Probabilidade Improvável

"Boy or Girl Problem"
(Casos de Família)

Érik Amorim

(ICMC - USP São Carlos)

03/05/2011

O Problema

Vamos resolver um clássico problema de probabilidade e também algumas variações legais. Com as respostas cada vez mais estranhas, ainda vamos chegar num paradoxo que torna mais difícil acreditar na solução!

O Problema

Vamos resolver um clássico problema de probabilidade e também algumas variações legais. Com as respostas cada vez mais estranhas, ainda vamos chegar num paradoxo que torna mais difícil acreditar na solução!

"*Boy or Girl Problem*": Não se sabe quando surgiu, mas foi popularizado por Martin Gardner em 1959. Também é conhecido pelos nomes "*Problema dos Dois Filhos*" e "*Mr. Smith's Children*".

O Problema

Vamos resolver um clássico problema de probabilidade e também algumas variações legais. Com as respostas cada vez mais estranhas, ainda vamos chegar num paradoxo que torna mais difícil acreditar na solução!
"*Boy or Girl Problem*": Não se sabe quando surgiu, mas foi popularizado por Martin Gardner em 1959. Também é conhecido pelos nomes "*Problema dos Dois Filhos*" e "*Mr. Smith's Children*".

Enunciado de Martin Gardner

Sr. *Smith* tem duas crianças. Ao menos uma delas é um menino. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninos?

Convenções

Antes de resolver o problema, precisamos adotar as convenções óbvias:

- Uma criança ou é um menino ou uma menina.
- A probabilidade de uma criança escolhida aleatoriamente ser de qualquer um dos sexos é $1/2$.
- Essa probabilidade é independente de qualquer outra característica da criança ou de seus irmãos.

Convenções

Antes de resolver o problema, precisamos adotar as convenções óbvias:

- Uma criança ou é um menino ou uma menina.
- A probabilidade de uma criança escolhida aleatoriamente ser de qualquer um dos sexos é $1/2$.
- Essa probabilidade é independente de qualquer outra característica da criança ou de seus irmãos.

Essas hipóteses não refletem a realidade, mas esse é um problema de probabilidade, e não um estudo demográfico. E as respostas inesperadas que vamos obter também não são causadas por esse detalhe.

Variação 1 - Nível Easy

Começamos com uma versão simples do problema:

Variação 1 - Nível Easy

Começamos com uma versão simples do problema:

Variação 1

Um pai tem duas crianças. A mais velha é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 1 - Nível Easy

Começamos com uma versão simples do problema:

Variação 1

Um pai tem duas crianças. A mais velha é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Solução: Ambas são meninas se e só se a mais nova também é menina. Com as hipóteses que fizemos, isso ocorre independentemente de sua irmã, com probabilidade de

Variação 1 - Nível Easy

Começamos com uma versão simples do problema:

Variação 1

Um pai tem duas crianças. A mais velha é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Solução: Ambas são meninas se e só se a mais nova também é menina. Com as hipóteses que fizemos, isso ocorre independentemente de sua irmã, com probabilidade de **50**%.

Variação 1 - Nível Easy

Começamos com uma versão simples do problema:

Variação 1

Um pai tem duas crianças. A mais velha é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Solução: Ambas são meninas se e só se a mais nova também é menina. Com as hipóteses que fizemos, isso ocorre independentemente de sua irmã, com probabilidade de **50**%.

Resposta: 50%

Variação 2 - Nível Normal

Agora uma versão equivalente ao enunciado de Martin Gardner:

Variação 2 - Nível Normal

Agora uma versão equivalente ao enunciado de Martin Gardner:

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 2 - Nível Normal

Agora uma versão equivalente ao enunciado de Martin Gardner:

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Obs.: Quando está escrito **uma delas é uma menina**, entenda-se **ao menos uma delas é uma menina**. A pegadinha do problema não é semântica, é matemática mesmo!

Comparando

Esse parece ser o mesmo problema do nível 1, mas existe uma diferença sutil:

Comparando

Esse parece ser o mesmo problema do nível 1, mas existe uma diferença sutil:

Variação 1

Um pai tem duas crianças. **A mais velha** é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. **Uma delas** é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Comparando

Esse parece ser o mesmo problema do nível 1, mas existe uma diferença sutil:

Variação 1

Um pai tem duas crianças. **A mais velha** é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. **Uma delas** é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Desta vez não dissemos qual criança era uma menina, mas sabemos que pelo menos uma delas é. Será que isso faz diferença?

