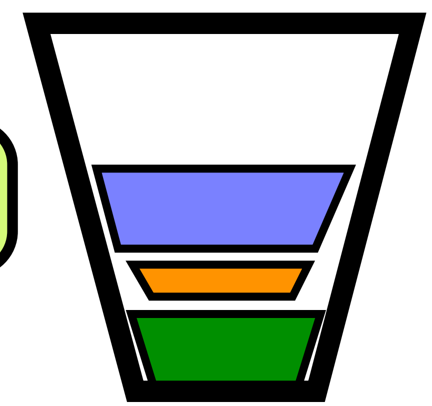
0.25 A
0.4 L
0.3 V

Laranja



0.5 V
0.3 A
0.4 L

Azul



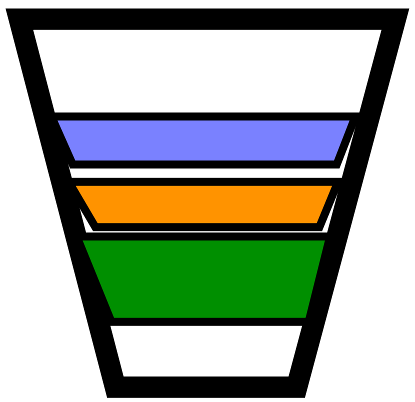
0.45 A
0.2 L
0.2 V

V $\rightarrow$ V'=0.25A + 0.4 L + 0.3 V

Sobre a dinâmica de baldes de areia

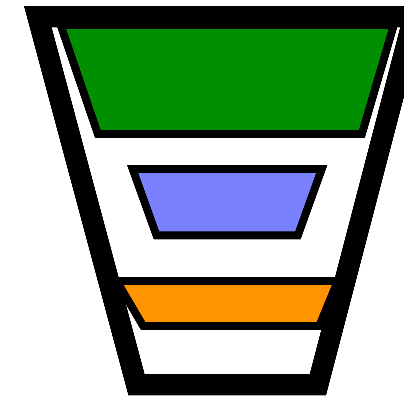
V+L+A=1 Kg de areia

Verde



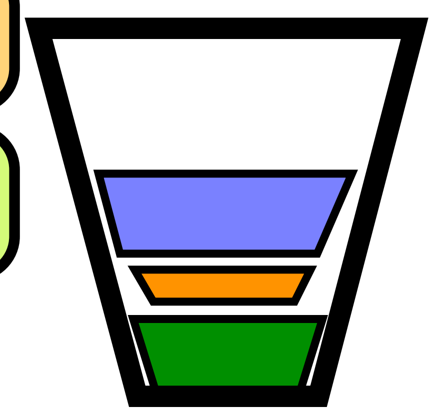
0.25 A
0.4 L
0.3 V

Laranja



0.5 V
0.3 A
0.4 L

Azul



0.45 A
0.2 L
0.2 V

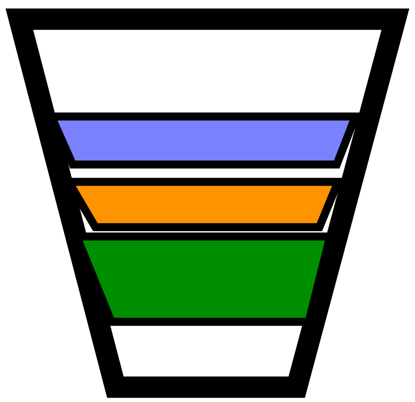
$L \Rightarrow L' = 0.3\,A + 0.4\,L + 0.5\,V$

$V \Rightarrow V' = 0.25A + 0.4\,L + 0.3\,V$

Sobre a dinâmica de baldes de areia

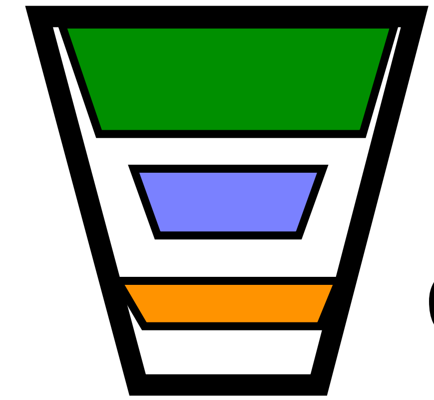
V+L+A=1 Kg de areia

Verde



0.25 A
0.4 L
0.3 V

Laranja



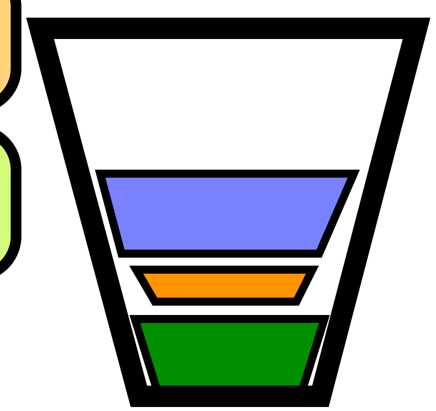
0.5 V
0.3 A
0.4 L

A → A'=0.45A + 0.2 L + 0.2 V

L → L'=0.3 A + 0.4 L + 0.5 V

V → V'=0.25A + 0.4 L + 0.3 V

Azul

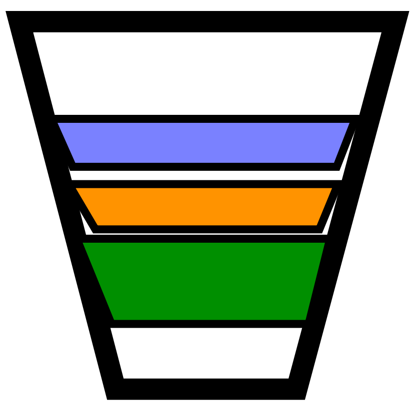


0.45 A
0.2 L
0.2 V

Sobre a dinâmica de baldes de areia

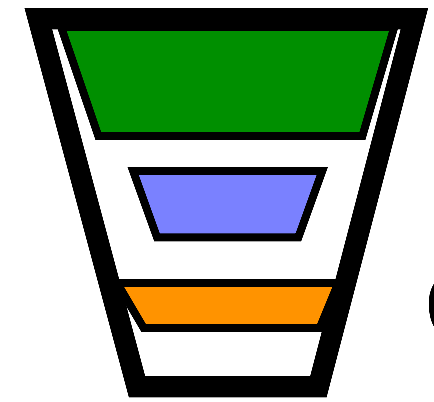
V+L+A=1 Kg de areia

Verde



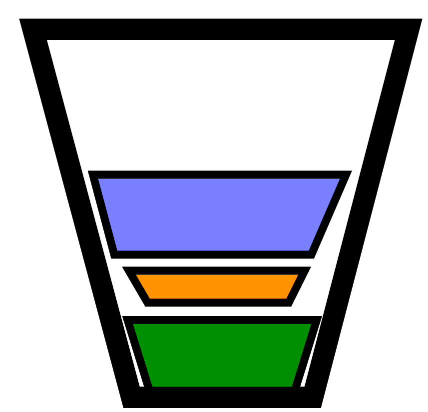
0.25 A
0.4 L
0.3 V

Laranja



0.5 V
0.3 A
0.4 L

Azul



0.45 A
0.2 L
0.2 V

Sobre a dinâmica de baldes de areia

Sobre a dinâmica de baldes de areia

A $\Rightarrow$ $A' = 0.45A + 0.2\,L + 0.2\,V$

L $\Rightarrow$ $L' = 0.3\,A + 0.4\,L + 0.5\,V$

V $\Rightarrow$ $V' = 0.25A + 0.4\,L + 0.3\,V$

$$\begin{pmatrix} A' \\ L' \\ V' \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

Sobre a dinâmica de baldes de areia

$A \Rightarrow A' = 0.45A + 0.2\,L + 0.2\,V$

$L \Rightarrow L' = 0.3\,A + 0.4\,L + 0.5\,V$

$V \Rightarrow V' = 0.25A + 0.4\,L + 0.3\,V$

$$\begin{pmatrix} A' \\ L' \\ V' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

The Big Question

O que acontecerá com a distribuição da areia nos baldes se repetirmos muuuuuuuuitas vezes o processo de redistribuição da areia que descrevemos?

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

The Big Question

O que acontecerá com a distribuição da areia nos baldes se repetirmos muuuuuuuitas vezes o processo de redistribuição da areia que descrevemos?

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

The Big Question

O que acontecerá com a distribuição da areia nos baldes se repetirmos muuuuuuuitas vezes o processo de redistribuição da areia que descrevemos?

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

The Big Question

O que acontecerá com a distribuição da areia nos baldes se repetirmos muuuuuuuuitas vezes o processo de redistribuição da areia que descrevemos?

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

The Big Question

O que acontecerá com a distribuição da areia nos baldes se repetirmos muuuuuuuuitas vezes o processo de redistribuição da areia que descrevemos?

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^n \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \ldots \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}}_{\text{n vezes}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

The Big Question

$$\mathcal{M}^n \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \ldots \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}}_{\text{n vezes}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

The Big Question

$$\mathcal{M}^n \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \ldots \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}}_{\text{n vezes}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

O que acontece com

$$\begin{pmatrix} A_n \\ L_n \\ V_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}^n \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$?

Um experimento numérico

	A	L	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	I	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	L	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	L	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	L	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	L	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

	A	L	V
0	0.34625278	0.29573524	0.35801198
1	0.28656320	0.40117592	0.31226088
2	0.27164080	0.40256977	0.32578943
3	0.26791020	0.40541486	0.32667494
4	0.26697755	0.40587647	0.32714598
5	0.26674439	0.40601684	0.32723877
6	0.26668610	0.40604944	0.32726446
7	0.26667152	0.40605784	0.32727064
8	0.26666788	0.40605991	0.32727221
9	0.26666697	0.40606043	0.32727260
10	0.26666674	0.40606056	0.32727269
11	0.26666669	0.40606060	0.32727272
12	0.26666667	0.40606060	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	J	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

	A	J	V
0	0.34625278	0.29573524	0.35801198
1	0.28656320	0.40117592	0.31226088
2	0.27164080	0.40256977	0.32578943
3	0.26791020	0.40541486	0.32667494
4	0.26697755	0.40587647	0.32714598
5	0.26674439	0.40601684	0.32723877
6	0.26668610	0.40604944	0.32726446
7	0.26667152	0.40605784	0.32727064
8	0.26666788	0.40605991	0.32727221
9	0.26666697	0.40606043	0.32727260
10	0.26666674	0.40606056	0.32727269
11	0.26666669	0.40606060	0.32727272
12	0.26666667	0.40606060	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

	A	I	V
0	0.20000000	0.40000000	0.40000000
1	0.25000000	0.42000000	0.33000000
2	0.26250000	0.40800000	0.32950000
3	0.26562500	0.40670000	0.32767500
4	0.26640625	0.40620500	0.32738875
5	0.26660156	0.40609825	0.32730019
6	0.26665039	0.40606986	0.32727975
7	0.26666260	0.40606294	0.32727447
8	0.26666565	0.40606119	0.32727316
9	0.26666641	0.40606075	0.32727284
10	0.26666660	0.40606064	0.32727275
11	0.26666665	0.40606062	0.32727273
12	0.26666666	0.40606061	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

	A	I	V
0	0.34625278	0.29573524	0.35801198
1	0.28656320	0.40117592	0.31226088
2	0.27164080	0.40256977	0.32578943
3	0.26791020	0.40541486	0.32667494
4	0.26697755	0.40587647	0.32714598
5	0.26674439	0.40601684	0.32723877
6	0.26668610	0.40604944	0.32726446
7	0.26667152	0.40605784	0.32727064
8	0.26666788	0.40605991	0.32727221
9	0.26666697	0.40606043	0.32727260
10	0.26666674	0.40606056	0.32727269
11	0.26666669	0.40606060	0.32727272
12	0.26666667	0.40606060	0.32727273
13	0.26666667	0.40606061	0.32727273
14	0.26666667	0.40606061	0.32727273
15	0.26666667	0.40606061	0.32727273
16	0.26666667	0.40606061	0.32727273
17	0.26666667	0.40606061	0.32727273
18	0.26666667	0.40606061	0.32727273

Um experimento numérico

O experimento numérico sugere que para qualquer vetor

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{V})$$

Com $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{V}$ não negativos e $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} = \mathbf{1}$, vale

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{M}^n \cdot \begin{pmatrix} A \\ L \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\overline{6} \\ 0.4\overline{060} \\ 0.3\overline{272} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/15 \\ 67/165 \\ 18/55 \end{pmatrix}$$

A distribuição de areia no futuro distante não depende da distribuição inicial!!

Um experimento numérico

O experimento numérico sugere que para $\boxed{\text{qualquer}}$ vetor

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{V})$$

Com $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{V}$ não negativos e $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} = \mathbf{1}$, vale

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{M}^n \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\overline{6} \\ 0.4\overline{060} \\ 0.3\overline{272} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/15 \\ 67/165 \\ 18/55 \end{pmatrix}$$

A distribuição de areia no futuro distante não depende da distribuição inicial!!

Observações

Uma matriz é chamada de matriz estocástica se todas as suas entradas são não negativas e a soma de cada coluna é 1.

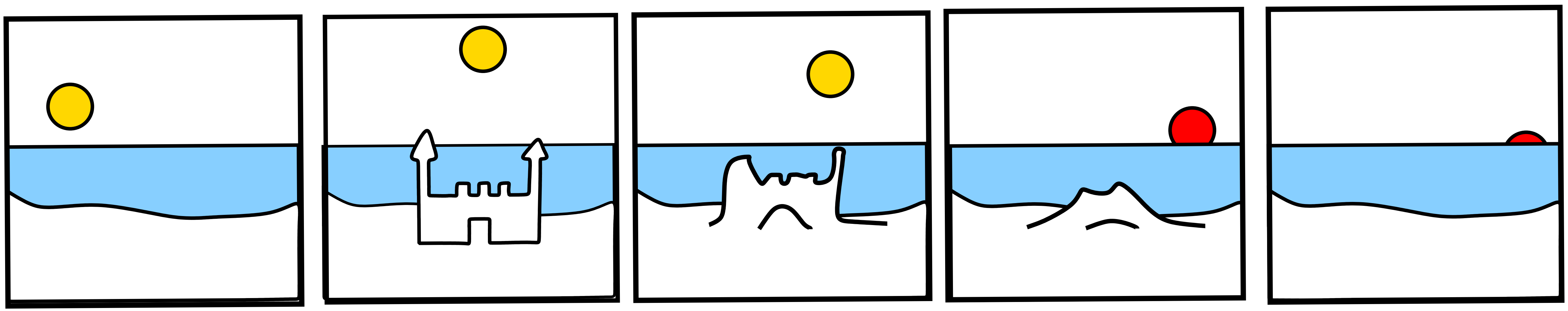
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.25 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}$ é uma matriz estocástica.

O vetor $\begin{pmatrix} 0.2\overline{6} \\ 0.4\overline{060} \\ 0.3\overline{272} \end{pmatrix}$ é fixo por $\mathcal{M}$, isto é

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} 0.2\overline{6} \\ 0.4\overline{060} \\ 0.3\overline{272} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\overline{6} \\ 0.4\overline{060} \\ 0.3\overline{272} \end{pmatrix}$$

Construindo castelos em praias



Teorema de Perron-Frobenious (para matrizes estocásticas)

Seja $\mathcal{M}$ uma matriz $d \times d$, estocástica, com todas entradas positivas.

$$\Downarrow$$

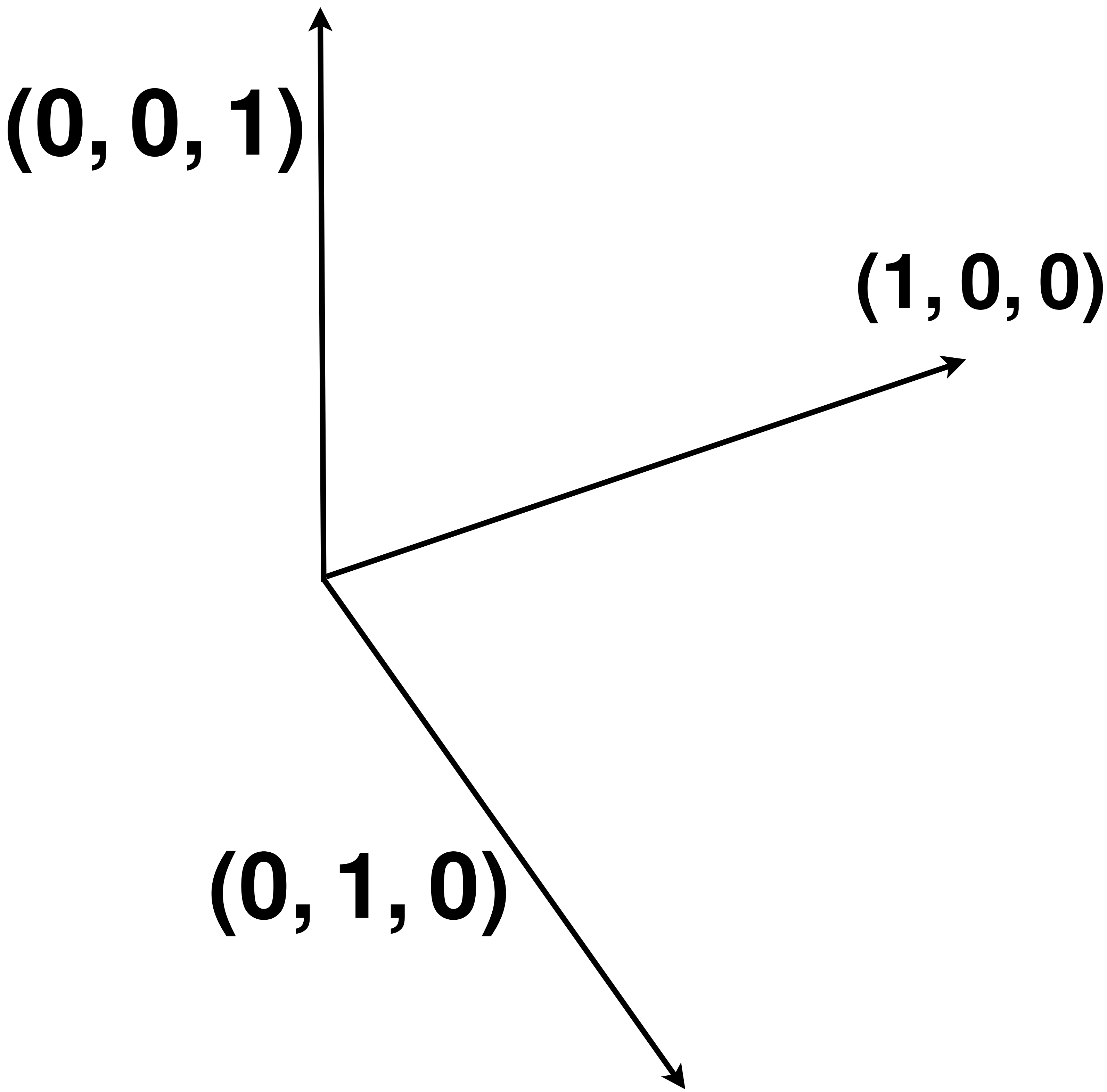
Existe um único vetor $u = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, com todas as entradas positivas e $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$, tal que $\mathcal{M}u = u$. Além disso

Para QUALQUER vetor $v = (a_1, \ldots, a_d)$, com todas entradas positivas e $\sum_{i=1}^{d} a_i = 1$, vale

