Matemática aplicada à premonição: prevendo o futuro com o Axioma da Escolha

Rodrigo R. Dias

UFABC

Seminário de Coisas Legais, 22/11/2024

O que une essas pessoas?

O que une essas pessoas?

O que une essas pessoas?


O que une essas pessoas?



O que une essas pessoas?

O que une essas pessoas?




Pffff. Francamente.

Pffff. Francamente.
Me disseram que o assunto aqui era matemática.

Pffff. Francamente.
Me disseram que o assunto aqui era matemática.
Matemática não tem nada a ver com essas coisas de "prever o futuro".

Pffff. Francamente.
Me disseram que o assunto aqui era matemática.
Matemática não tem nada a ver com essas coisas de "prever o futuro".

... Será mesmo?

First things first, next things next

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $\quad a \prec b \quad$ e $\quad b \prec c, \quad$ então $\quad a \prec c$;

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$;
(ii) dados $a, b \in X$, tem-se que ocorre exatamente uma das três condições

$$a \prec b, \qquad b \prec a, \qquad a = b;$$

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $\quad a \prec b \quad$ e $\quad b \prec c, \quad$ então $\quad a \prec c$;
(ii) dados $a, b \in X$, tem-se que ocorre exatamente uma das três condições

$$a \prec b, \qquad\qquad b \prec a, \qquad\qquad a = b;$$

(iii) todo subconjunto não vazio de X possui um mínimo com respeito a $\prec$.

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $\quad a \prec b \quad$ e $\quad b \prec c, \quad$ então $\quad a \prec c$;
(ii) dados $a, b \in X$, tem-se que ocorre exatamente uma das três condições

$$a \prec b, \qquad\qquad b \prec a, \qquad\qquad a = b;$$

(iii) todo subconjunto não vazio de X possui um mínimo com respeito a $\prec$.

[Intuitivamente, isso significa que é possível enfileirar os elementos de X de modo que sempre exista "o próximo da fila" (a menos que já tenhamos percorrido a fila inteira, claro).]

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$;
(ii) dados $a, b \in X$, tem-se que ocorre exatamente uma das três condições

$$a \prec b, \qquad b \prec a, \qquad a = b;$$

(iii) todo subconjunto não vazio de X possui um mínimo com respeito a $\prec$.

Importante

Numa boa-ordem, não pode existir uma sequência infinita

$$a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots$$

— porque daí $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ não teria elemento mínimo com respeito a $\prec$.

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $\quad a \prec b \quad$ e $\quad b \prec c, \quad$ então $\quad a \prec c$;
(ii) dados $a, b \in X$, tem-se que ocorre exatamente uma das três condições

$$a \prec b, \qquad\qquad b \prec a, \qquad\qquad a = b;$$

(iii) todo subconjunto não vazio de X possui um mínimo com respeito a $\prec$.

Teorema (Zermelo)

Todo conjunto pode ser bem-ordenado.

First things first, next things next

Definição

Uma **boa-ordem** num conjunto X é uma relação $\prec$ sobre X satisfazendo:
(i) se $\quad a \prec b \quad$ e $\quad b \prec c, \quad$ então $\quad a \prec c$;
(ii) dados $a, b \in X$, tem-se que ocorre exatamente uma das três condições

$$a \prec b, \qquad\qquad b \prec a, \qquad\qquad a = b;$$

(iii) todo subconjunto não vazio de X possui um mínimo com respeito a $\prec$.

Teorema (Zermelo)

Todo conjunto pode ser bem-ordenado.
(Isso é *equivalente* ao Axioma da Escolha!)

E onde entram as “previsões” nessa história?

Digamos que E é o conjunto de todos os *estados* possíveis que queremos analisar.

E onde entram as "previsões" nessa história?

Digamos que E é o conjunto de todos os *estados* possíveis que queremos analisar.

Vamos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \to E$ é um **cenário**.

E onde entram as "previsões" nessa história?

Digamos que E é o conjunto de todos os *estados* possíveis que queremos analisar.

Vamos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \to E$ é um **cenário**.
Interpretando $\mathbb{R}$ como a linha do tempo, temos que um cenário f nos diz o estado $f(t)$ em cada instante $t \in \mathbb{R}$.

E onde entram as "previsões" nessa história?

Digamos que E é o conjunto de todos os *estados* possíveis que queremos analisar.

Vamos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \to E$ é um **cenário**.
Interpretando $\mathbb{R}$ como a linha do tempo, temos que um cenário f nos diz o estado $f(t)$ em cada instante $t \in \mathbb{R}$.

Dentre todos os cenários possíveis, há um deles que é o cenário *verdadeiro*, o qual será denotado por v.