Variação 2 - Solução

Espaço Amostral: Há duas crianças. Cada uma pode ser menino ou menina. Como nada de diferente entre as crianças foi mencionado (por exemplo, quem é mais velho ou mais pentelho), separamos as duas nós mesmos por algum critério. Nesse caso, "Criança 1" e "Criança 2". Temos 4 possíveis casos:

Variação 2 - Solução

Espaço Amostral: Há duas crianças. Cada uma pode ser menino ou menina. Como nada de diferente entre as crianças foi mencionado (por exemplo, quem é mais velho ou mais pentelho), separamos as duas nós mesmos por algum critério. Nesse caso, "Criança 1" e "Criança 2". Temos 4 possíveis casos:

Criança 1	Cirança 2
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{A}$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$

("$\mathcal{O}$" é menino, "$\mathcal{A}$" é menina)

Variação 2 - Solução

Antes de entrarmos com a hipótese de que ao menos uma é menina, vamos calcular as probabilidades de cada caso acontecer. Devido à independência entre as crianças, basta multiplicarmos as probabilidades relativas a cada uma. Como é tudo 50%, não vai ter muita graça...

Variação 2 - Solução

Antes de entrarmos com a hipótese de que ao menos uma é menina, vamos calcular as probabilidades de cada caso acontecer. Devido à independência entre as crianças, basta multiplicarmos as probabilidades relativas a cada uma. Como é tudo 50%, não vai ter muita graça...

Criança 1	Cirança 2	Probabilidade	Resultado
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$

Variação 2 - Solução

Agora a hipótese: sabemos que o último caso não ocorre, então ele é eliminado da conta. Sobram 3 casos possíveis, e queremos que ocorra apenas um deles (duas meninas), que está em vermelho.

Criança 1	Cirança 2	Probabilidade	Resultado
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$

Variação 2 - Solução

Agora a hipótese: sabemos que o último caso não ocorre, então ele é eliminado da conta. Sobram 3 casos possíveis, e queremos que ocorra apenas um deles (duas meninas), que está em vermelho.

Criança 1	Cirança 2	Probabilidade	Resultado
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$

Calculamos a resposta da mesma forma que a definição de probabilidade:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Casos Favoráveis}}{\text{Total de Casos}}$$

Variação 2 - Resposta

Criança 1	Cirança 2	Probabilidade	Resultado
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{A}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$(1/2) \cdot (1/2)$	$1/4$

Mas aqui, ao invés de tomarmos o **número** de casos favoráveis e do total de casos, tomamos suas **probabilidades**:

$$P(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \frac{1/4}{(1/4) + (1/4) + (1/4)} = \frac{1}{3} = 0.333...$$

Variação 2 - Resposta

Criança 1	Cirança 2	Probabilidade	Resultado
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}$	$(1/2)\cdot(1/2)$	$1/4$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{O}$	$(1/2)\cdot(1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{A}$	$(1/2)\cdot(1/2)$	$1/4$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	$(1/2)\cdot(1/2)$	$1/4$

Mas aqui, ao invés de tomarmos o **número** de casos favoráveis e do total de casos, tomamos suas **probabilidades**:

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/4}{(1/4)+(1/4)+(1/4)} = \frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Resposta: 33%

Enunciado Equivalente

Essa probabilidade parece estranha. Intuitivamente, a resposta deveria ser 50%.

Enunciado Equivalente

Essa probabilidade parece estranha. Intuitivamente, a resposta deveria ser 50%. Mas se ao invés do problema original

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. **Uma delas é uma menina**. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Enunciado Equivalente

Essa probabilidade parece estranha. Intuitivamente, a resposta deveria ser 50%. Mas se ao invés do problema original

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. **Uma delas é uma menina**. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

apresentarmos o seguinte enunciado equivalente

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças, e **não é verdade que ambas sejam meninos**. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Enunciado Equivalente

Essa probabilidade parece estranha. Intuitivamente, a resposta deveria ser 50%. Mas se ao invés do problema original

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. **Uma delas é uma menina**. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

apresentarmos o seguinte enunciado equivalente

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças, e **não é verdade que ambas sejam meninos**. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

a probabilidade de 33% parece aceitável!

Aplicação Prática!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm 2 crianças.

Aplicação Prática!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm 2 crianças. Peça para se retirarem aqueles que não tenham ao menos uma menina.

Aplicação Prática!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm 2 crianças. Peça para se retirarem aqueles que não tenham ao menos uma menina. Então peça para levantarem a mão aqueles que têm duas meninas.

Aplicação Prática!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm 2 crianças. Peça para se retirarem aqueles que não tenham ao menos uma menina. Então peça para levantarem a mão aqueles que têm duas meninas.

$1/3$ dos pais que ficaram no ginásio vão levantar a mão!