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{M}^n v = u.$$

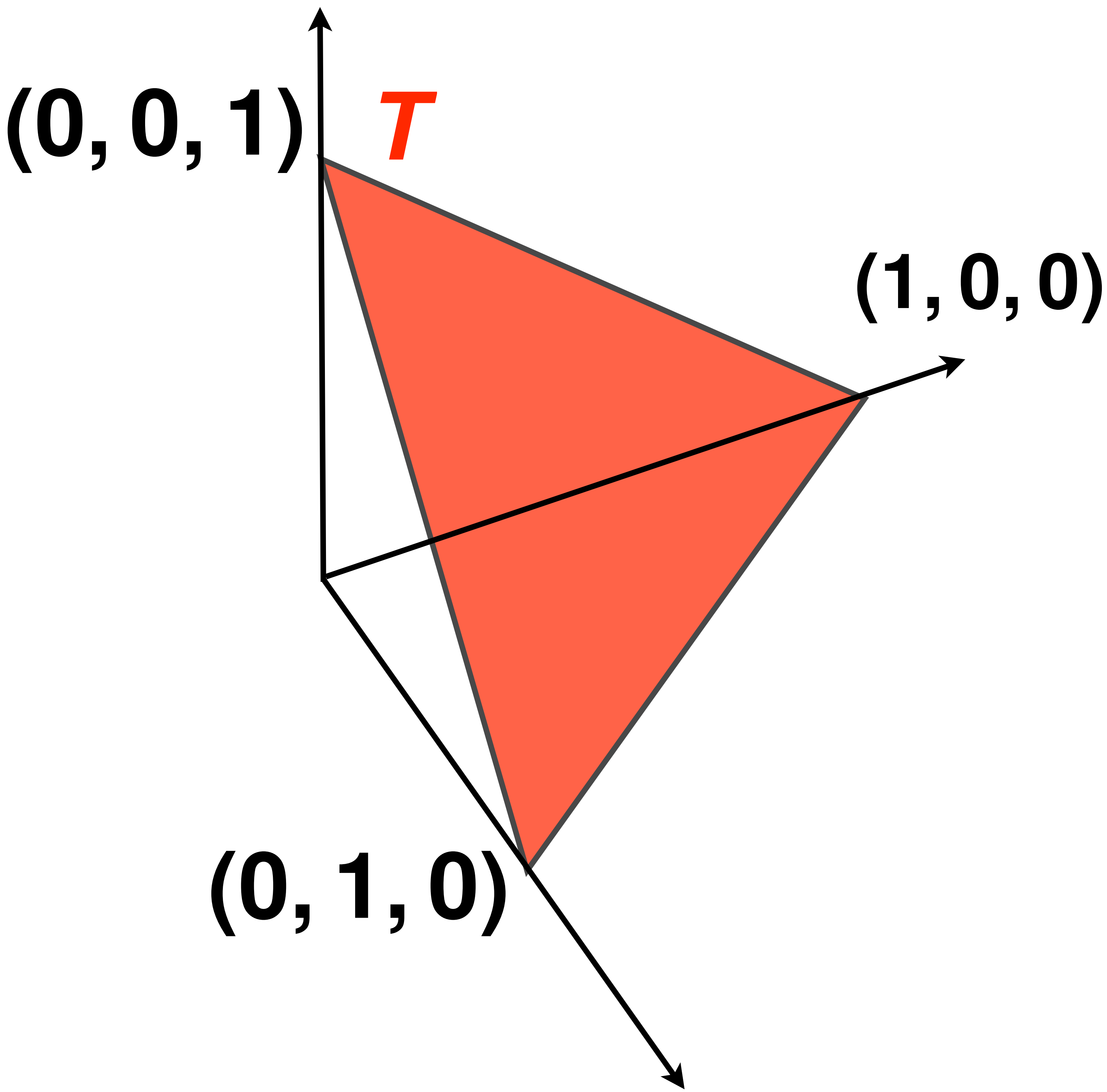
Triângulo invariante

$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \; a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$



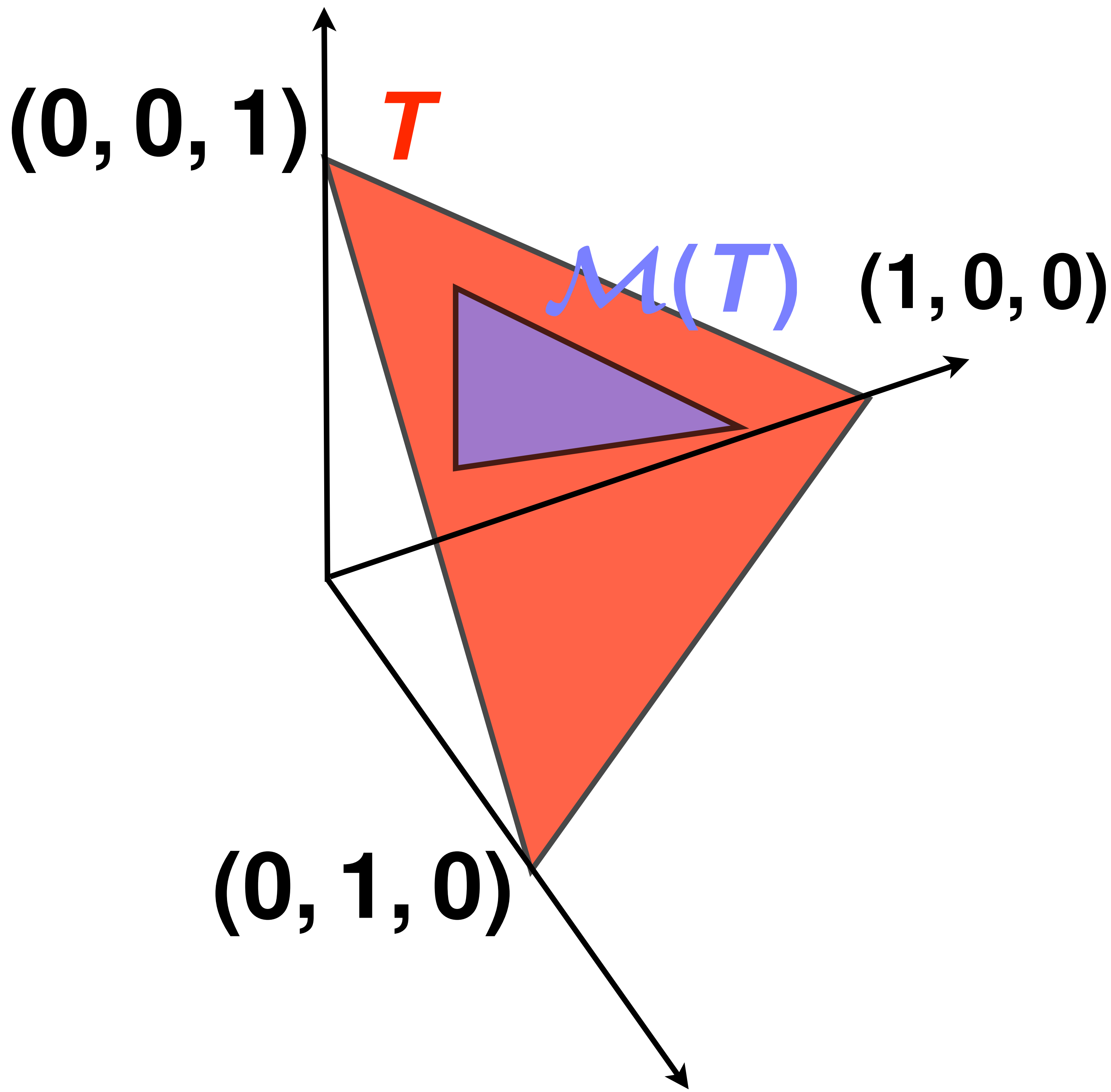
Triângulo invariante

$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3: \ a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$



Triângulo invariante

$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \; a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$

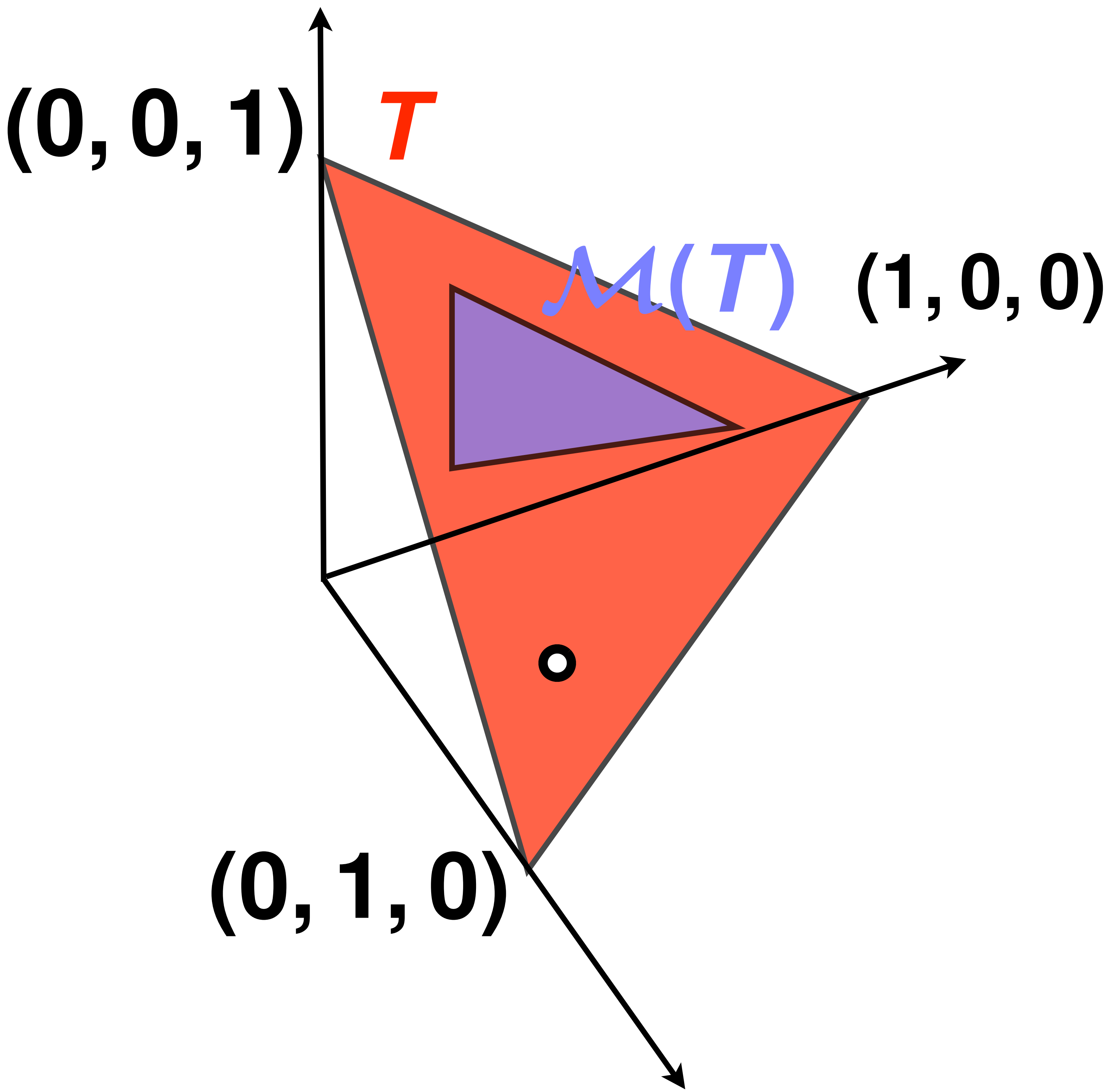


$\mathcal{M}(T) \subset T$

Triângulo invariante

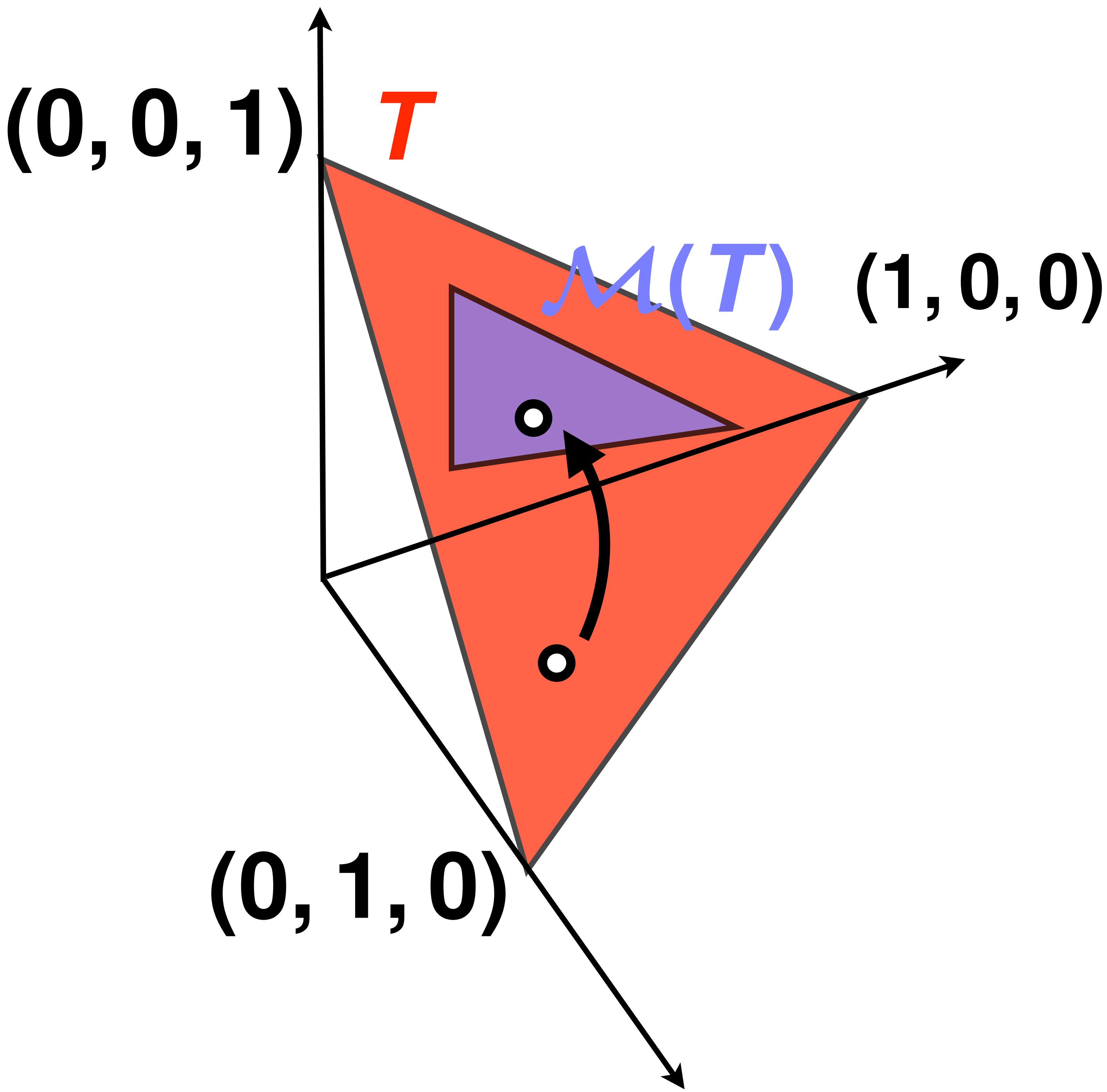
$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \ a_i > 0 \ e \ a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$

$\mathcal{M}(T) \subset T$



Triângulo invariante

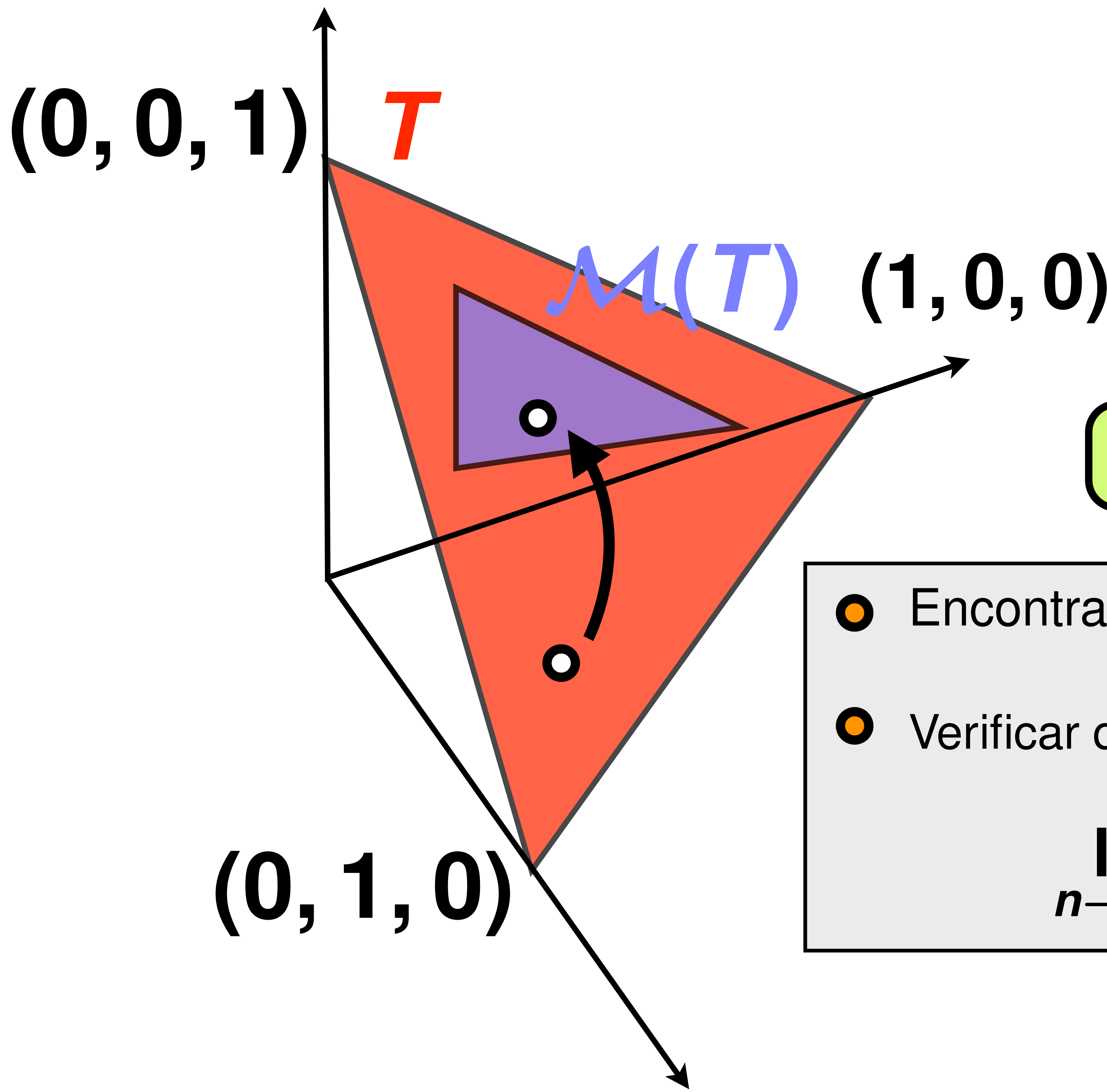
$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \; a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$



$\mathcal{M}(T) \subset T$

Triângulo invariante

$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \ a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$