Prevendo o presente a partir do passado

Fixado um instante $t \in \mathbb{R}$, vamos mostrar como o estado $v(t)$ pode ser (muito bem) previsto a partir do conhecimento de $v(s)$ para cada $s < t$.

Prevendo o presente a partir do passado

Fixado um instante $t \in \mathbb{R}$, vamos mostrar como o estado $v(t)$ pode ser (muito bem) previsto a partir do conhecimento de $v(s)$ para cada $s < t$.

Seja $\prec$ uma boa-ordem sobre o conjunto $E^{\mathbb{R}}$ de todos os cenários.

Prevendo o presente a partir do passado

Fixado um instante $t \in \mathbb{R}$, vamos mostrar como o estado $v(t)$ pode ser (muito bem) previsto a partir do conhecimento de $v(s)$ para cada $s < t$.

Seja $\prec$ uma boa-ordem sobre o conjunto $E^{\mathbb{R}}$ de todos os cenários.

Considere o conjunto

$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t\}.$$

Prevendo o presente a partir do passado

Fixado um instante $t \in \mathbb{R}$, vamos mostrar como o estado $v(t)$ pode ser (muito bem) previsto a partir do conhecimento de $v(s)$ para cada $s < t$.

Seja $\prec$ uma boa-ordem sobre o conjunto $E^{\mathbb{R}}$ de todos os cenários.

Considere o conjunto

$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t\}.$$

Este é um subconjunto não vazio de $E^{\mathbb{R}}$, logo possui um elemento mínimo c_t com respeito a $\prec$.

Prevendo o presente a partir do passado

Fixado um instante $t \in \mathbb{R}$, vamos mostrar como o estado $v(t)$ pode ser (muito bem) previsto a partir do conhecimento de $v(s)$ para cada $s < t$.

Seja $\prec$ uma boa-ordem sobre o conjunto $E^{\mathbb{R}}$ de todos os cenários.

Considere o conjunto

$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t\}.$$

Este é um subconjunto não vazio de $E^{\mathbb{R}}$, logo possui um elemento mínimo c_t com respeito a $\prec$.

Esse cenário c_t será o nosso palpite!

Prevendo o presente a partir do passado

Vamos mostrar que, para praticamente todo instante $t \in \mathbb{R}$, o método de previsão que acabamos de definir *adivinha corretamente o estado* $v(t)$.

Prevendo o presente a partir do passado

Vamos mostrar que, para praticamente todo instante $t \in \mathbb{R}$, o método de previsão que acabamos de definir *adivinha corretamente o estado* $v(t)$.

Mais precisamente:

Teorema

O conjunto $\{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável

Prevendo o presente a partir do passado

Vamos mostrar que, para praticamente todo instante $t \in \mathbb{R}$, o método de previsão que acabamos de definir *adivinha corretamente o estado* $v(t)$.

Mais precisamente:

Teorema

O conjunto $\{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero.

Prevendo o presente a partir do passado

Vamos mostrar que, para praticamente todo instante $t \in \mathbb{R}$, o método de previsão que acabamos de definir *adivinha corretamente o estado* $v(t)$.

Mais precisamente:

Teorema

O conjunto $\{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é *raro*.)

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não.

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.
Note que
$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_{n+1}\},$$

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.
Note que

$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_{n+1}\},$$

logo $c_{t_{n+1}} \preccurlyeq c_{t_n}$.

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.
Note que
$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_{n+1}\},$$
logo $c_{t_{n+1}} \preccurlyeq c_{t_n}$.
Ainda, como $t_{n+1} < t_n$, então $c_{t_n}(t_{n+1}) = v(t_{n+1}) \neq c_{t_{n+1}}(t_{n+1})$

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).

Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.

Note que

$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_{n+1}\},$$

logo $c_{t_{n+1}} \preccurlyeq c_{t_n}$.

Ainda, como $t_{n+1} < t_n$, então $c_{t_n}(t_{n+1}) = v(t_{n+1}) \neq c_{t_{n+1}}(t_{n+1})$; portanto, $c_{t_{n+1}} \prec c_{t_n}$.

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.
Note que

$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_{n+1}\},$$

logo $c_{t_{n+1}} \preccurlyeq c_{t_n}$.
Ainda, como $t_{n+1} < t_n$, então $c_{t_n}(t_{n+1}) = v(t_{n+1}) \neq c_{t_{n+1}}(t_{n+1})$; portanto, $c_{t_{n+1}} \prec c_{t_n}$.
Com isso, $c_{t_0} \succ c_{t_1} \succ c_{t_2} \succ \cdots$

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Vamos mostrar que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$).
Suponha, por absurdo, que não. Então é possível (fazendo sucessivos usos do Axioma da Escolha) escolher, em F, instantes $t_0 > t_1 > t_2 > \cdots$.
Note que
$$\{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_n\} \subseteq$$
$$\subseteq \{f \in E^{\mathbb{R}} : f(s) = v(s) \text{ para todo } s < t_{n+1}\},$$
logo $c_{t_{n+1}} \preccurlyeq c_{t_n}$.
Ainda, como $t_{n+1} < t_n$, então $c_{t_n}(t_{n+1}) = v(t_{n+1}) \neq c_{t_{n+1}}(t_{n+1})$; portanto, $c_{t_{n+1}} \prec c_{t_n}$.
Com isso, $c_{t_0} \succ c_{t_1} \succ c_{t_2} \succ \cdots$, contradizendo o fato de que $\prec$ é uma boa-ordem.