Variação 3 - Nível Hard

A ideia da próxima versão do problema foi proposta por Gary Foshee em 2010 na convenção *Gathering for Gardner*, que é realizada a cada 2 anos em homenagem a Martin Gardner.

Variação 3 - Nível Hard

A ideia da próxima versão do problema foi proposta por Gary Foshee em 2010 na convenção *Gathering for Gardner*, que é realizada a cada 2 anos em homenagem a Martin Gardner.

Variação 3 (Foshee)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina nascida num sábado. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 3 - Nível Hard

A ideia da próxima versão do problema foi proposta por Gary Foshee em 2010 na convenção *Gathering for Gardner*, que é realizada a cada 2 anos em homenagem a Martin Gardner.

Variação 3 (Foshee)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina nascida num sábado. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

A única diferença entre esse problema e a variação 2 é que também foi informado o dia da semana em que essa menina nasceu. Será que agora isso também faz diferença?

Mais Convenções

Antes da solução, precisamos de mais convenções:

- A semana tem 7 dias.
- Uma criança nasce em exatamente 1 desses dias, com probabilidade $1/7$ para cada dia.
- Essa probabilidade é independente de qualquer outra característica da criança ou de seus irmãos.

Mais Convenções

Antes da solução, precisamos de mais convenções:

- A semana tem 7 dias.
- Uma criança nasce em exatamente 1 desses dias, com probabilidade $1/7$ para cada dia.
- Essa probabilidade é independente de qualquer outra característica da criança ou de seus irmãos.

De novo, isso não é verdade, mas é mais que razoável, e torna as contas "fazíveis".

Variação 3 - Solução

Espaço Amostral: Há duas crianças. Cada uma pode ser menino ou menina, e pode ter nascido num sábado ou não. Note que a probabilidade de qualquer pessoa não ter nascido num sábado é $6/7$. Temos 16 possíveis casos:

Variação 3 - Solução

Espaço Amostral: Há duas crianças. Cada uma pode ser menino ou menina, e pode ter nascido num sábado ou não. Note que a probabilidade de qualquer pessoa não ter nascido num sábado é 6/7. Temos 16 possíveis casos:

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$				
$\mathcal{AN}$				
$\mathcal{OS}$				
$\mathcal{ON}$				

("$\mathcal{O}$" é menino, "$\mathcal{A}$" é menina, "$\mathcal{S}$" é "nascido num sábado", "$\mathcal{N}$" é "não nascido num sábado")

Variação 3 - Solução

Probabilidade de cada caso: devido à hipótese de independência, multiplicamos as probabilidades relativas a cada criança.

Variação 3 - Solução

Probabilidade de cada caso: devido à hipótese de independência, multiplicamos as probabilidades relativas a cada criança.

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$
$\mathcal{AS}$	$(1/2)(1/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(1/7)(1/2)(6/7)$
$\mathcal{AN}$	$(1/2)(6/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(6/7)(1/2)(6/7)$
$\mathcal{OS}$	$(1/2)(1/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(1/7)(1/2)(6/7)$
$\mathcal{ON}$	$(1/2)(6/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(6/7)(1/2)(6/7)$

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$	$(1/2)(1/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(1/7)(1/2)(6/7)$
$\mathcal{AN}$	$(1/2)(6/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(6/7)(1/2)(6/7)$
$\mathcal{OS}$	$(1/2)(1/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(1/7)(1/2)(6/7)$
$\mathcal{ON}$	$(1/2)(6/7)(1/2)(1/7)$	$(1/2)(6/7)(1/2)(6/7)$

Variação 3 - Solução

Então essas são as probabilidades para uma família de duas crianças quaisquer:

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$	$1/196$	$6/196$	$1/196$	$6/196$
$\mathcal{AN}$	$6/196$	$36/196$	$6/196$	$36/196$
$\mathcal{OS}$	$1/196$	$6/196$	$1/196$	$6/196$
$\mathcal{ON}$	$6/196$	$36/196$	$6/196$	$36/196$

Variação 3 - Solução

Agora vem a informação do problema: sabemos que ao menos um caso $\mathcal{AS}$ ocorre. Vamos eliminar da tabela os casos em que nem a linha nem a coluna são $\mathcal{AS}$. Depois pintamos de vermelho os casos favoráveis dos que sobraram: os que têm $\mathcal{A}$ na linha e na coluna.

Variação 3 - Solução

Agora vem a informação do problema: sabemos que ao menos um caso $\mathcal{AS}$ ocorre. Vamos eliminar da tabela os casos em que nem a linha nem a coluna são $\mathcal{AS}$. Depois pintamos de vermelho os casos favoráveis dos que sobraram: os que têm $\mathcal{A}$ na linha e na coluna.