$\mathcal{M}(T) \subset T$

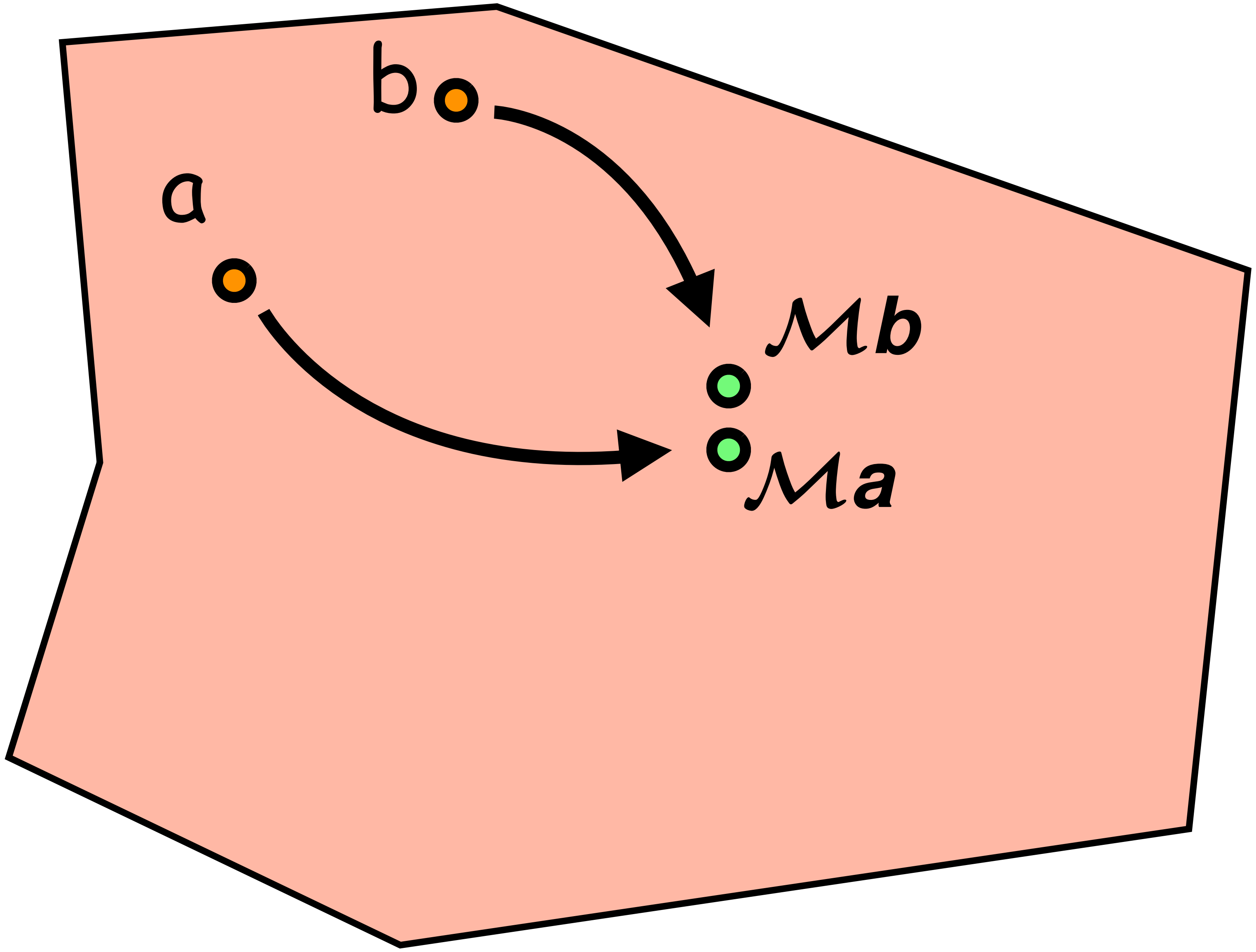
Objetivos

- Encontrar $u \in T$ tal que $\mathcal{M}u = u$.
- Verificar que para qualquer $v \in T$ vale

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{M}^n v = u.$$

Contrações

$\mathcal{M}$**:** $\boldsymbol{T} \rightarrow \boldsymbol{T}$ é uma contração se existe $\lambda < \mathbf{1}$ tal que para todo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{T}$ vale $\boldsymbol{d}(\mathcal{M}\boldsymbol{b}, \mathcal{M}\boldsymbol{a}) \leq \lambda \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

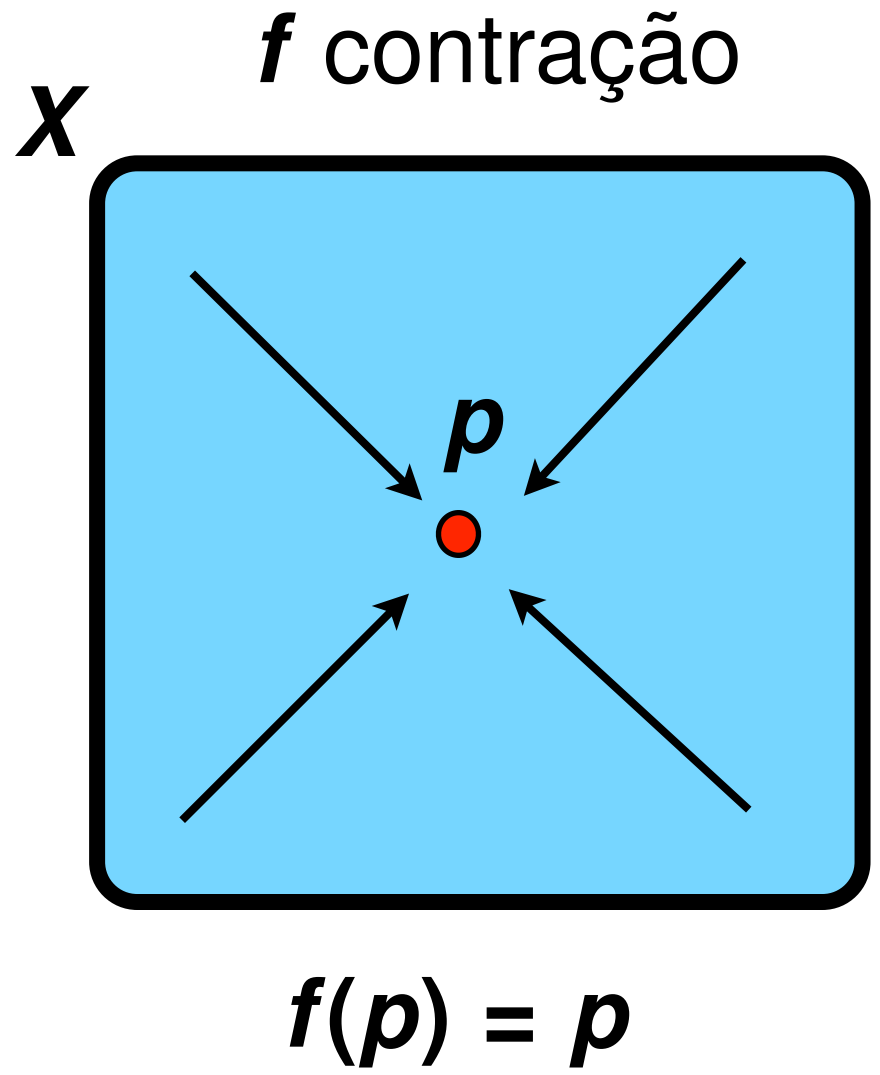


Princípio de contração de Banach

Seja $\mathcal{M} : \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{T}$ uma contração em um espaço métrico completo $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{d})$.

- Existe um único $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{T}$ que é fixo por $\mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{M}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.
- Para todo $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{T}$ vale $\lim_{n \to \infty} \mathcal{M}^n \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

Dinâmica de contrações



Sistema dinâmico discreto
Exemplo super babaca

$f : [0,1] \to [0,1]$ função C^1 tal que $\max |f'| < 1$

$$\Downarrow$$

Pelo Teorema do Valor Médio f é uma contração em $[0,1]$.

Princípio de contração de Banach (por que ele é legal)

- Existem várias noções de “distância”, algumas bem malucas. O Princípio vale para todas elas. (não precisamos nos restringir a distância euclidiana).
- $\mathcal{M}$ não precisa ser linear.
- T não precisa ser um triângulo ou mesmo um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Princípio de contração de Banach (por que ele é legal)

- Existem várias noções de "distância", algumas bem malucas. O Princípio vale para todas elas. (não precisamos nos restringir a distância euclidiana).

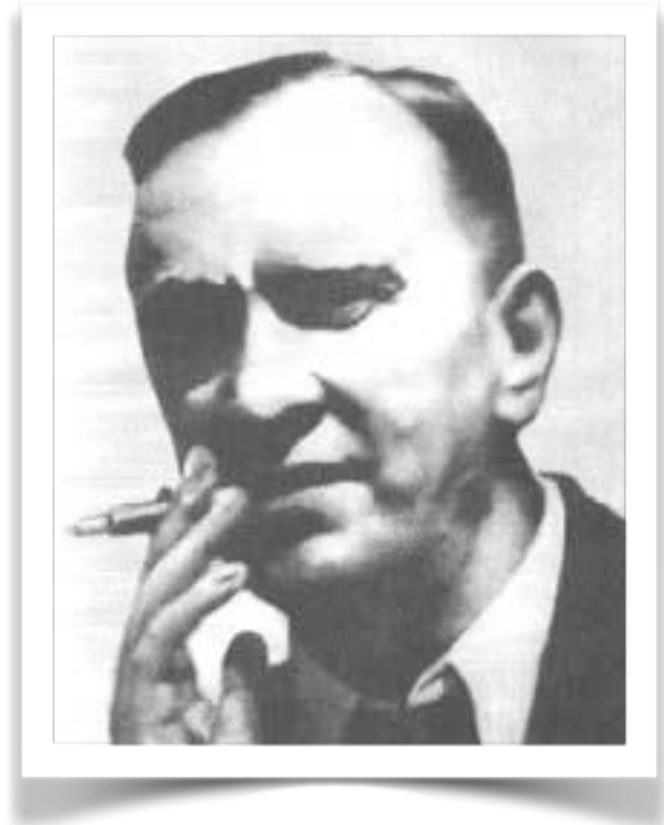
- $\mathcal{M}$ não precisa ser linear.

- T não precisa ser um triângulo ou mesmo um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

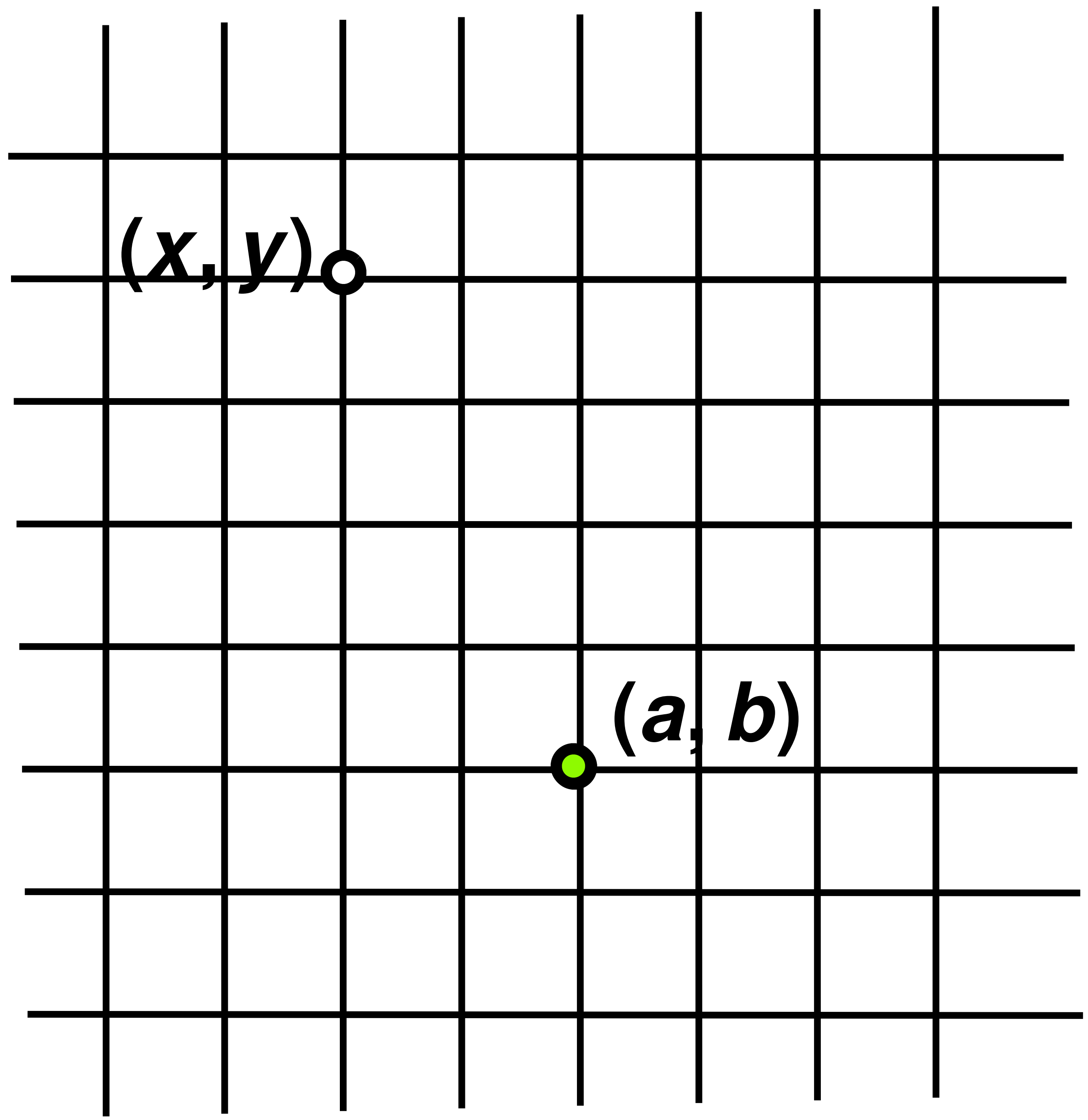
Sobre Stefan Banach

-Matemático da Polônia (1892-1945)

-O Princípio de contração de Banach aparece em sua tese de doutorado.

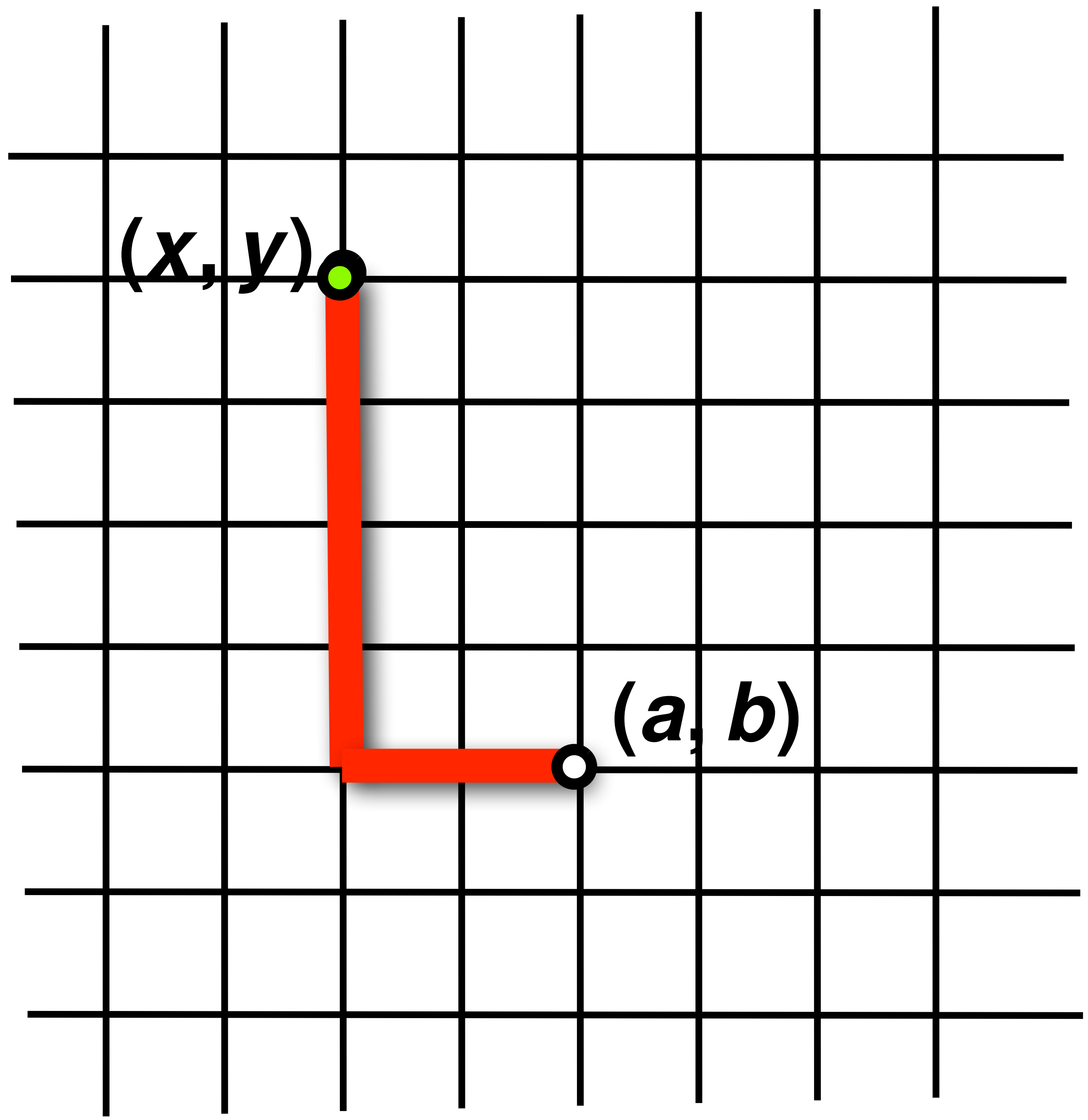


Métricas malucas
Exemplo I- distância de Manhattan



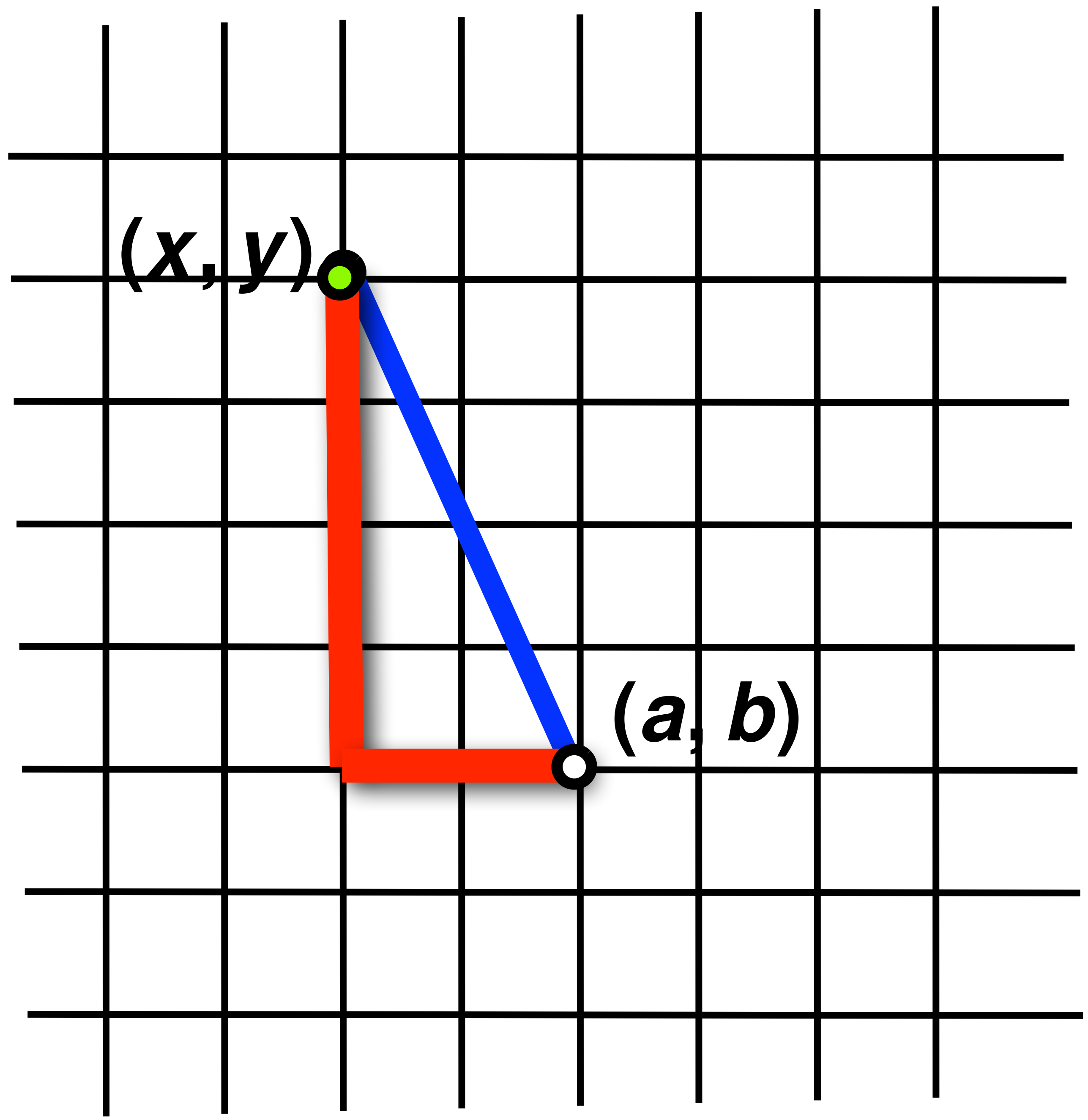
$$d_M((x, y), (a, b)) = |a - x| + |b - y|$$