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Mostramos que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$)!

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Mostramos que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$)!
Mas então F é enumerável: basta tomar, para cada elemento de F, um número racional entre esse elemento e o *próximo* elemento de F (que sempre existe, lembra?)

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Mostramos que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$)!
Mas então F é enumerável: basta tomar, para cada elemento de F, um número racional entre esse elemento e o *próximo* elemento de F (que sempre existe, lembra?); com isso, construímos uma função injetora de F em $\mathbb{Q}$ (que é enumerável).

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Mostramos que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$)!
Mas então F é enumerável: basta tomar, para cada elemento de F, um número racional entre esse elemento e o *próximo* elemento de F (que sempre existe, lembra?); com isso, construímos uma função injetora de F em $\mathbb{Q}$ (que é enumerável).
Finalmente: sendo $F \subseteq \mathbb{R}$ bem-ordenado, o seu fecho também é bem-ordenado

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Mostramos que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$)!
Mas então F é enumerável: basta tomar, para cada elemento de F, um número racional entre esse elemento e o *próximo* elemento de F (que sempre existe, lembra?); com isso, construímos uma função injetora de F em $\mathbb{Q}$ (que é enumerável).
Finalmente: sendo $F \subseteq \mathbb{R}$ bem-ordenado, o seu fecho também é bem-ordenado, e portanto não pode conter nenhum intervalo aberto não vazio — porque um tal intervalo não possui elemento mínimo.

Prevendo o presente a partir do passado

Teorema

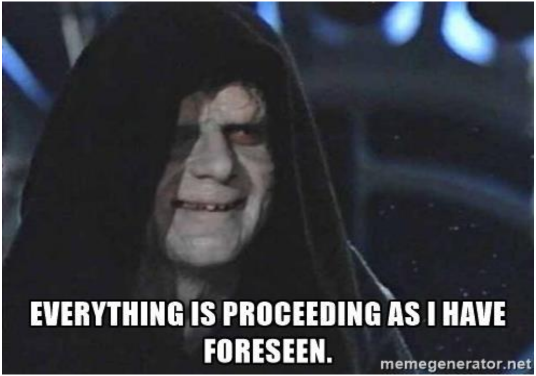
O conjunto $F = \{t \in \mathbb{R} : c_t(t) \neq v(t)\}$ é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Demonstração.

Mostramos que F é bem-ordenado (na ordem usual de $\mathbb{R}$)!
Mas então F é enumerável: basta tomar, para cada elemento de F, um número racional entre esse elemento e o *próximo* elemento de F (que sempre existe, lembra?); com isso, construímos uma função injetora de F em $\mathbb{Q}$ (que é enumerável).
Finalmente: sendo $F \subseteq \mathbb{R}$ bem-ordenado, o seu fecho também é bem-ordenado, e portanto não pode conter nenhum intervalo aberto não vazio — porque um tal intervalo não possui elemento mínimo.

\o/ \o/ \o/

Prevendo o presente a partir do passado



Prevendo o futuro a partir do passado

Mas e o futuro?

Prevendo o futuro a partir do passado

Mas e o futuro?

Com adaptações menores ao argumento anterior, é possível mostrar:

Teorema

O complementar (em $\mathbb{R}$) do conjunto

$$\{t \in \mathbb{R} : \text{existe } \varepsilon > 0 \ (c_t \text{ e } v \text{ coincidem em } [t, t+\varepsilon])\}$$

é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Prevendo o futuro a partir do passado

Mas e o futuro?

Com adaptações menores ao argumento anterior, é possível mostrar:

Teorema

O complementar (em $\mathbb{R}$) do conjunto

$$\{t \in \mathbb{R} : \text{existe } \varepsilon > 0 \ (c_t \text{ e } v \text{ coincidem em } [t, t+\varepsilon])\}$$

é enumerável — e, portanto, tem medida zero. (Mais ainda: esse conjunto também é raro.)

Referência

C. S. Hardin e A. D. Taylor, *A peculiar connection between the Axiom of Choice and predicting the future*, American Mathematical Monthly **115**:2 (2008), 91–96.

Obrigado!