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$	1/196	6/196	1/196	6/196
$\mathcal{AN}$	6/196	36/196	6/196	36/196
$\mathcal{OS}$	1/196	6/196	1/196	6/196
$\mathcal{ON}$	6/196	36/196	6/196	36/196

Variação 3 - Resposta

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$	1/196	6/196	1/196	6/196
$\mathcal{AN}$	6/196	36/196	6/196	36/196
$\mathcal{OS}$	1/196	6/196	1/196	6/196
$\mathcal{ON}$	6/196	36/196	6/196	36/196

E a probabilidade é calculada como antes:

Variação 3 - Resposta

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$	1/196	6/196	1/196	6/196
$\mathcal{AN}$	6/196	36/196	6/196	36/196
$\mathcal{OS}$	1/196	6/196	1/196	6/196
$\mathcal{ON}$	6/196	36/196	6/196	36/196

E a probabilidade é calculada como antes:

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/196}{1/196} \cdot \frac{1+6+6}{1+6+1+6+6+1+6} = \frac{13}{27} = 0.481481\ldots$$

Variação 3 - Resposta

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AS}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OS}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AS}$	$1/196$	$6/196$	$1/196$	$6/196$
$\mathcal{AN}$	$6/196$	$36/196$	$6/196$	$36/196$
$\mathcal{OS}$	$1/196$	$6/196$	$1/196$	$6/196$
$\mathcal{ON}$	$6/196$	$36/196$	$6/196$	$36/196$

E a probabilidade é calculada como antes:

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/196}{1/196} \cdot \frac{1+6+6}{1+6+1+6+6+1+6} = \frac{13}{27} = 0.481481\ldots$$

Resposta: 48%

Explicação

Dessa vez o problema parecia com a variação 2, que tinha resposta 33% (apesar da intuição dizer que deveria ter sido 50%). Mas a resposta deu 48%, muito mais próxima da variação 1...

Explicação

Dessa vez o problema parecia com a variação 2, que tinha resposta 33% (apesar da intuição dizer que deveria ter sido 50%). Mas a resposta deu 48%, muito mais próxima da variação 1...
Analisando as variações 2 e 3, vemos que a probabilidade da outra criança ser menina aumentou (bastante) só porque informamos o dia em que nasceu sua irmã.

Explicação

Dessa vez o problema parecia com a variação 2, que tinha resposta 33% (apesar da intuição dizer que deveria ter sido 50%). Mas a resposta deu 48%, muito mais próxima da variação 1...
Analisando as variações 2 e 3, vemos que a probabilidade da outra criança ser menina aumentou (bastante) só porque informamos o dia em que nasceu sua irmã.
Mas dá pra entender por quê: não é muito fácil uma família de 2 filhos ter ao menos um nascido num sábado. Mas esse é o caso do problema, e ele ocorre com uma criança que é menina.

Explicação

Dessa vez o problema parecia com a variação 2, que tinha resposta 33% (apesar da intuição dizer que deveria ter sido 50%). Mas a resposta deu 48%, muito mais próxima da variação 1...
Analisando as variações 2 e 3, vemos que a probabilidade da outra criança ser menina aumentou (bastante) só porque informamos o dia em que nasceu sua irmã.
Mas dá pra entender por quê: não é muito fácil uma família de 2 filhos ter ao menos um nascido num sábado. Mas esse é o caso do problema, e ele ocorre com uma criança que é menina. Se forem 2 meninas, qualquer uma pode ser essa criança. Se forem 1 menina e 1 menino, a criança em questão precisa ser essa menina.

Paradoxo!

Denote os dias da semana da seguinte forma:

- Domingo: 1-feira
- Segunda: 2-feira
- Terça: 3-feira
- Quarta: 4-feira
- Quinta: 5-feira
- Sexta: 6-feira
- Sábado: 7-feira

Paradoxo!

Denote os dias da semana da seguinte forma:

- Domingo: 1-feira
- Segunda: 2-feira
- Terça: 3-feira
- Quarta: 4-feira
- Quinta: 5-feira
- Sexta: 6-feira
- Sábado: 7-feira

O problema 3 informava que a menina nasceu na 7-feira. Mas sua resposta teria sido a mesma, 48%, se ela tivesse nascido em qualquer *i*-feira.

Paradoxo!

Denote os dias da semana da seguinte forma:

- Domingo: 1-feira
- Segunda: 2-feira
- Terça: 3-feira
- Quarta: 4-feira
- Quinta: 5-feira
- Sexta: 6-feira
- Sábado: 7-feira

O problema 3 informava que a menina nasceu na 7-feira. Mas sua resposta teria sido a mesma, 48%, se ela tivesse nascido em qualquer *i*-feira. Isso significa que podemos montar um "paradoxo"!