Métricas malucas
Exemplo I- distância de Manhattan



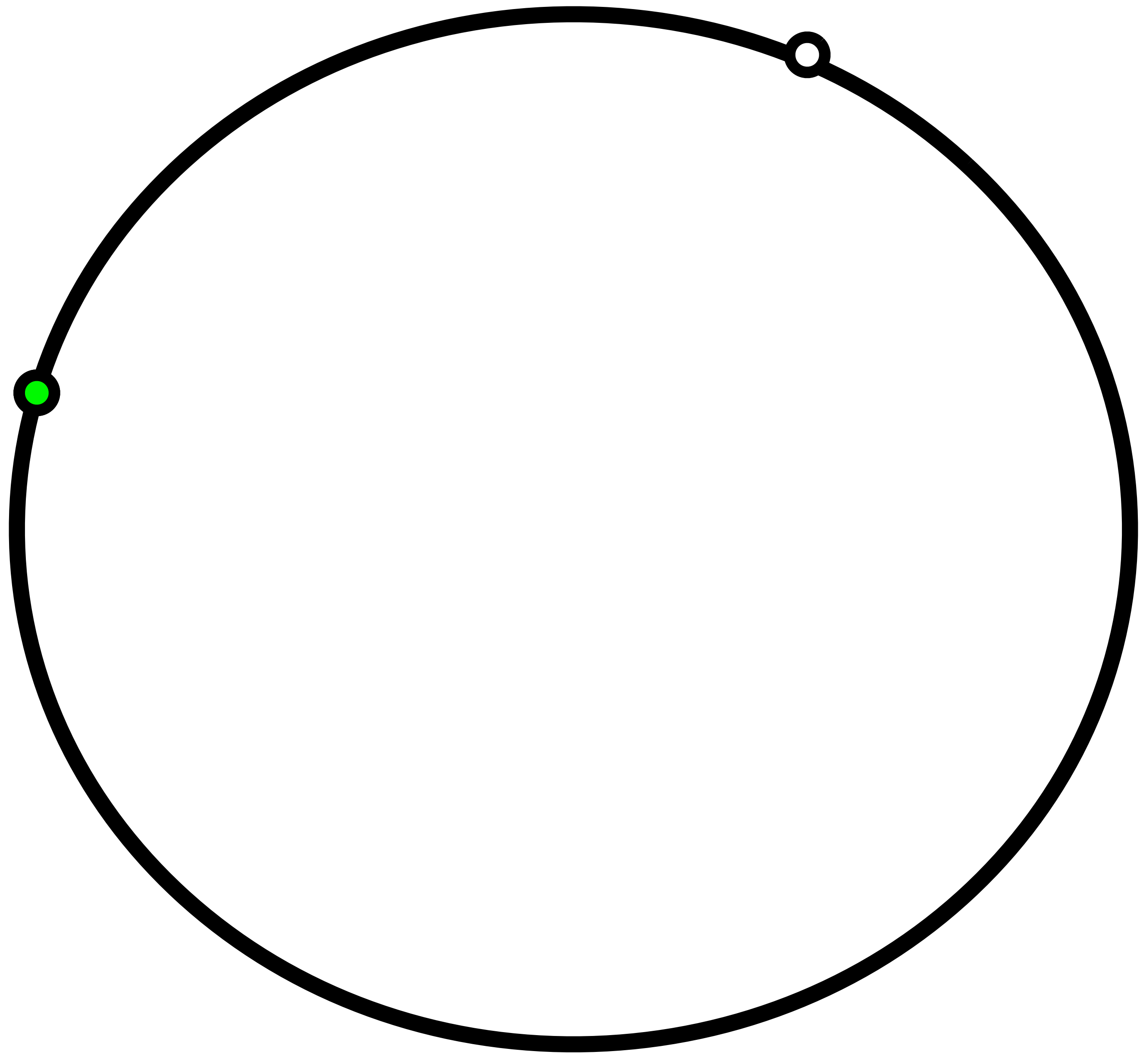
$$d_M((x, y), (a, b)) = |a - x| + |b - y|$$

Métricas malucas
Exemplo I- distância de Manhattan

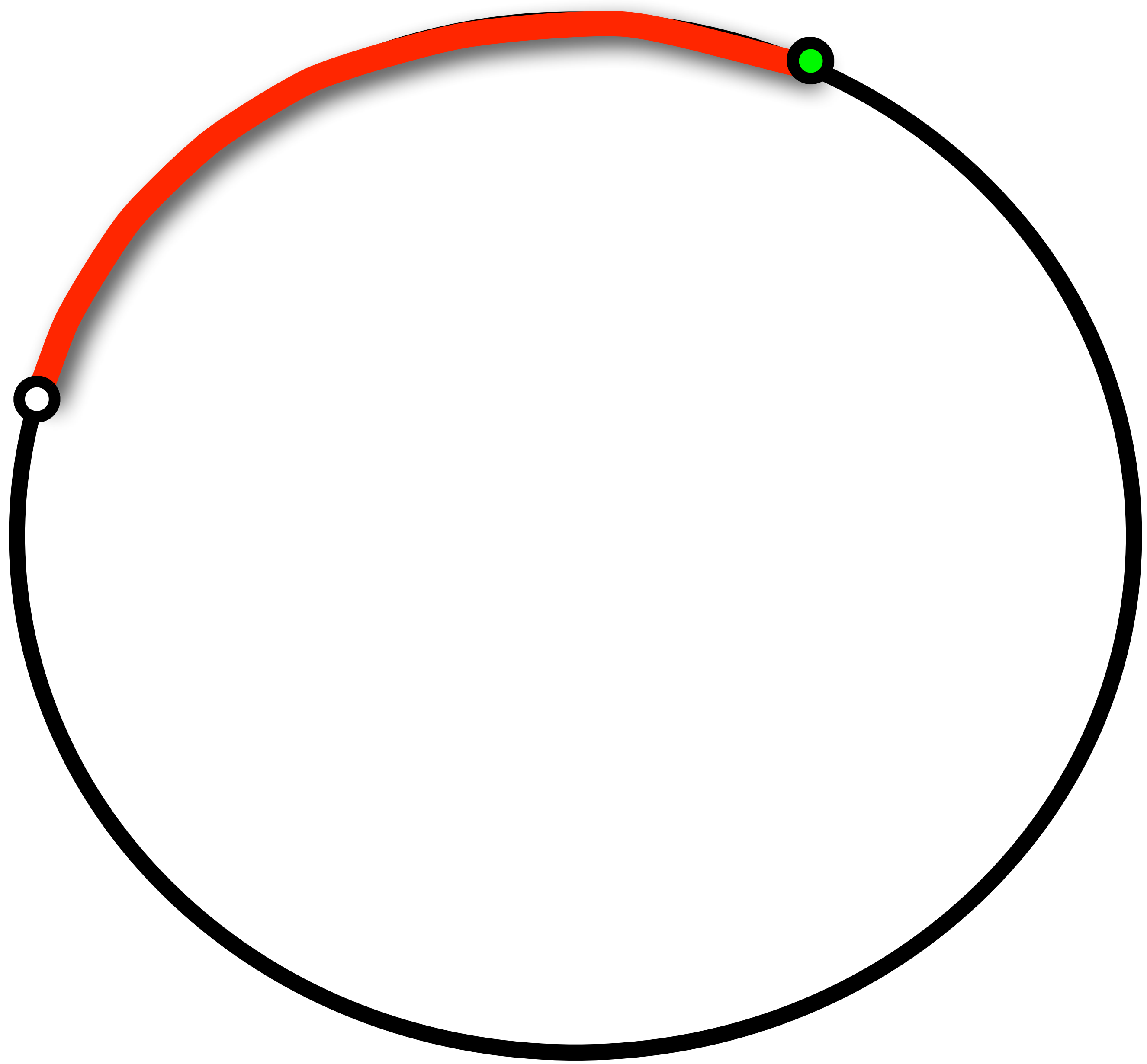


$$d_M((x, y), (a, b)) = |a - x| + |b - y|$$

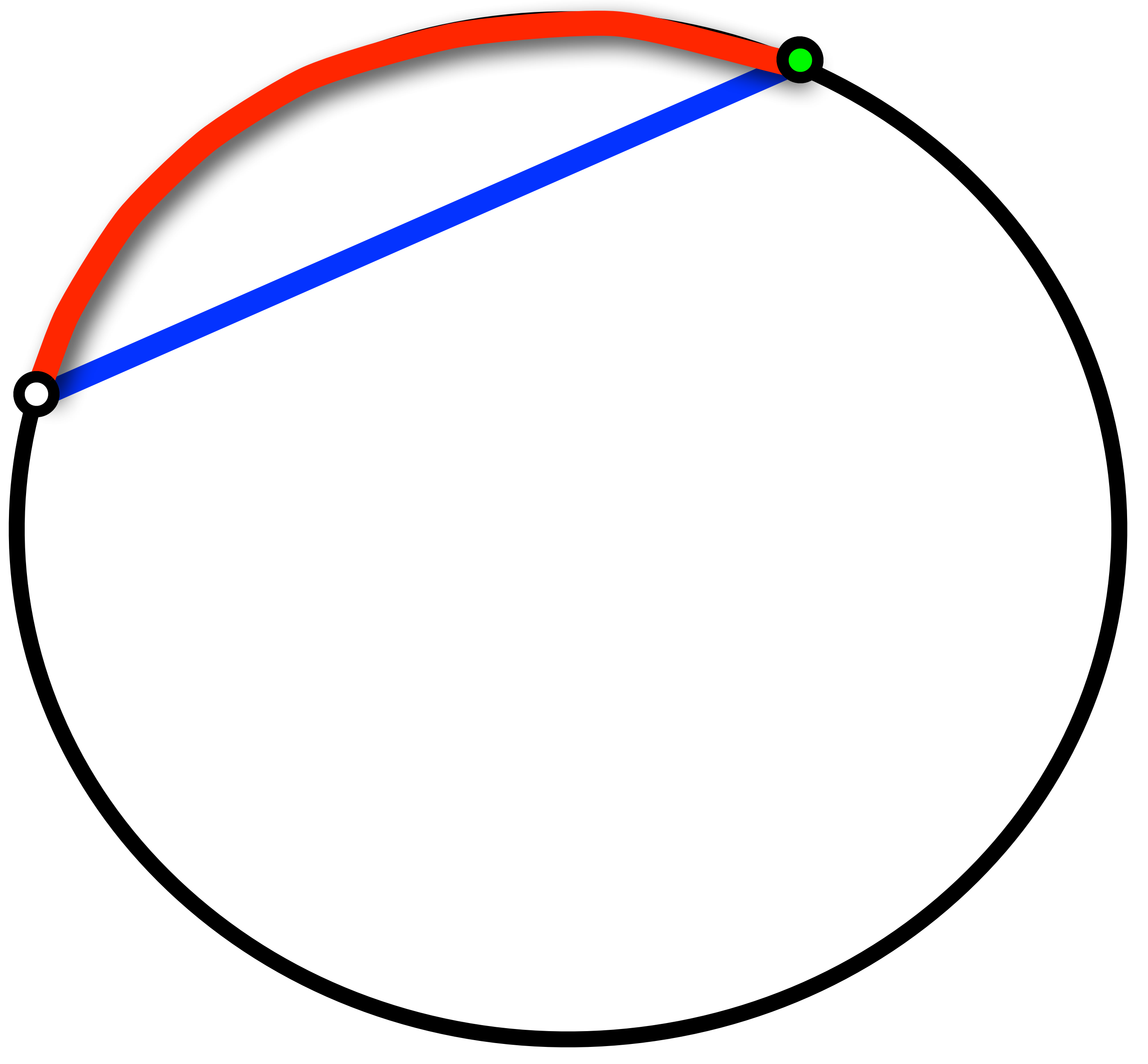
Métricas malucas
Exemplo II-Vivendo no círculo



Métricas malucas
Exemplo II-Vivendo no círculo

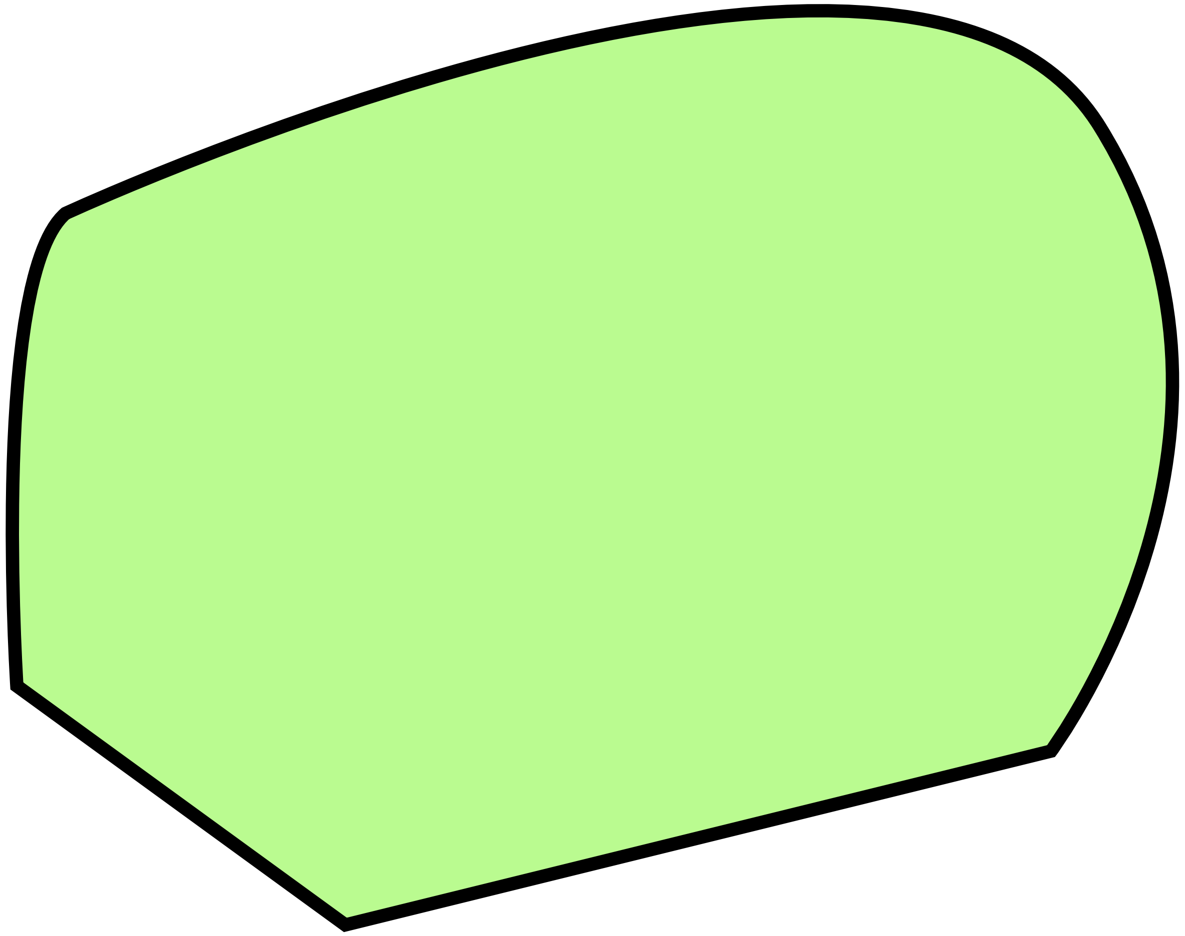


Métricas malucas
Exemplo II-Vivendo no círculo



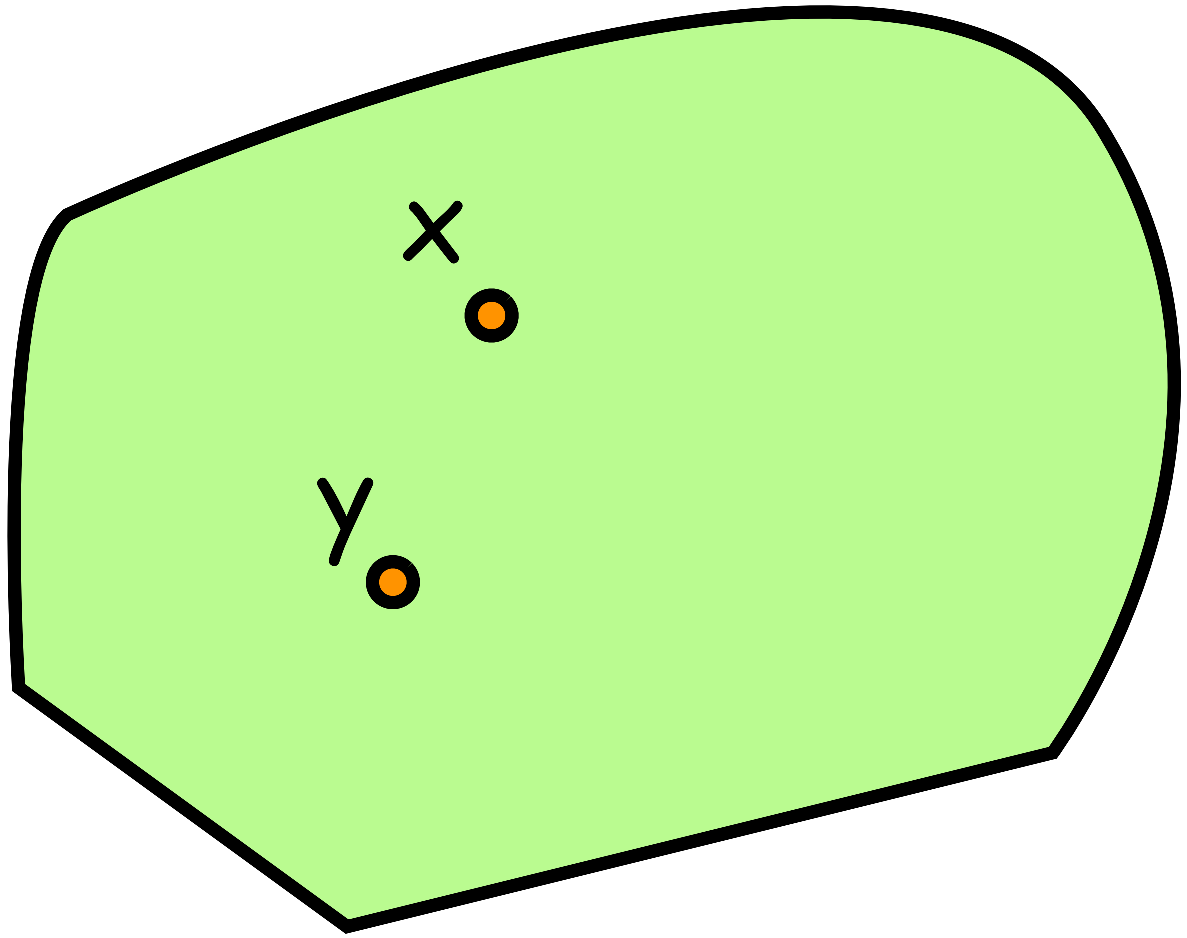
Geometria de Hilbert em um convexo

Seja $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ um aberto convexo e limitado.