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

for $(i = 1; i \leq 7; i++)$ {
"Retire-se se você não tem ao menos uma menina nascida numa i-feira. Levante a mão se você tem duas meninas."

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

for ($i = 1; i \leq 7; i++$) {
"Retire-se se você não tem ao menos uma menina nascida numa i-feira. Levante a mão se você tem duas meninas." 48% dos que ficaram vão levantar a mão. (Agora quem tinha saído pode voltar)
}

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

for $(i = 1; i \leq 7; i++)$ {
"Retire-se se você não tem ao menos uma menina nascida numa i-feira. Levante a mão se você tem duas meninas." 48% dos que ficaram vão levantar a mão. (Agora quem tinha saído pode voltar)
}

"Retire-se se você não tem ao menos uma menina. Levante a mão se você tem duas meninas." 33% dos que ficaram vão levantar a mão.

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

for $(i = 1; i \leq 7; i++)$ {
"Retire-se se você não tem ao menos uma menina nascida numa i-feira. Levante a mão se você tem duas meninas." 48% dos que ficaram vão levantar a mão. (Agora quem tinha saído pode voltar)
}

"Retire-se se você não tem ao menos uma menina. Levante a mão se você tem duas meninas." 33% dos que ficaram vão levantar a mão.

Paradoxo? O segundo cenário parece ser a "soma" dos 7 casos do primeiro cenário, e assim sua probabilidade deveria ser a média, que é 48%.

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

for $(i = 1; i \leq 7; i++)$ {
"Retire-se se você não tem ao menos uma menina nascida numa i-feira. Levante a mão se você tem duas meninas." 48% dos que ficaram vão levantar a mão. (Agora quem tinha saído pode voltar)
}

"Retire-se se você não tem ao menos uma menina. Levante a mão se você tem duas meninas." 33% dos que ficaram vão levantar a mão.

Paradoxo? O segundo cenário parece ser a "soma" dos 7 casos do primeiro cenário, e assim sua probabilidade deveria ser a média, que é 48%. Você consegue explicar isso?

Paradoxo!

Reúna num ginásio todos os pais do mundo que têm duas crianças.

for $(i = 1; i \leq 7; i++)$ {
"Retire-se se você não tem ao menos uma menina nascida numa i-feira. Levante a mão se você tem duas meninas." 48% dos que ficaram vão levantar a mão. (Agora quem tinha saído pode voltar)
}

"Retire-se se você não tem ao menos uma menina. Levante a mão se você tem duas meninas." 33% dos que ficaram vão levantar a mão.

Paradoxo? O segundo cenário parece ser a "soma" dos 7 casos do primeiro cenário, e assim sua probabilidade deveria ser a média, que é 48%. Você consegue explicar isso? **(Exercício)**

Outro Paradoxo!

Compare os problemas 2 e 3:

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 33%

Variação 3 (Foshee) (i está fixo)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina nascida numa i-feira. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 48%

Outro Paradoxo!

Compare os problemas 2 e 3:

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 33%

Variação 3 (Foshee) (*i* está fixo)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina nascida numa *i*-feira. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 48%

No problema 2, sabemos que essa menina tem que ter nascido em alguma *i*-feira.

Outro Paradoxo!

Compare os problemas 2 e 3:

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 33%

Variação 3 (Foshee) (i está fixo)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina nascida numa i-feira. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 48%

No problema 2, sabemos que essa menina tem que ter nascido em alguma i-feira. E sabemos que, se o problema tivesse informado essa i-feira, qualquer que fosse, ele se tornaria o problema 3 e teria a resposta 48%.

Outro Paradoxo!

Compare os problemas 2 e 3:

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 33%

Variação 3 (Foshee) (i está fixo)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina nascida numa i-feira. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas? 48%

No problema 2, sabemos que essa menina tem que ter nascido em alguma i-feira. E sabemos que, se o problema tivesse informado essa i-feira, qualquer que fosse, ele se tornaria o problema 3 e teria a resposta 48%. Então não podemos simplesmente assumir que essa i-feira foi dada e obter a resposta 48%??

Outro Paradoxo?

Não! Sabemos que ela nasceu em alguma i-feira, mas sem saber exatamente qual foi não podemos usar essa informação! Mesmo a probabilidade sendo igual para todas as i-feiras!

Outro Paradoxo?

Não! Sabemos que ela nasceu em alguma *i*-feira, mas sem saber exatamente qual foi não podemos usar essa informação! Mesmo a probabilidade sendo igual para todas as *i*-feiras! Afinal, a probabilidade dela ter nascido, por exemplo, num sábado é $1/7$, mas a probabilidade dela ter nascido em alguma *i*-feira é $1 \neq 1/7$.

Outro Paradoxo?

Não! Sabemos que ela nasceu em alguma *i*-feira, mas sem saber exatamente qual foi não podemos usar essa informação! Mesmo a probabilidade sendo igual para todas as *i*-feiras! Afinal, a probabilidade dela ter nascido, por exemplo, num sábado é $1/7$, mas a probabilidade dela ter nascido em alguma *i*-feira é $1 \neq 1/7$.

Quando você leu o problema 2, não se perguntou se não podíamos ter assumido que o *mês em que nasceu essa menina* também tenha sido dado, por exemplo.

Outro Paradoxo?

Não! Sabemos que ela nasceu em alguma *i*-feira, mas sem saber exatamente qual foi não podemos usar essa informação! Mesmo a probabilidade sendo igual para todas as *i*-feiras! Afinal, a probabilidade dela ter nascido, por exemplo, num sábado é $1/7$, mas a probabilidade dela ter nascido em alguma *i*-feira é $1 \neq 1/7$.

Quando você leu o problema 2, não se perguntou se não podíamos ter assumido que o *mês em que nasceu essa menina* também tenha sido dado, por exemplo. Porque cada mês tem a probabilidade $1/12$, e isso afetaria a resposta da mesma forma.

Variação 4 - Nível Expert

Suponha que exista uma característica P que ocorre com probabilidade p para uma pessoa aleatória ($0 < p \leq 1$). Devemos assumir as hipóteses já conhecidas, por exemplo, P ou ocorre (prob. p) ou não ocorre (prob. $1 - p$), e é independente do sexo.

Variação 4 - Nível Expert

Suponha que exista uma característica P que ocorre com probabilidade p para uma pessoa aleatória ($0 < p \leq 1$). Devemos assumir as hipóteses já conhecidas, por exemplo, P ou ocorre (prob. p) ou não ocorre (prob. $1 - p$), e é independente do sexo. Agora, ao invés do *dia da semana*, vamos enunciar o problema em função de P.

Variação 4 - Nível Expert

Suponha que exista uma característica P que ocorre com probabilidade p para uma pessoa aleatória ($0 < p \leq 1$). Devemos assumir as hipóteses já conhecidas, por exemplo, P ou ocorre (prob. p) ou não ocorre (prob. $1 - p$), e é independente do sexo. Agora, ao invés do *dia da semana*, vamos enunciar o problema em função de P.

Variação 4

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina para a qual ocorre P. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 4 - Nível Expert

Suponha que exista uma característica P que ocorre com probabilidade p para uma pessoa aleatória ($0 < p \leq 1$). Devemos assumir as hipóteses já conhecidas, por exemplo, P ou ocorre (prob. p) ou não ocorre (prob. $1 - p$), e é independente do sexo. Agora, ao invés do *dia da semana*, vamos enunciar o problema em função de P.

Variação 4

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina para a qual ocorre P. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Esse é o mesmo problema que antes. A única diferença é que as contas vão ter um p ao invés de só frações.

Variação 4 - Solução

Probabilidades de cada caso:

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AP}$	$\mathcal{AN}$
$\mathcal{AP}$	$(1/2)p(1/2)p$	$(1/2)p(1/2)(1-p)$
$\mathcal{AN}$	$(1/2)(1-p)(1/2)p$	$(1/2)(1-p)(1/2)(1-p)$
$\mathcal{OP}$	$(1/2)p(1/2)p$	$(1/2)p(1/2)(1-p)$
$\mathcal{ON}$	$(1/2)(1-p)(1/2)p$	$(1/2)(1-p)(1/2)(1-p)$

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{OP}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AP}$	$(1/2)p(1/2)p$	$(1/2)p(1/2)(1-p)$
$\mathcal{AN}$	$(1/2)(1-p)(1/2)p$	$(1/2)(1-p)(1/2)(1-p)$
$\mathcal{OP}$	$(1/2)p(1/2)p$	$(1/2)p(1/2)(1-p)$
$\mathcal{ON}$	$(1/2)(1-p)(1/2)p$	$(1/2)(1-p)(1/2)(1-p)$

("$\mathcal{O}$" é menino, "$\mathcal{A}$" é menina, "$\mathcal{P}$" é "P", "$\mathcal{N}$" é "não P")

Variação 4 - Solução

Resultados:

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AP}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OP}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AP}$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$
$\mathcal{AN}$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$
$\mathcal{OP}$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$
$\mathcal{ON}$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$