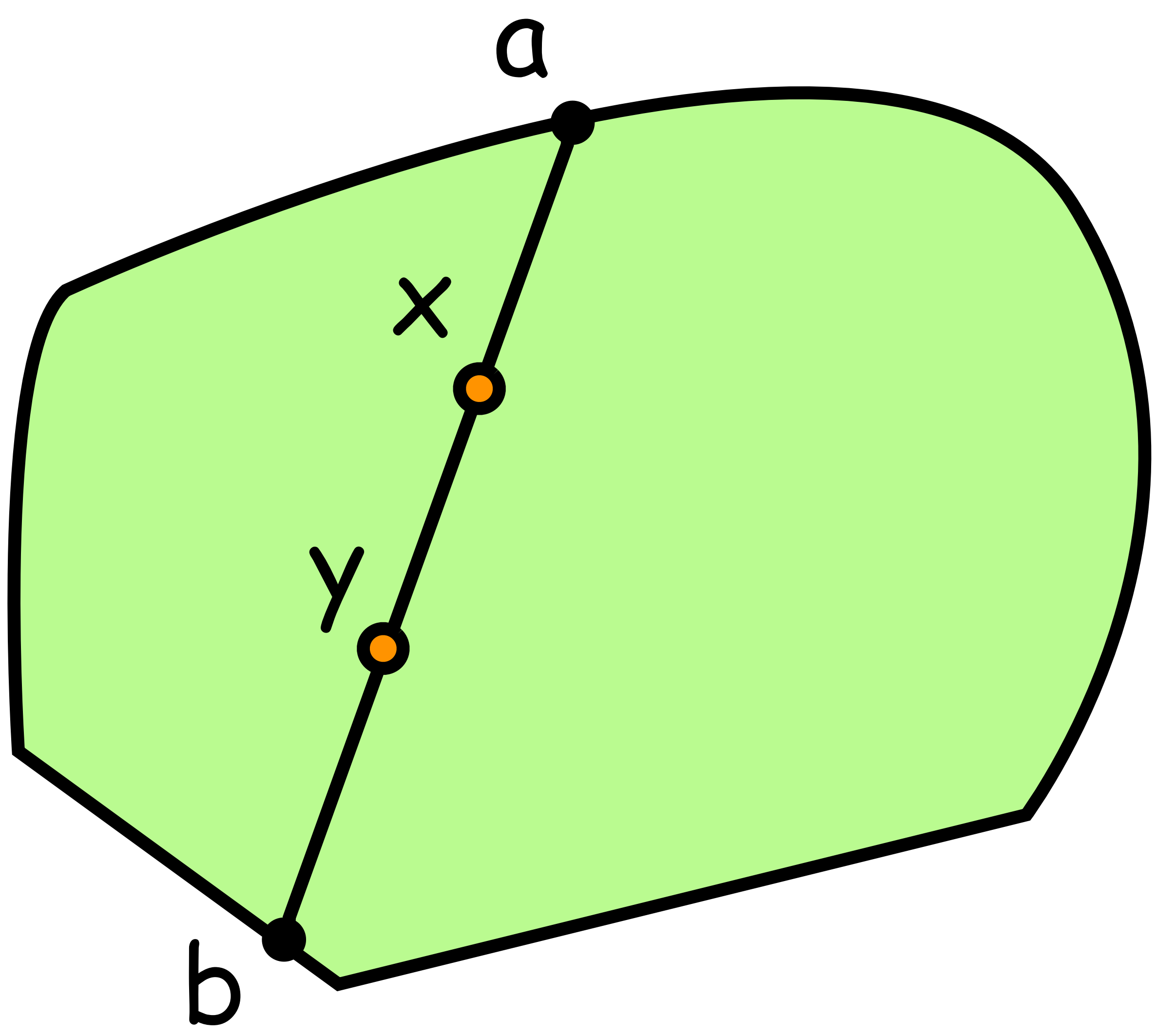
Geometria de Hilbert em um convexo

Seja $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ um aberto convexo e limitado.



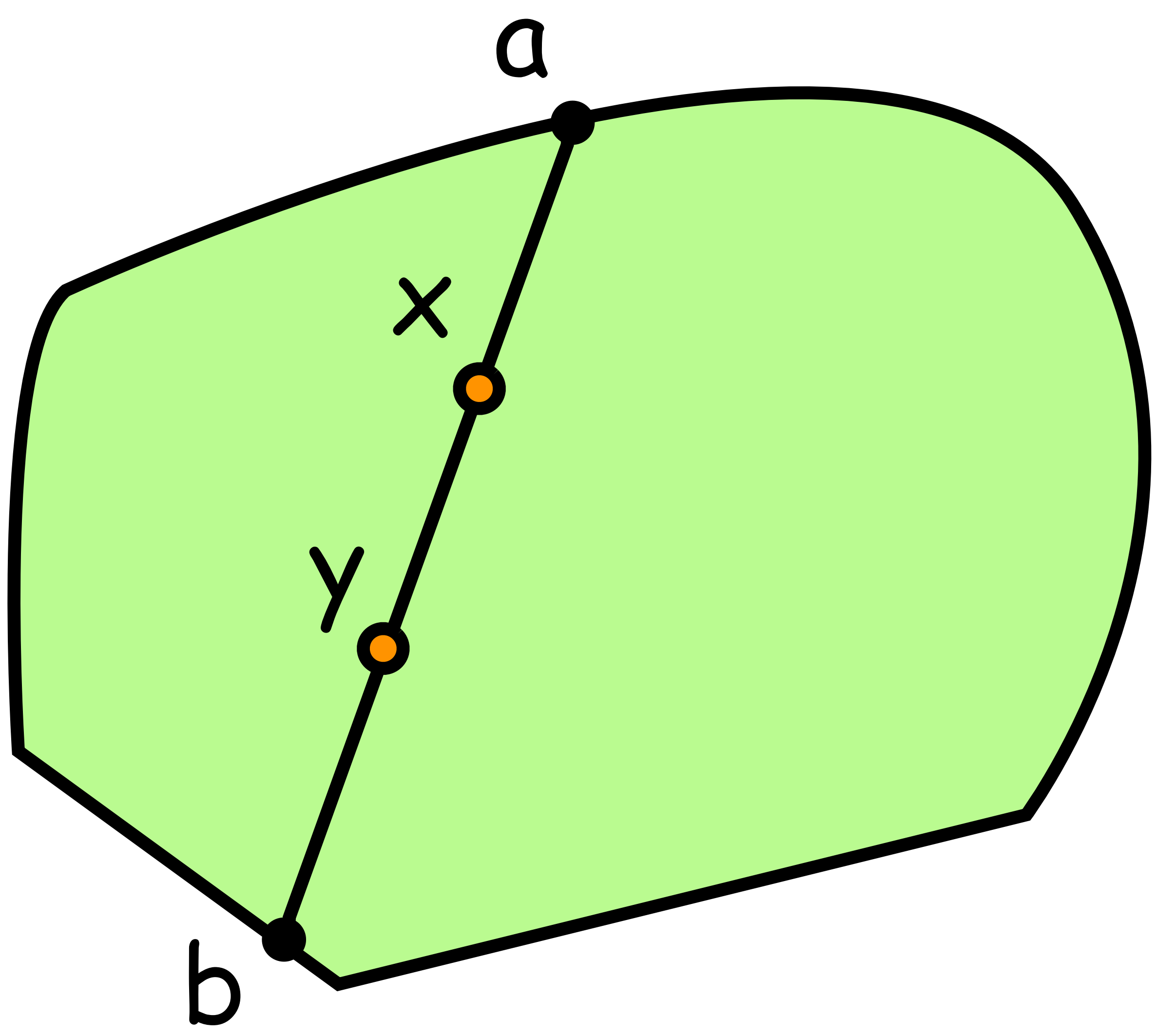
Geometria de Hilbert em um convexo

Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e limitado.



Geometria de Hilbert em um convexo

Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e limitado.

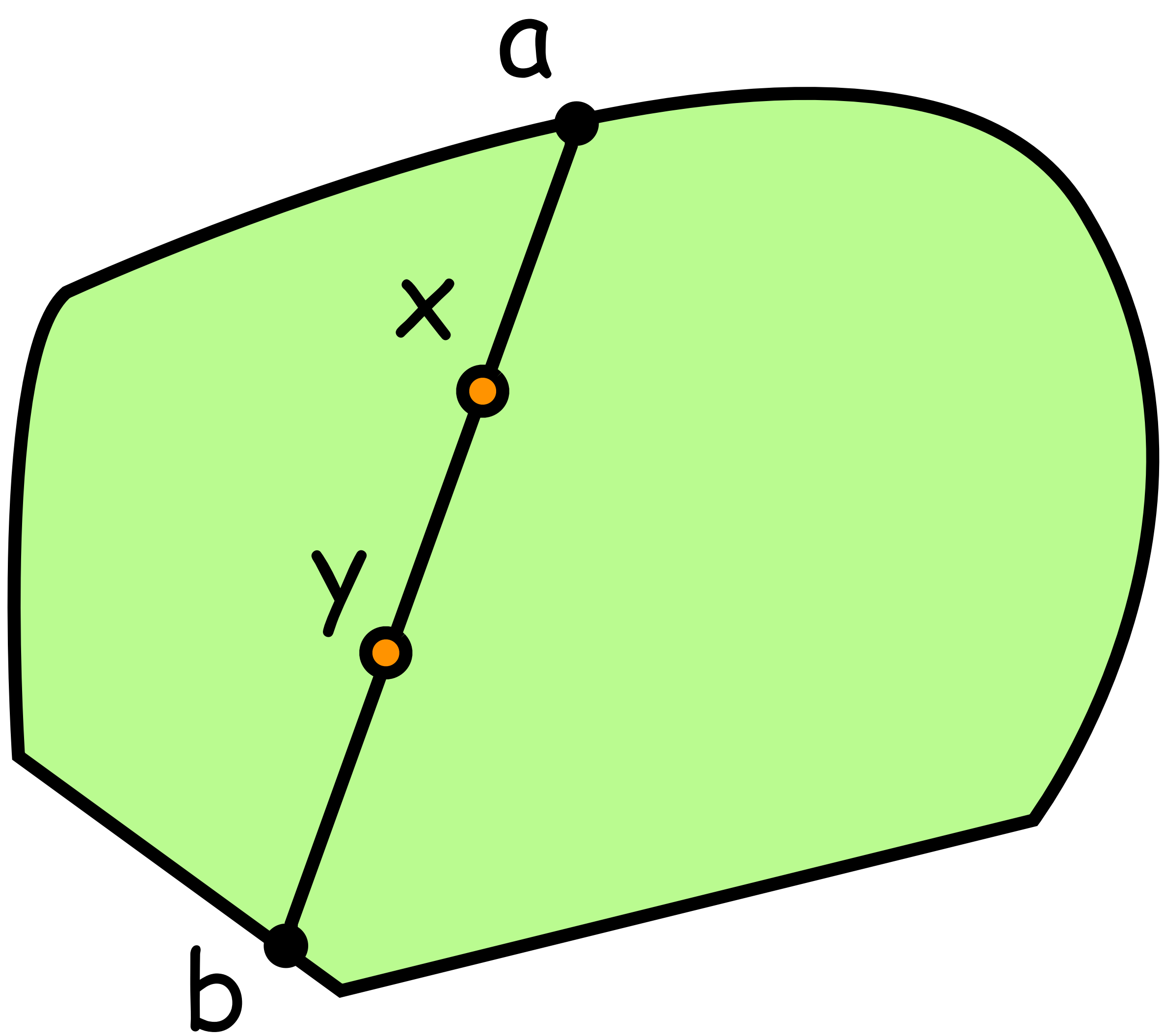


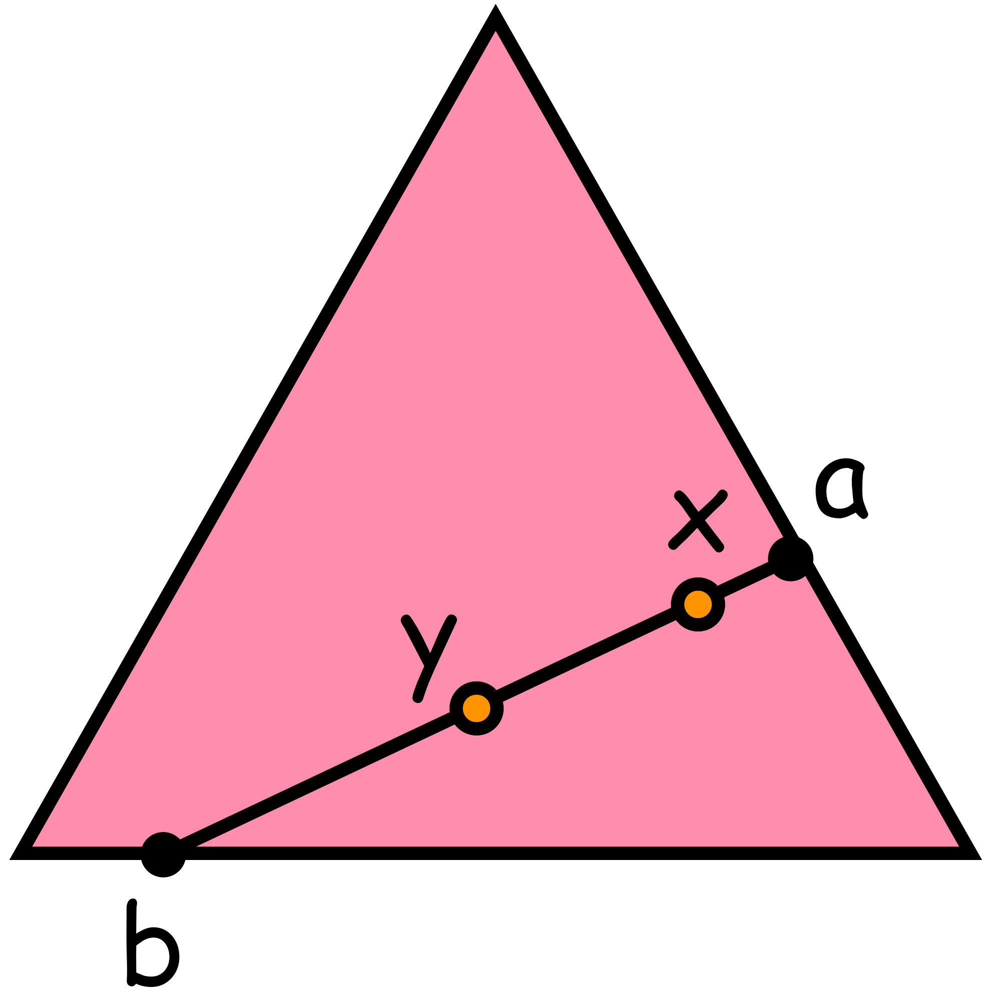
Defina a distância de Cayley-Klein-Hilbert d_{CKH} como

$$d_{CKH}(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|y - a||x - b|}{|x - a||y - b|} \right)$$

Geometria de Hilbert em um convexo

Seja $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ um aberto convexo e limitado.





Defina a distância de Cayley-Klein-Hilbert $\boldsymbol{d_{CKH}}$ como

$$\boldsymbol{d_{CKH}(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|y - a||x - b|}{|x - a||y - b|} \right)}$$

Propriedades legais da Geometria de Hilbert

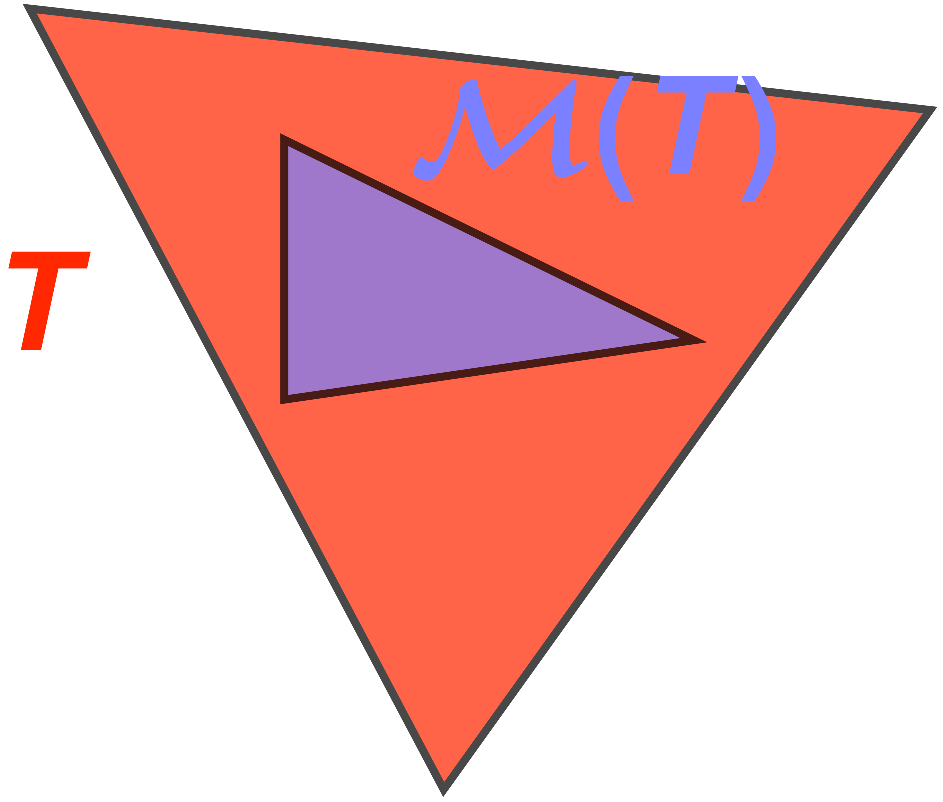
Se $\mathcal{M}$ é uma transformação linear que preserva o aberto convexo $\boldsymbol{T}$, isto é

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{T}) \subset \boldsymbol{T},$$

Então

$$\boldsymbol{d_{CKH}}(\mathcal{M}\boldsymbol{a}, \mathcal{M}\boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{d_{CKH}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

e se $\overline{\mathcal{M}(\boldsymbol{T})} \subset \boldsymbol{T}$ temos que $\mathcal{M}$ é uma contração

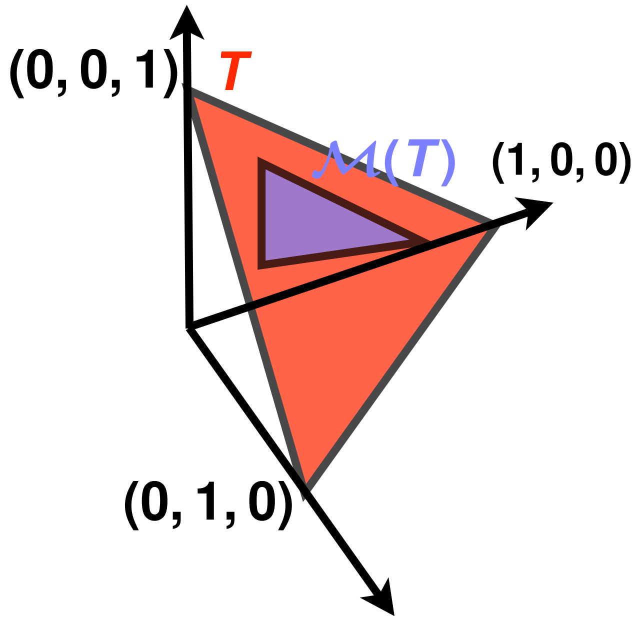


$$\boldsymbol{d_{CKH}}(\mathcal{M}\boldsymbol{a}, \mathcal{M}\boldsymbol{b}) \leq \lambda \boldsymbol{d_{CKH}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

com $\lambda < \mathbf{1}$.