Variação 4 - Solução

Eliminando os 9 casos que não ocorrem, destacando os 3 que queremos:

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AP}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OP}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AP}$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$
$\mathcal{AN}$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$
$\mathcal{OP}$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$
$\mathcal{ON}$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$

Variação 4 - Solução

Eliminando os 9 casos que não ocorrem, destacando os 3 que queremos:

$\frac{\text{Criança2}}{\text{Criança1}}$	$\mathcal{AP}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{OP}$	$\mathcal{ON}$
$\mathcal{AP}$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$
$\mathcal{AN}$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$
$\mathcal{OP}$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$	$p^2/4$	$p(1-p)/4$
$\mathcal{ON}$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$	$p(1-p)/4$	$(1-p)^2/4$

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/4}{1/4} \cdot \frac{p^2 + 2p(1-p)}{3p^2 + 4p(1-p)}$$

Variação 4 - Resposta

$$P(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \frac{1/4}{1/4} \cdot \frac{p^2 + 2p(1-p)}{3p^2 + 4p(1-p)} =$$

Variação 4 - Resposta

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/4}{1/4} \cdot \frac{p^2 + 2p(1-p)}{3p^2 + 4p(1-p)} = \frac{p^2 + 2p - 2p^2}{3p^2 + 4p - 4p^2} =$$

Variação 4 - Resposta

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/4}{1/4} \cdot \frac{p^2 + 2p(1-p)}{3p^2 + 4p(1-p)} = \frac{p^2 + 2p - 2p^2}{3p^2 + 4p - 4p^2} =$$

$$= \frac{2p - p^2}{4p - p^4} =$$

Variação 4 - Resposta

$$P(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \frac{1/4}{1/4} \cdot \frac{p^2 + 2p(1-p)}{3p^2 + 4p(1-p)} = \frac{p^2 + 2p - 2p^2}{3p^2 + 4p - 4p^2} =$$

$$= \frac{2p - p^2}{4p - p^4} = \frac{2-p}{4-p}$$

Resposta: $\mathbf{\frac{2-p}{4-p}}$

Análise

$$\textbf{Resposta: } \frac{2-p}{4-p}$$

Análise

Resposta: $\mathbf{\dfrac{2-p}{4-p}}$

Colocando $p = 1/7$, recuperamos a resposta do problema 3:

$$\frac{2-(1/7)}{4-(1/7)} = \frac{13/7}{27/7} = \frac{13}{27}$$

Análise

Resposta: $\mathbf{\dfrac{2-p}{4-p}}$

Colocando $p = 1/7$, recuperamos a resposta do problema 3:

$$\frac{2-(1/7)}{4-(1/7)} = \frac{13/7}{27/7} = \frac{13}{27}$$

Colocando $p = 1$, recuperamos a resposta do problema 2 (onde nenhuma restrição foi colocada sobre a menina, e portanto ocorre com ela algo de probabilidade 1):

$$\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Análise

Resposta: $\mathbf{\dfrac{2-p}{4-p}}$

Colocando $p = 0$, recuperamos a resposta intuitiva desses problemas:

$$\frac{2-0}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $\mathbf{\dfrac{2-p}{4-p}}$

Colocando $p = 0$, recuperamos a resposta intuitiva desses problemas:

$$\frac{2-0}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Na verdade, p foi definido em $(0, 1]$, então deveríamos escrever

$$\lim_{p \to 0^+} \frac{2-p}{4-p} = \frac{1}{2}$$

Análise

Uma análise do gráfico de

$$f(p) = \frac{2-p}{4-p}$$

mostra que a função vale $1/2$ em $p = 0$ e decresce até chegar a $1/3$ em $p = 1$.

Análise

Uma análise do gráfico de

$$f(p) = \frac{2-p}{4-p}$$

mostra que a função vale $1/2$ em $p = 0$ e decresce até chegar a $1/3$ em $p = 1$.
Isso significa que, quanto mais restrições colocarmos sobre essa menina (ou seja, p pequeno), mais próxima de 50% é a resposta do problema.

Análise

Uma análise do gráfico de

$$f(p) = \frac{2-p}{4-p}$$

mostra que a função vale $1/2$ em $p = 0$ e decresce até chegar a $1/3$ em $p = 1$.

Isso significa que, quanto mais restrições colocarmos sobre essa menina (ou seja, p pequeno), mais próxima de 50% é a resposta do problema.

Mas ela também nunca chega a 50%, ou seja, é sempre mais provável que a outra criança seja um menino.

Exemplo

Com base nisso, montamos nossa última variação do problema, e é fácil dar a resposta sem fazer contas!

Exemplo

Com base nisso, montamos nossa última variação do problema, e é fácil dar a resposta sem fazer contas!

Variação 5 (Érik)

Um pai tem duas crianças.

Exemplo

Com base nisso, montamos nossa última variação do problema, e é fácil dar a resposta sem fazer contas!

Variação 5 (Érik)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina ruiva, nascida numa terça-feira de julho, que joga cricket, toca xilofone e fala polonês.

Exemplo

Com base nisso, montamos nossa última variação do problema, e é fácil dar a resposta sem fazer contas!

Variação 5 (Érik)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina ruiva, nascida numa terça-feira de julho, que joga cricket, toca xilofone e fala polonês. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Exemplo

Com base nisso, montamos nossa última variação do problema, e é fácil dar a resposta sem fazer contas!

Variação 5 (Érik)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina ruiva, nascida numa terça-feira de julho, que joga cricket, toca xilofone e fala polonês. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Resposta: $(\mathbf{50} - \varepsilon)\%$ (onde $\varepsilon > 0$ é bem pequeno!)

Apêndice

Não mencionamos isso, mas existem controvérsias sobre a verdadeira resposta do problema 2.

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Apêndice

Não mencionamos isso, mas existem controvérsias sobre a verdadeira resposta do problema 2.

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Alguns matemáticos acham o enunciado ambíguo. Ele dá margem para ambas as respostas $1/2$ e $1/3$, e tudo depende de como essa informação de que "há ao menos uma menina" chegou até você.

Apêndice

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

- Se esse pai foi escolhido justamente porque ele tinha ao menos uma menina, a resposta é $1/3$.

Variação 2 (Gardner)

Um pai tem duas crianças. Uma delas é uma menina. Qual a probabilidade de que ambas sejam meninas?

- Se esse pai foi escolhido justamente porque ele tinha ao menos uma menina, a resposta é $1/3$.
- Se esse pai foi escolhido aleatoriamente dentre aqueles que têm duas crianças, e uma das crianças foi escolhida aleatoriamente, e por acaso era uma menina, a probabilidade de serem duas meninas é $1/2$.

Explicação

Reúna aqueles pais naquele ginásio de novo. Diga que cada um deles deve falar uma afirmação verdadeira do tipo "eu tenho pelo menos 1 menino(a)".

Explicação

Reúna aqueles pais naquele ginásio de novo. Diga que cada um deles deve falar uma afirmação verdadeira do tipo "eu tenho pelo menos 1 menino(a)".

Se um pai tem duas meninas, ele vai dizer que tem ao menos uma menina. Se são dois meninos, vai dizer que tem ao menos um menino.

Explicação

Reúna aqueles pais naquele ginásio de novo. Diga que cada um deles deve falar uma afirmação verdadeira do tipo "eu tenho pelo menos 1 menino(a)".

Se um pai tem duas meninas, ele vai dizer que tem ao menos uma menina. Se são dois meninos, vai dizer que tem ao menos um menino.

Se um pai tem um menino e uma menina, o que ele vai dizer?

Explicação

Reúna aqueles pais naquele ginásio de novo. Diga que cada um deles deve falar uma afirmação verdadeira do tipo "eu tenho pelo menos 1 menino(a)".

Se um pai tem duas meninas, ele vai dizer que tem ao menos uma menina. Se são dois meninos, vai dizer que tem ao menos um menino.

Se um pai tem um menino e uma menina, o que ele vai dizer? Para que o problema não seja indeterminado, podemos assumir que ele escolhe mencionar a menina ou o menino com probabilidade $1/2$ para cada um.

Explicação

- 25% dos pais têm 2 meninas e vão dizer que têm ao menos 1 menina.
- 25% dos pais têm 2 meninos e vão dizer que têm ao menos 1 menino.
- 25% dos pais têm 1 menina e 1 menino e vão dizer que têm ao menos 1 menina.
- 25% dos pais têm 1 menina e 1 menino e vão dizer que têm ao menos 1 menino.

Explicação

- 25% dos pais têm 2 meninas e vão dizer que têm ao menos 1 menina.
- 25% dos pais têm 2 meninos e vão dizer que têm ao menos 1 menino.
- 25% dos pais têm 1 menina e 1 menino e vão dizer que têm ao menos 1 menina.
- 25% dos pais têm 1 menina e 1 menino e vão dizer que têm ao menos 1 menino.

E a resposta do nosso problema agora é 50%!

Referências

Referências:

- *Wikipedia*: http://en.wikipedia.org/wiki/Boy_or_Girl_paradox
- *Sciencenews*: http://sciencenews.org/view/generic/id/60598/
- *Mathpages*: http://www.mathpages.com/home/kmath036.htm