Prova do Teorema de Perron-Frobenious (para matrizes estocásticas)

$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \; a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$



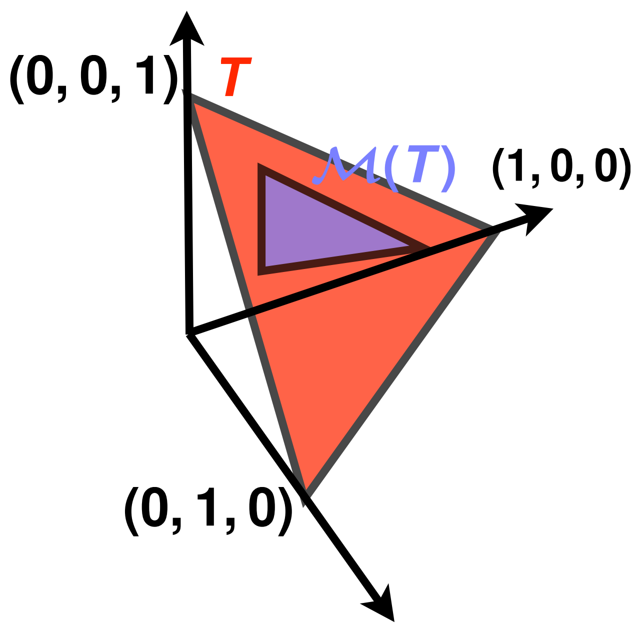
Temos

$$d_{CKH}(\mathcal{M}a, \mathcal{M}b) \leq \lambda d_{CKH}(a, b)$$

com $\lambda < 1$.

Prova do Teorema de Perron-Frobenious (para matrizes estocásticas)

$T = \{(a_1.a_2.a_3) \in \mathbb{R}^3 : \ a_i > 0 \text{ e } a_1 + a_2 + a_3 = 1\}$



Temos

$$d_{CKH}(\mathcal{M}a, \mathcal{M}b) \leq \lambda d_{CKH}(a, b)$$

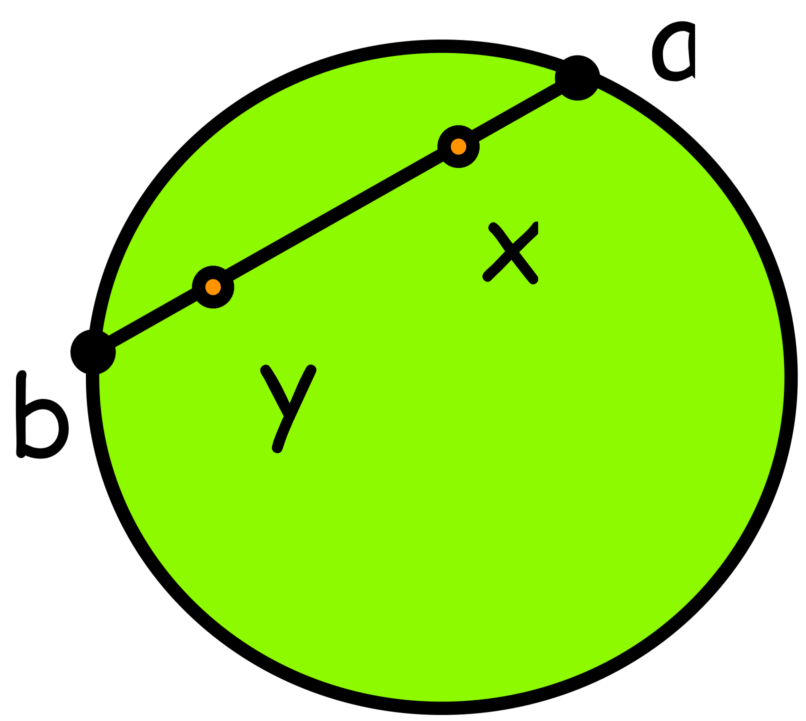
com $\lambda < 1$.

Princípio de contração de Banach

- Existe um único $u \in T$ que é fixo por $\mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{M}u = u$.
- Para todo $v \in T$ vale $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^n v = u$.

Geometria de Hilbert e geometria hiperbólica

Se o aberto convexo T for um disco então a distância de Cayley-Klein-Hilbert nos dá o modelo de Beltrami-Cayley-Klein da geometria hiperbólica (onde o quinto postulado de Euclides falha)

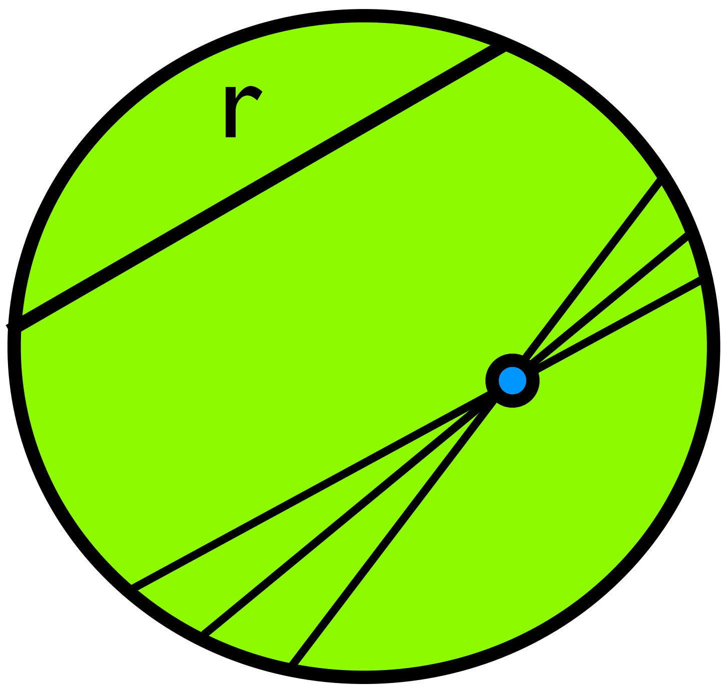


Neste modelo

- "retas" (geodésicas) são cordas do círculo
- Sendo um modelo da geometria hiperbólica, dado uma "reta" r e um ponto fora desta reta, existem uma infinidade de retas passando por este ponto e que não cruzam r.

Geometria de Hilbert e geometria hiperbólica

Se o aberto convexo T for um disco então a distância de Cayley-Klein-Hilbert nos dá o modelo de Beltrami-Cayley-Klein da geometria hiperbólica (onde o quinto postulado de Euclides falha)

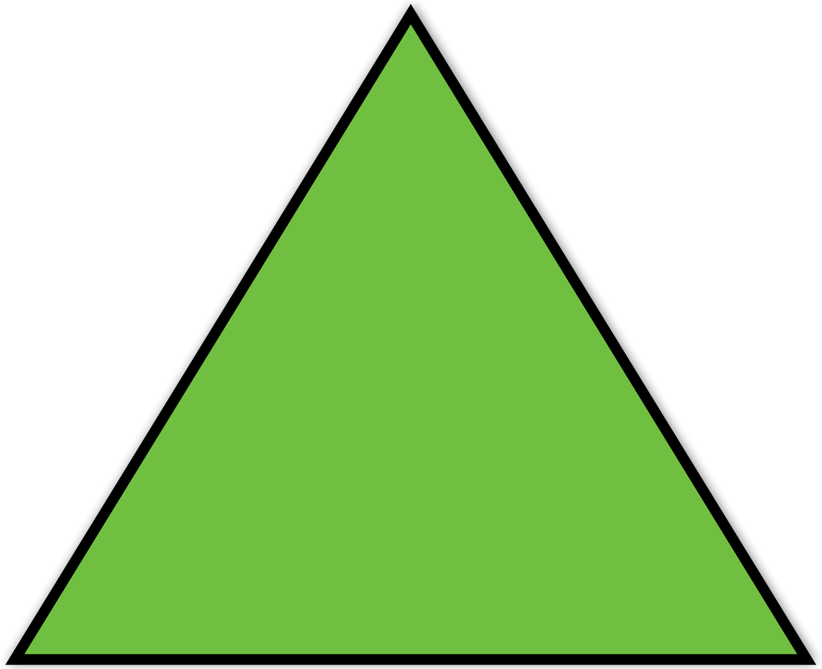


Neste modelo

- "retas" (geodésicas) são cordas do círculo
- Sendo um modelo da geometria hiperbólica, dado uma "reta" r e um ponto fora desta reta, existem uma infinidade de retas passando por este ponto e que não cruzam r.

Geometria de Hilbert e R^2

Se o aberto convexo T for um triângulo então T com a distância de Cayley-Klein-Hilbert é ISOMÉTRICO ao plano munido com uma norma apropriada!!

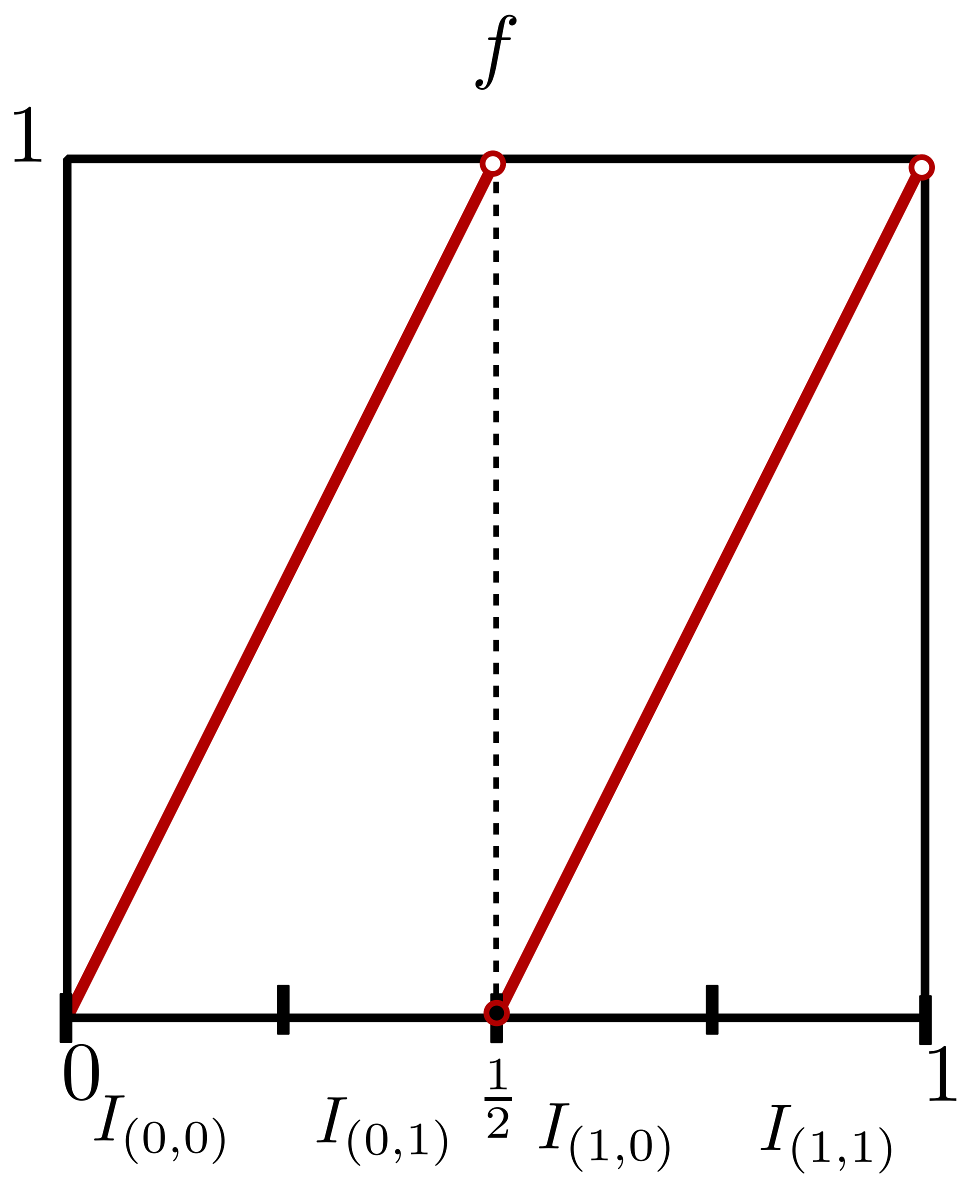


Geometria de Hilbert e operadores positivos

Hilbert introduziu a métrica de Hilbert em 1895. Ele estava interessado em suas curiosas propriedades geométricas.

Mais de 60 anos depois, Garret Birkhoff e Hans Samelson descobriram como a métrica de Hilbert e o princípio de contração de Banach poderiam ser utilizados para estudar Matrizes e, mais geralmente, operadores positivos.

Um sistema dinâmico complicado



$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Base Binária

$$2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10$$

$$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111$$

$$0,5 = 1 \cdot 2^{-1} = 0,1$$

$$4,5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} = 100,1$$

Multiplicar por 2 (10) na base binária é muito simples: é só mover a vírgula para direita uma casa!

2*0.10111 = 1.0111

Um sistema dinâmico complicado

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

$x \in [0,1]$ $\quad x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad com\ a_i \in \{0,1\}$

se $x \in [0, 1/2)$ então $a_1 = 0$ $\quad f(x) = 2x = \quad 0, a_2 a_3 a_4 \ldots$

se $x \in [1/2, 1]$ então $a_1 = 1$ $\quad f(x) = 2x - 1 = 0, a_2 a_3 a_4 \ldots$

Infinitas órbitas periódicas

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

$$x = 0,1010101010101\cdots = 0,\overline{10}$$

$$f(x) = 0,010101010101\cdots = 0,\overline{01}$$

$$f^2(x) = 0,10101010101\cdots = 0,\overline{10} = x$$

x é periódico com período 2.

Infinitas órbitas periódicas !!

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Se x é racional e $x = 0,\overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$

Então $f^n(x) = x$.

Isto é, x é periódico de período n. Assim, f tem infinitos pontos periódicos, estes pontos são densos no intervalo $[0, 1]$, e cada um tem um comportamento futuro totalmente diferente.

Infinitas órbitas periódicas !!

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Se x é racional e $x = 0, \overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$

Então $f^n(x) = x$.

Isto é, x é periódico de período n. Assim, f tem infinitos pontos periódicos, estes pontos são densos no intervalo $[0, 1]$, e cada um tem um comportamento futuro totalmente diferente.

Pesadelo!!

Infinitas órbitas periódicas !!

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Se x é racional e $x = 0,\overline{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$

Então $f^n(x) = x$.

Isto é, x é periódico de período n. Assim, f tem infinitos pontos periódicos, estes pontos são densos no intervalo $[0, 1]$, e cada um tem um comportamento futuro totalmente diferente.

Pesadelo!!

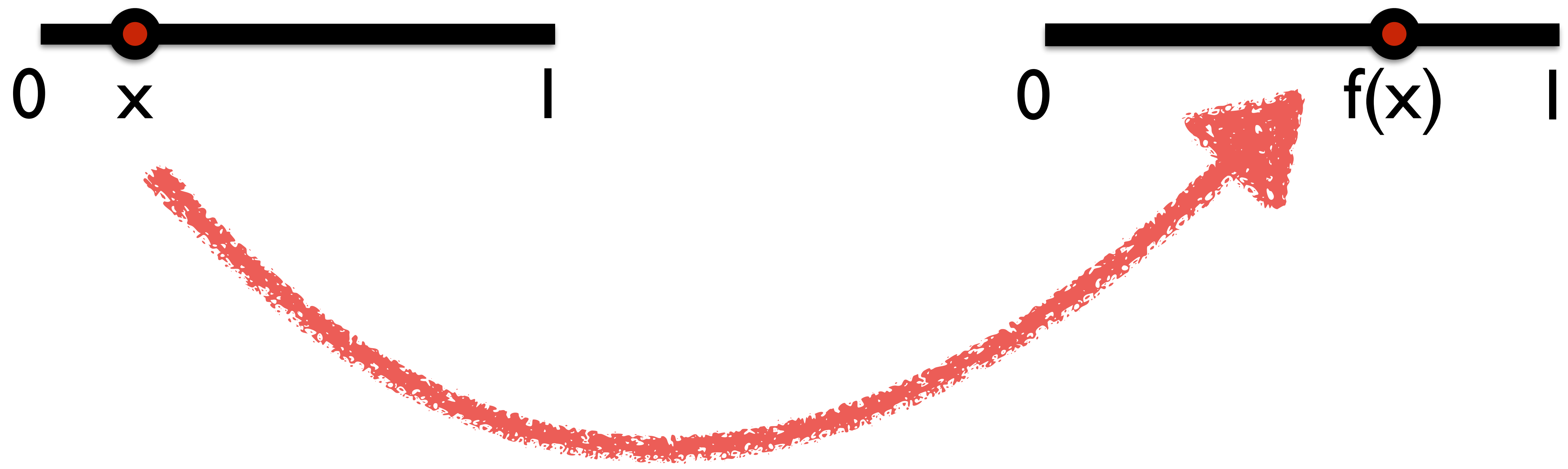
Do rigor na ciência

Jorge Luis Borges

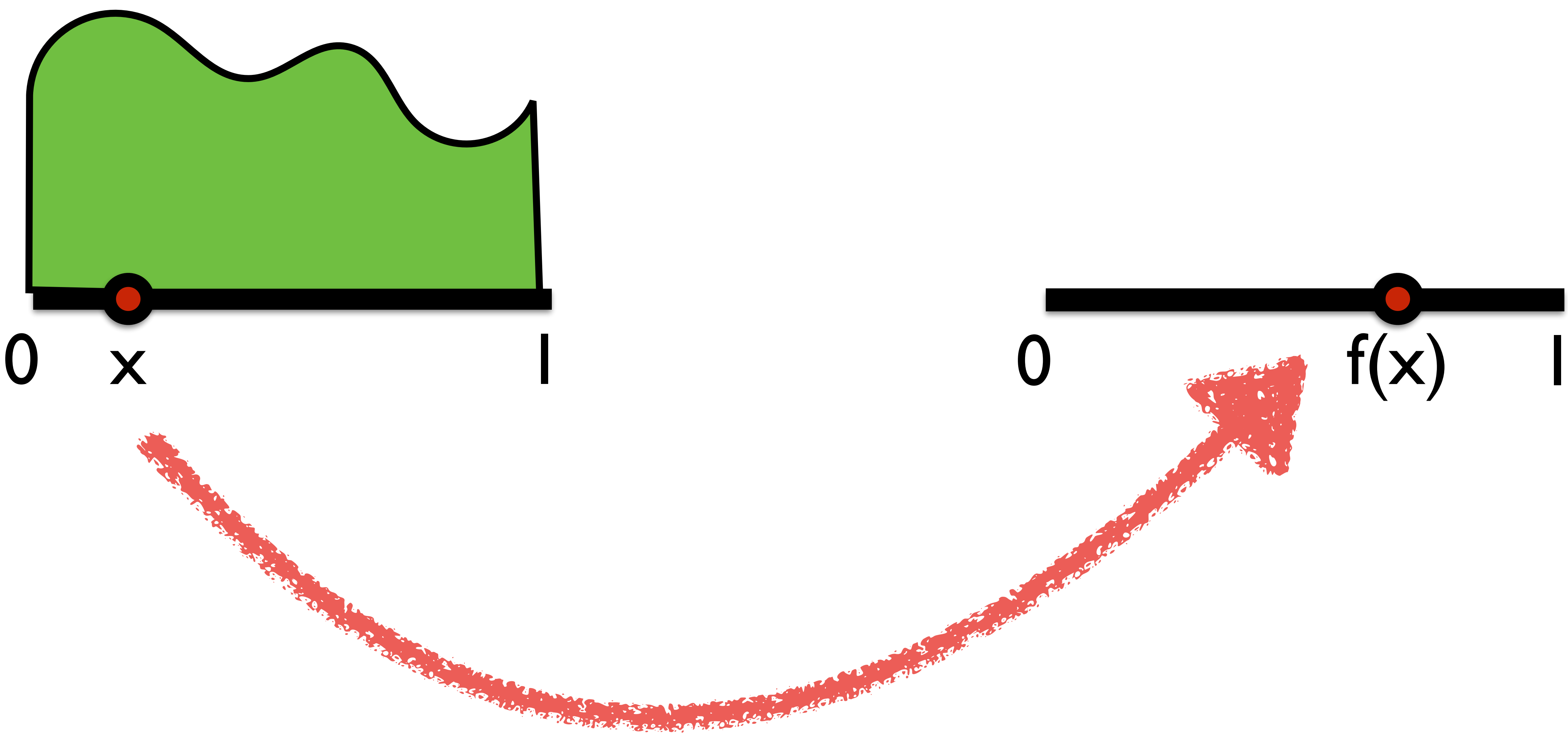
Naquele Império, a Arte da Cartografia logrou tal perfeição que o mapa de uma única Província ocupava toda uma Cidade, e o mapa do império, toda uma Província. Com o tempo, esses Mapas Desmedidos não satisfizeram e os Colégios de Cartógrafos levantaram um Mapa do Império, que tinha o tamanho do Império e coincidia pontualmente com ele. Menos Adictas ao Estudo da Cartografia, as Gerações Seguintes entenderam que esse dilatado Mapa era Inútil e não sem Impiedade o entregaram às Inclemências do Sol e dos Invernos. Nos desertos do Oeste perduram despedaçadas Ruínas do Mapa, habitadas por Animais e por Mendigos; em todo o País não há outra relíquia das Disciplinas Cartográficas.

Suáres Miranda: Viajes de Varones Prudentes, livro quatro, cap. XLV, Lérida, 1658.

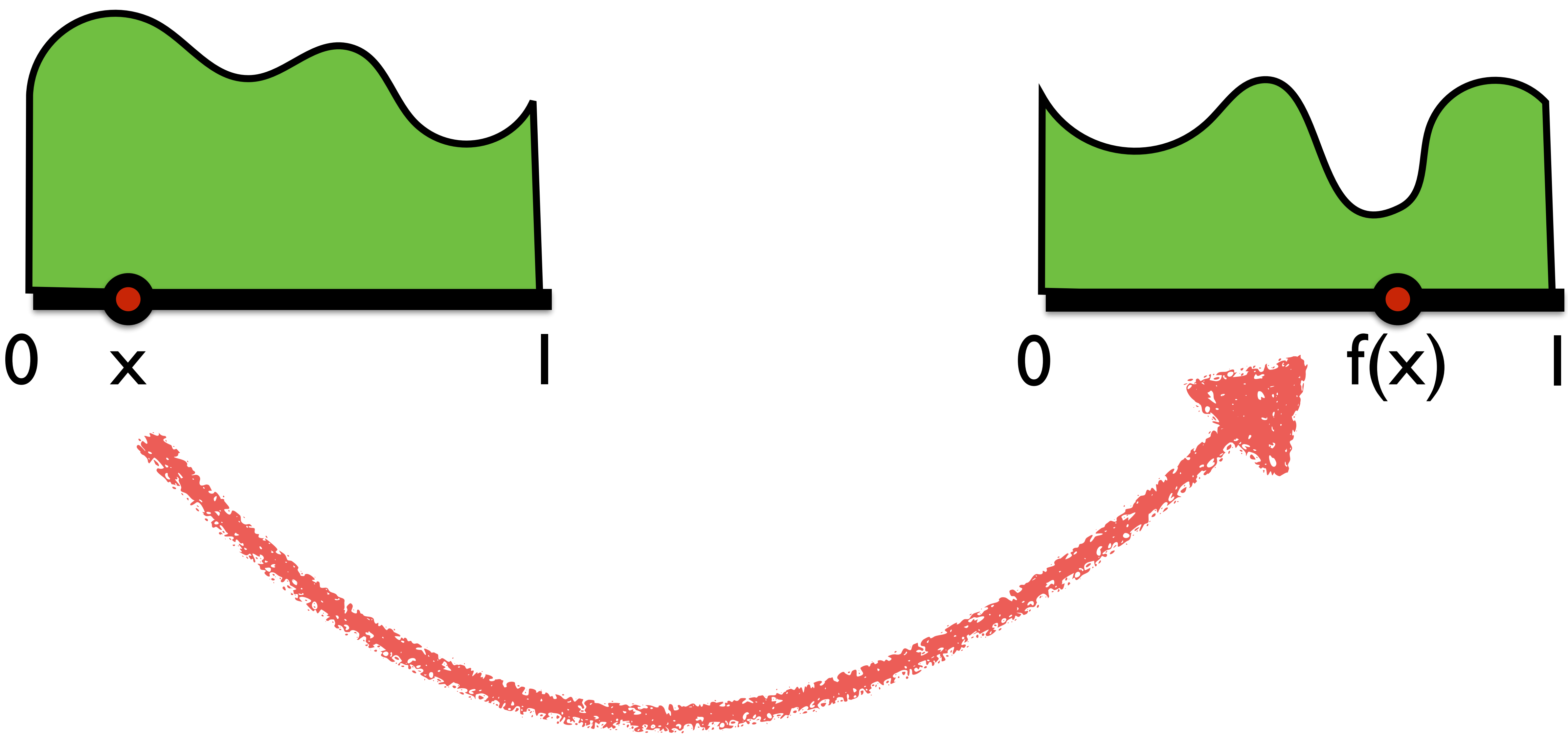
Espanhando areia com f



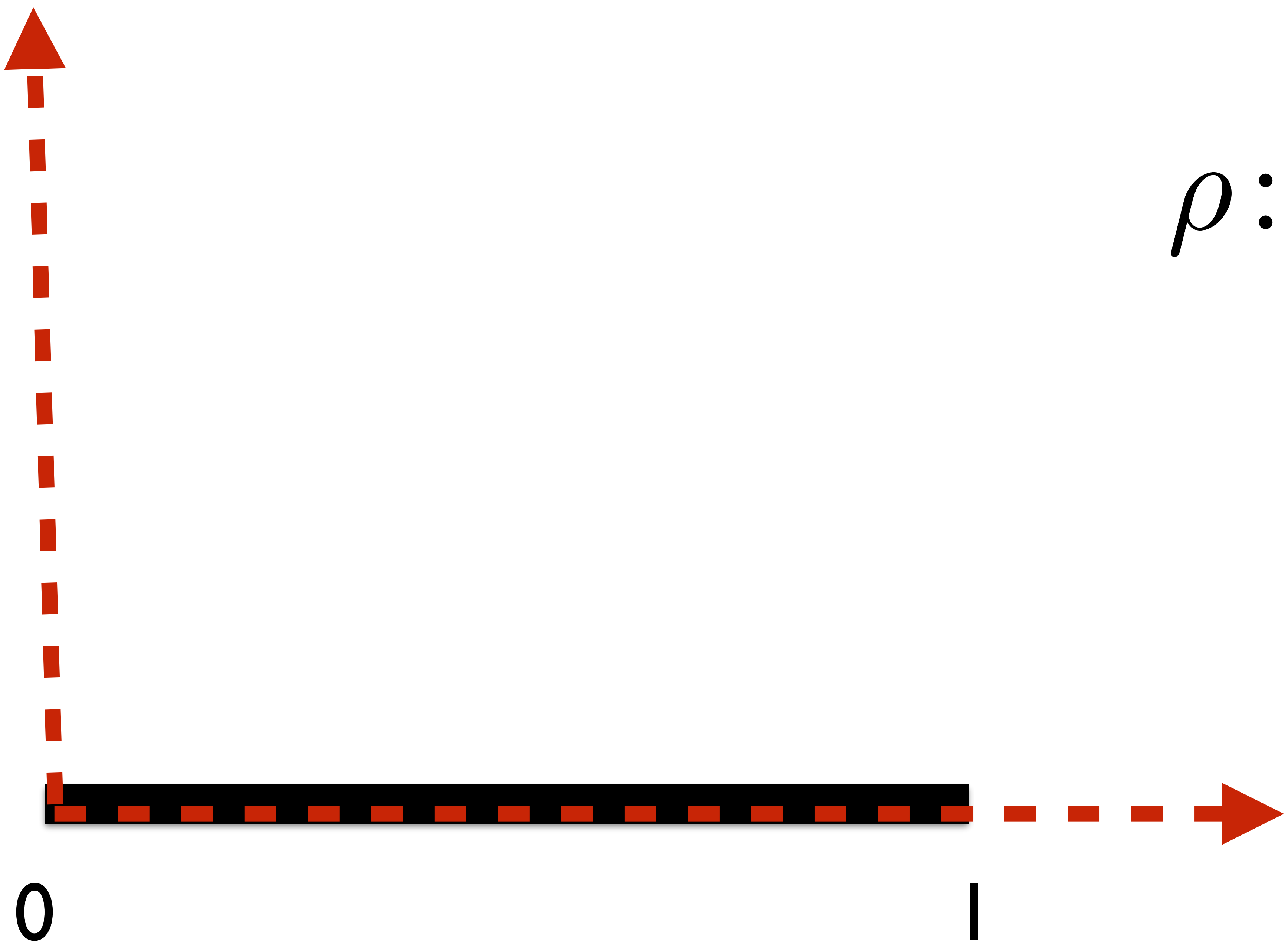
Espanhando areia com f



Espanhando areia com f

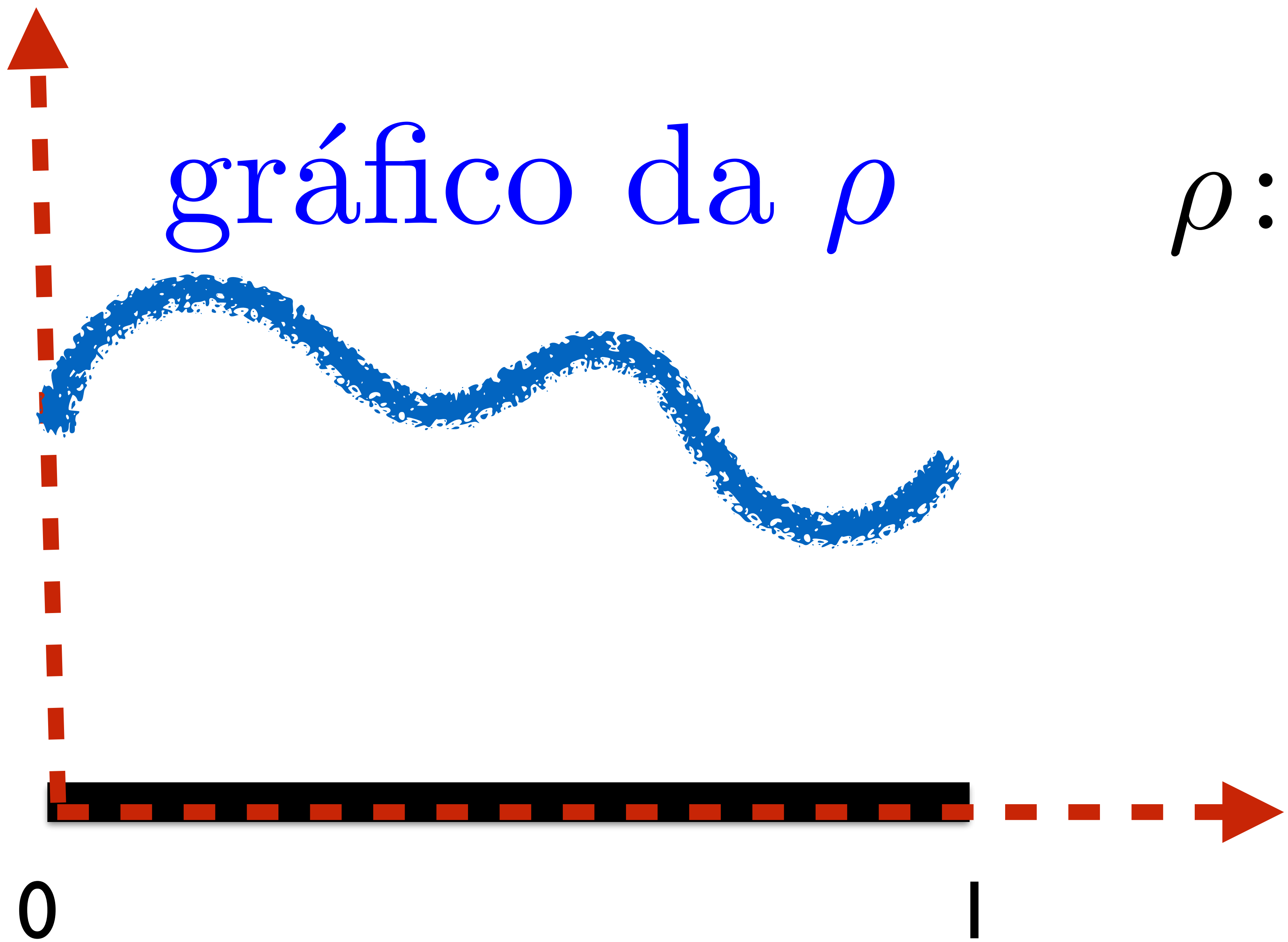


Como descrever uma distribuição de areia



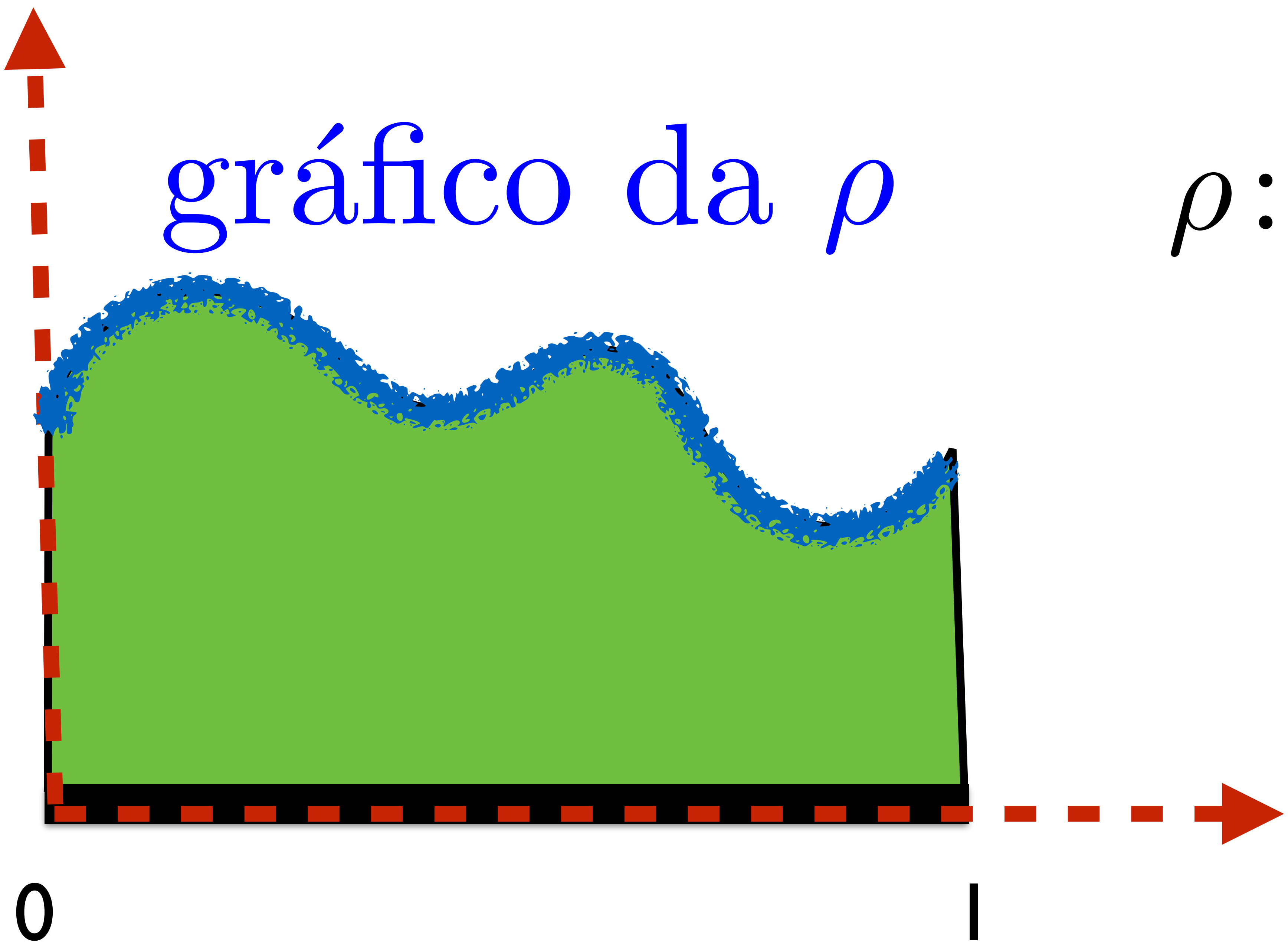
$$\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^+$$

Como descrever uma distribuição de areia



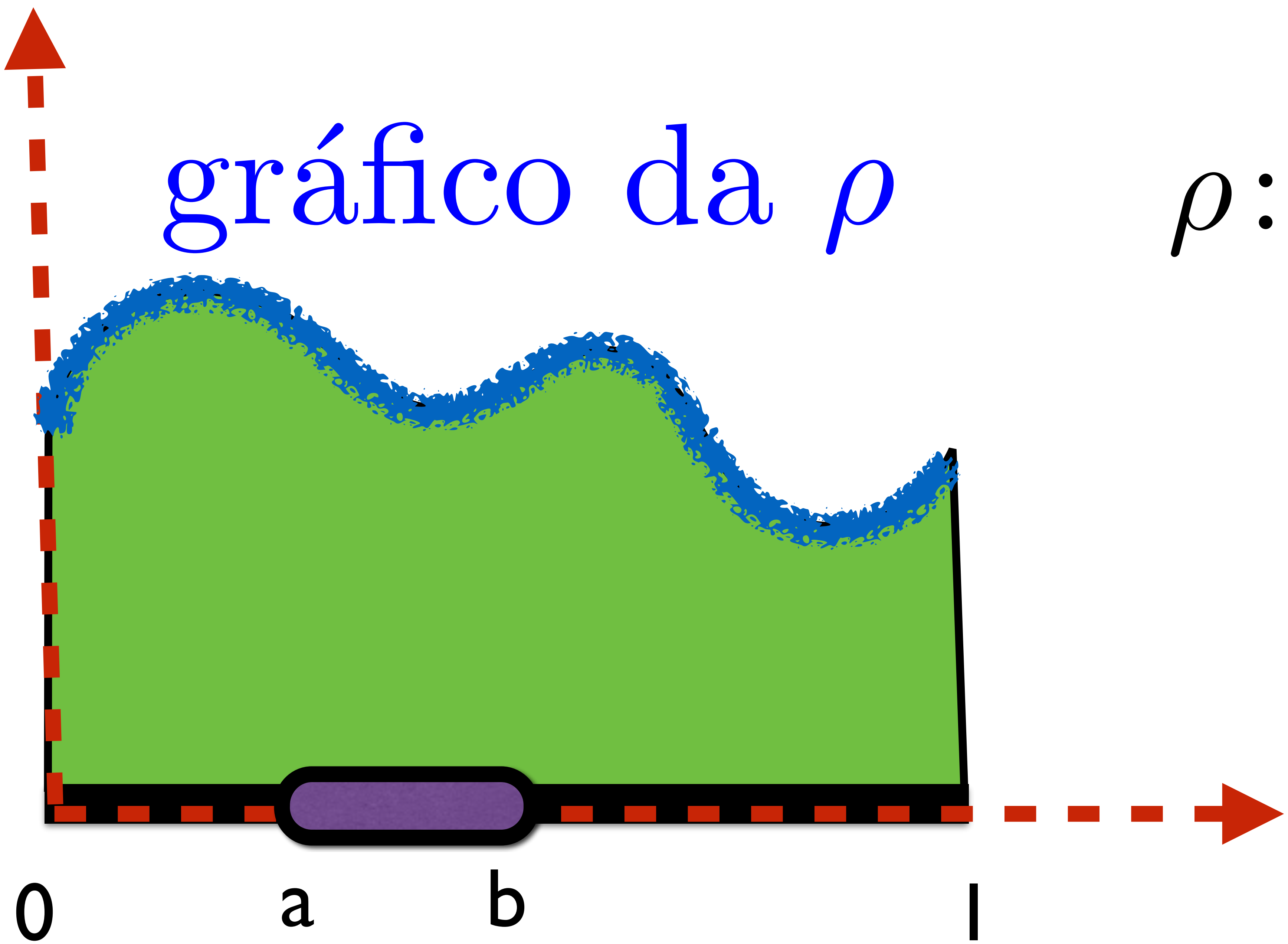
$$\rho\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$$

Como descrever uma distribuição de areia



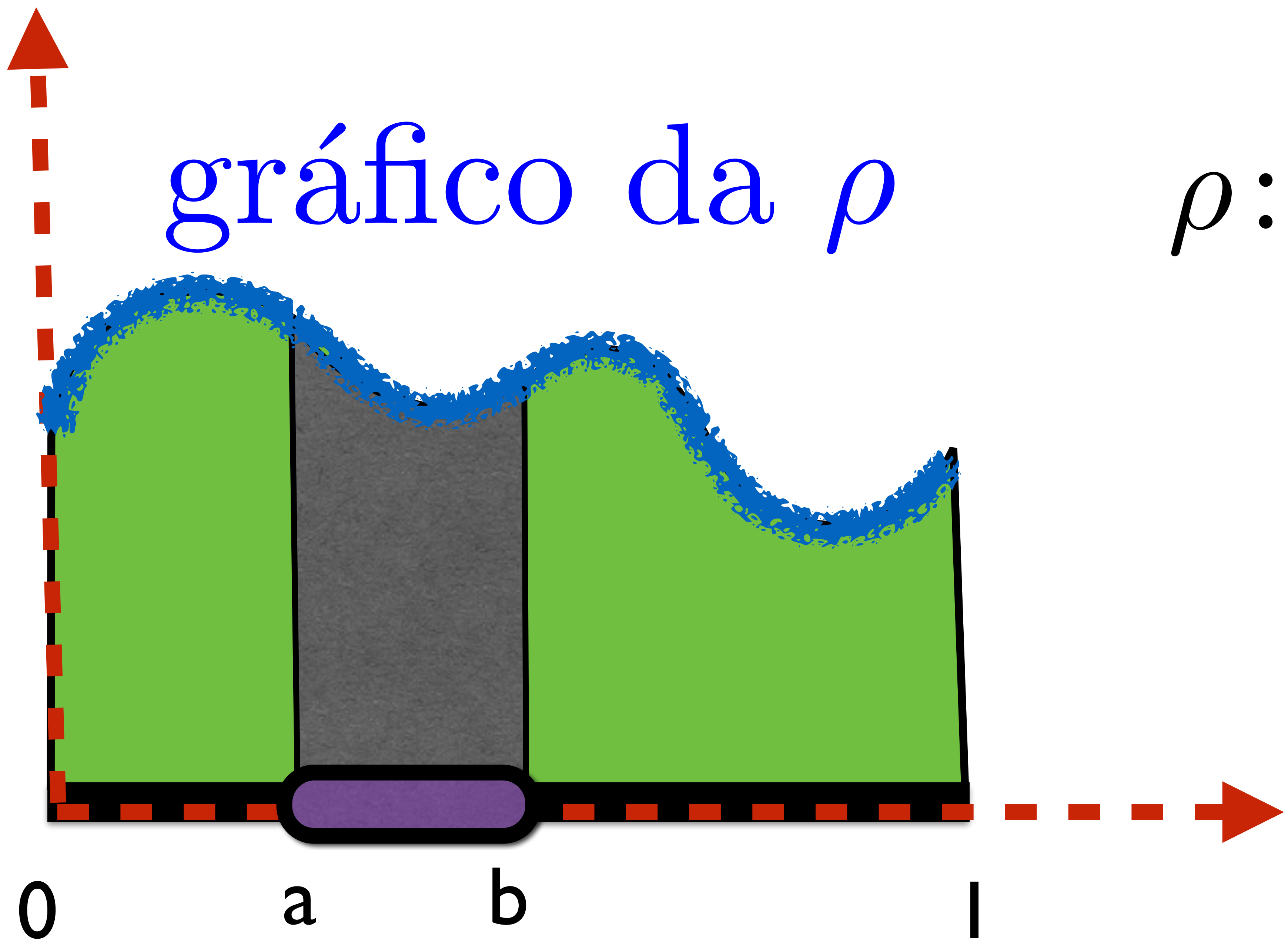
$$\rho\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$$

Como descrever uma distribuição de areia



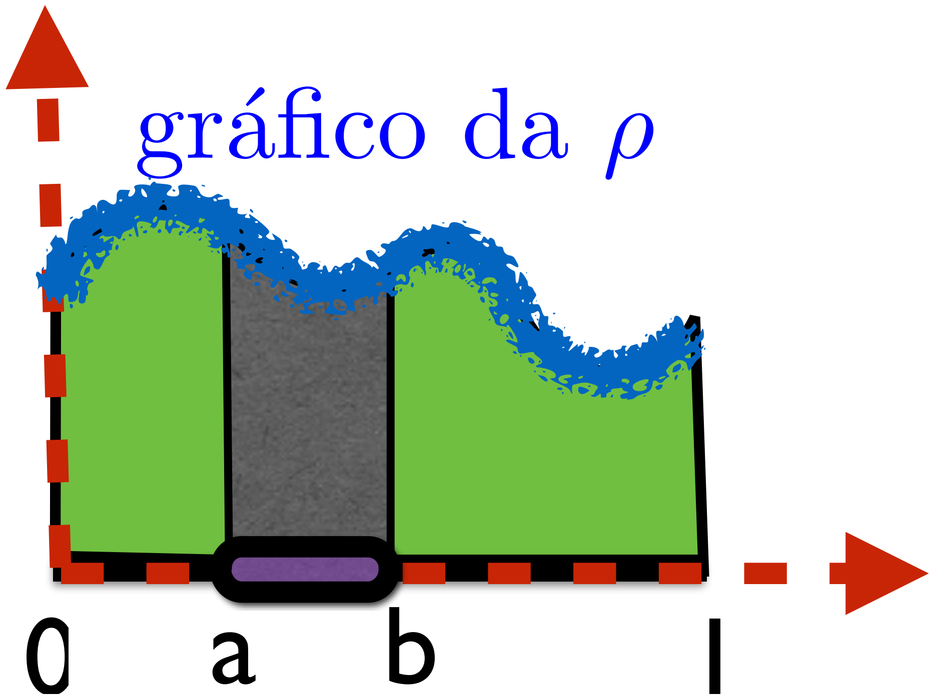
$$\rho\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$$

Como descrever uma distribuição de areia



$$\rho\colon [0,1] \to \mathbb{R}^+$$

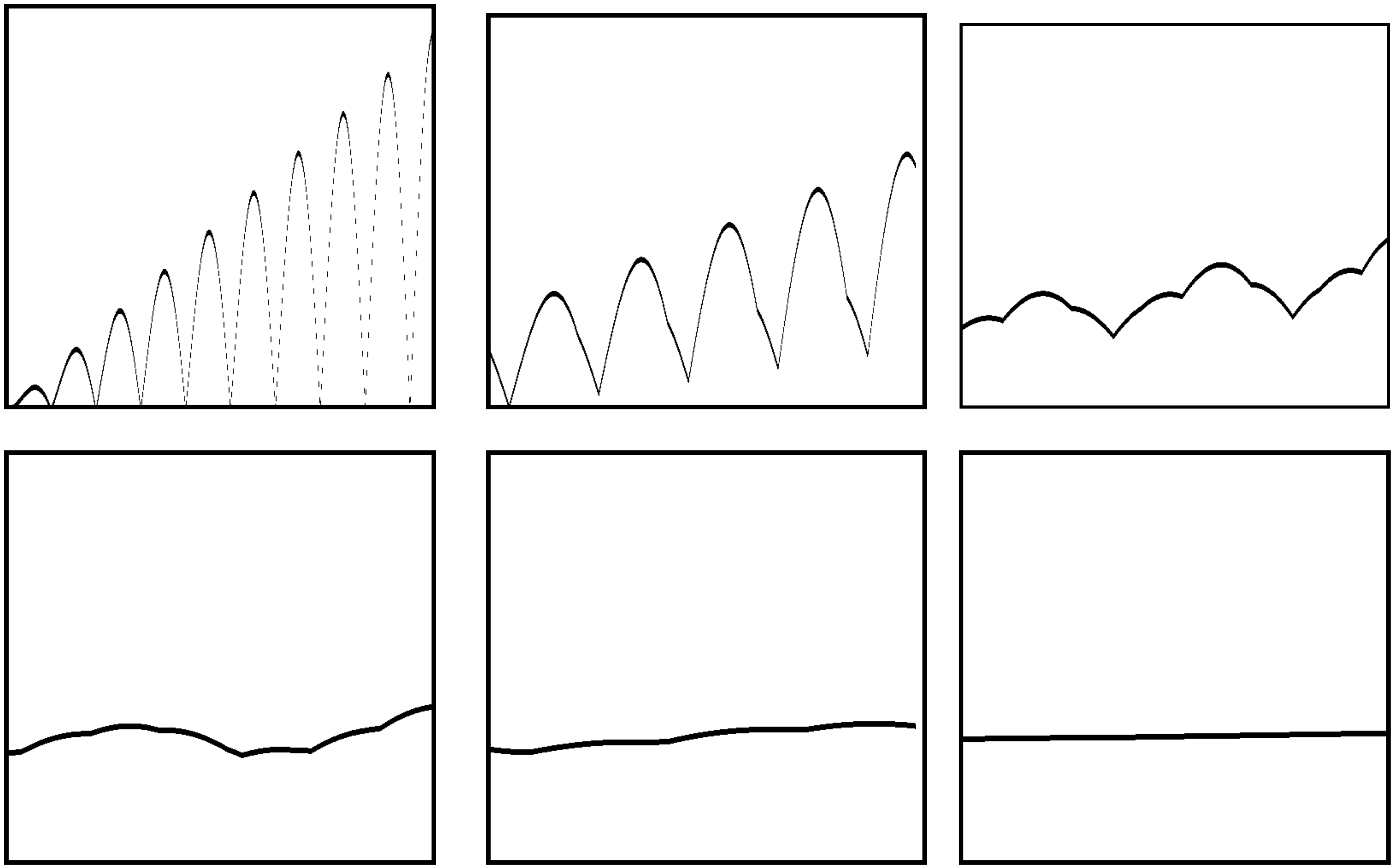
Como descrever uma distribuição de areia



quantidade de areia acima do intervalo $[a, b] = \mu([a, b])$

$$\mu([a,b]) = \int_a^b \rho(x)\ dx$$

Espalhando areia com uma função



Qualquer distribuição converge para distribuição constante!!

Espalhando areia com f

Qual a relação entre ρ_0 e ρ_1?

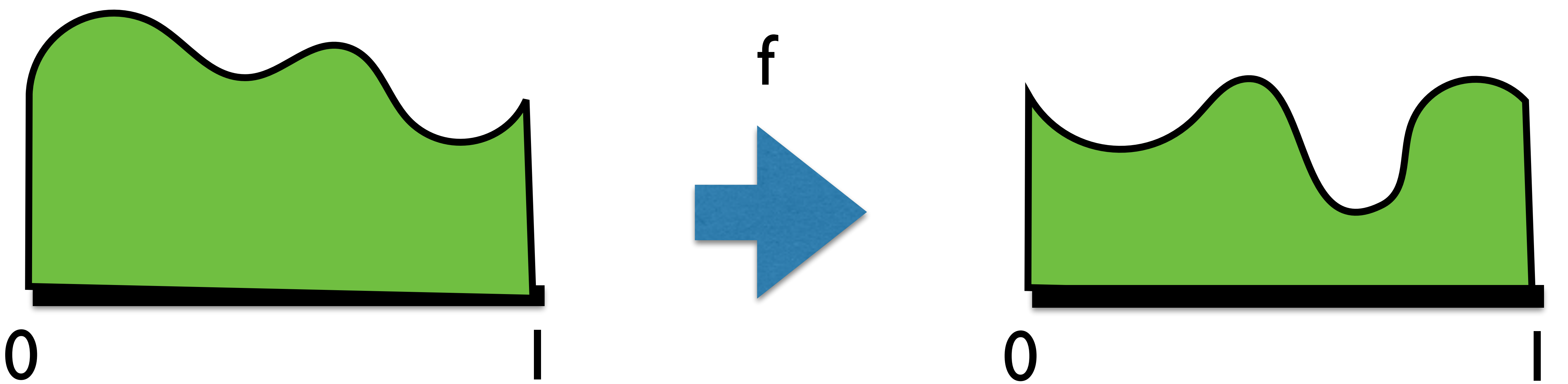
Espalhando areia com f

Distribuição ρ_0

Qual a relação entre ρ_0 e ρ_1?

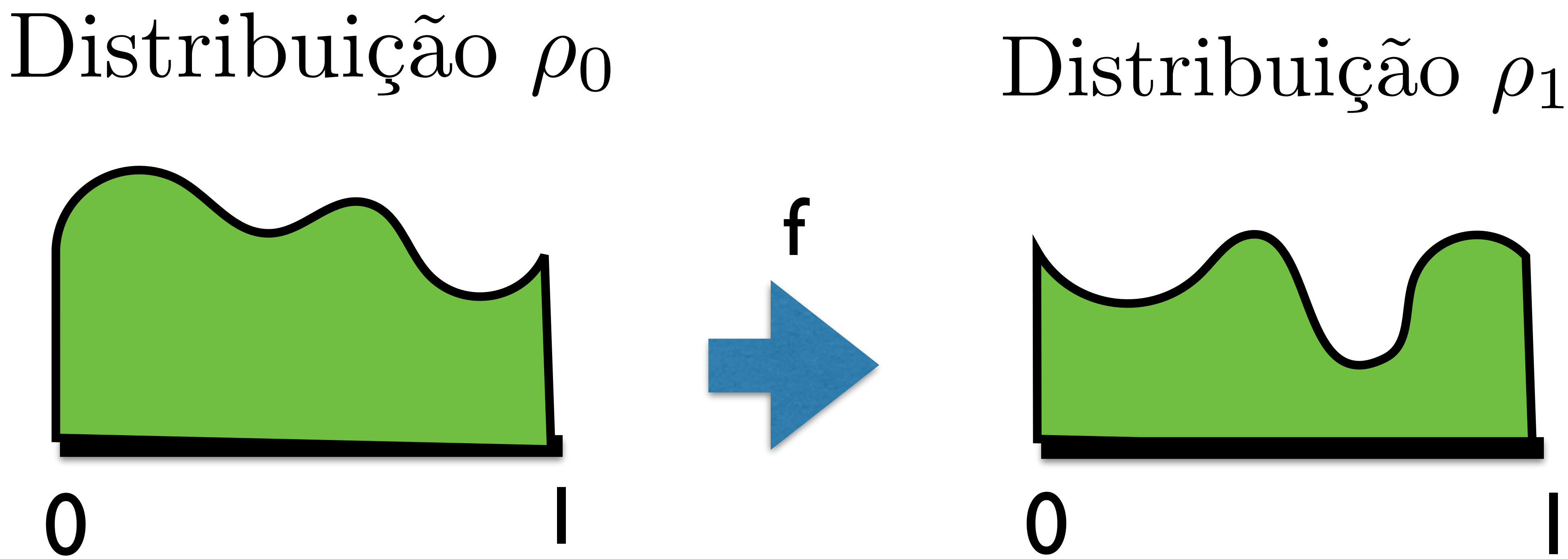
Espalhando areia com f

Distribuição ρ_0 Distribuição ρ_1



Qual a relação entre ρ_0 e ρ_1?

Espalhando areia com f



$$\rho_1(x) = \frac{1}{2}\rho_0(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\rho_0(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})$$

$$\rho_1 = L(\rho_0)$$

onde $L\colon C[0,1] \to C[0,1]$ é um operador linear contínuo.

Espalhando areia com f

$$\rho_1(x) = \frac{1}{2}\rho_0(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\rho_0(\frac{x}{2} + \frac{1}{2})$$

$$\rho_1 = L(\rho_0)$$

- $L(\rho + \tilde{\rho}) = L(\rho) + L(\tilde{\rho})$ $(como\ uma\ matriz!!)$
- $L(\alpha\rho) = \alpha L(\rho)$ $(como\ uma\ matriz!!)$
- Se $\rho > 0$ então $L(\rho) > 0$ (como uma matriz positiva!!)
- Se $\int_0^1 \rho\, dx = 1$ então $\int_0^1 L(\rho)\, dx = 1$ (como uma matriz estocástica!!)

Espalhando areia com f

Podemos utilizar a métrica de Hilbert de modo análogo ao utilizado no caso das matrizes estocásticas para mostrar que qualquer distribuição irá convergir para distribuição constante.

Referência

ON THE PERRON-FROBENIUS THEOREM

Hans Samelson

1. INTRODUCTION

The purpose of this note is to present another proof for the well-known theorem of Perron and Frobenius about matrices with positive elements, or rather, for the main part of it which says that *such a matrix has exactly one positive eigenvector* (that is, one whose coordinates are all positive). In the bibliography we list a few other proofs, including generalizations to function spaces. The proof given here is geometric in character, and quite elementary.

Birkhoff's version of Hilbert's metric and its applications in analysis

*Bas Lemmens** *and Roger Nussbaum* **

School of Mathematics, Statistics & Actuarial Science
University of Kent,
Canterbury, Kent CT2 7NF, UK
email: B.Lemmens@kent.ac.uk

Department of Mathematics,
Rutgers, The State University Of New Jersey,
110 Frelinghuysen Road, Piscataway, NJ 08854-8019, USA
email: nussbaum@math.rutgers.edu