# Problemas matemáticos

Sabrina Teodoro Alberto da Silva[1]

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo (USP)

23 de junho de 2023

[1] sabrinateodoro@usp.br

*"Quem de nós não ficaria feliz em levantar o véu atrás do qual o futuro se esconde: lançar um olhar sobre os próximos avanços de nossa ciência e os segredos de seu desenvolvimento durante os séculos futuros? Quais serão os objetivos específicos pelos quais os principais espíritos matemáticos das gerações vindouras se empenharão? Que novos métodos e novos fatos no amplo e rico campo do pensamento matemático os novos séculos revelarão?"*

David Hilbert

# Introdução

Provavelmente a mais importante e famosa palestra matemática de todos os tempos.

- Status de Hilbert.
- Negação do *"Ignoramus et ignorabimus"*.
- Problemas bem escolhidos.

# David Hilbert

⋆ 21/01/1862 † 14/02/1943

- Teoria dos invariantes
- Cálculo em variedades
- Álgebra comutativa
- Teoria algébrica dos números
- Fundamentos da geometria
- Teoria espectral de operadores e suas aplicações em equações integrais
- Física matemática
- Teoria da prova

# David Hilbert

★ 21/01/1862 † 14/02/1943

Universidade de Königsberg (1880–1895)

Universidade de Göttingen (1895–1943)

## *Ignoramus et ignorabimus*
(Não sabemos nem saberemos)

Representa a ideia de que o conhecimento científico é limitado.

Emil du Bois-Reymond (1872).

Para Hilbert, não existe *ignorabimus* na Matemática.
*"Wir müssen wissen. Wir werden wissen."* (Devemos saber. Saberemos.)

# *Ignoramus et ignorabimus*

(Não sabemos nem saberemos)

*"Um problema matemático deve ser difícil, de modo a nos seduzir, mas não completamente inacessível, ou zombaria de nossos esforços. Deve ser para nós um guia nos caminhos intrincados que levam às verdades ocultas e, em última análise, um lembrete do nosso prazer em uma solução bem-sucedida".*

David Hilbert

# Como estamos hoje?

1. Problema de Cantor sobre a cardinalidade do Continuum

2. A compatibilidade dos Axiomas da Aritmética

3. A igualdade do volume de dois tetraedros de bases e alturas iguais

4. A linha reta como a menor distância entre dois pontos

5. O conceito de Lie de um grupo de transformações contínuas sem a suposição de diferenciabilidade das funções que definem o grupo

6. Tratamento matemático dos Axiomas da Física

7. Irracionalidade e transcendência de certos números

8. Problemas de números primos

9. Prova da Lei da Reciprocidade mais geral em qualquer corpo

10. Determinação da resolubilidade de uma Equação Diofantina

11. Formas quadráticas com coeficientes algébricos

12. Extensão do Teorema de Kronecker sobre corpos abelianos para qualquer extensão algébrica dos racionais

13. Impossibilidade da solução da equação geral do 7º grau por meio de funções de apenas duas variáveis

14. Prova da finitude de certos sistemas completos de funções

15. Fundamentação rigorosa do Cálculo Enumerativo de Schubert

16. Topologia de curvas e superfícies algébricas

17. Expressão de formas definidas por quadrados

18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes

19. As soluções de problemas regulares no Cálculo Variacional são sempre necessariamente analíticas?

20. O problema geral dos valores limite

21. Prova da existência de Equações Diferenciais Lineares tendo um grupo monodrômico prescrito

22. Uniformização das relações analíticas por meio de funções automórficas

23. Maior desenvolvimento dos métodos do Cálculo Variacional

# Meus problemas favoritos

## 1. Problema de Cantor sobre a cardinalidade do Continuum

A cardinalidade de um conjunto infinito é igual ou à dos inteiros ou à dos reais, portanto, existem apenas duas cardinalidades infinitas: contável e continuum.

Resolvido por Kurt Gödel (1940) e Paul Cohen (1963) no (inesperado) sentido de que a hipótese do continuum é independente de ZFC.

- Gödel mostrou que a *negação* da Hipótese do Continuum não poderia ser provada a partir de ZFC.
- Cohen demonstrou que a Hipótese do Continuum não poderia ser provada a partir de ZFC (*forcing*).

Gödel e Cohen também mostraram que o axioma da escolha é independente de ZF.

### 2. A compatibilidade dos Axiomas da Aritmética

Provar que os axiomas da aritmética não são contraditórios, ou seja, que um número finito de passos lógicos baseados neles nunca pode levar a resultados contraditórios.

### Segundo Teorema da Incompletude de Gödel (1931)

Um sistema consistente que expresse verdades básicas da aritmética não pode provar a própria consistência.

O teorema não exclui uma prova meta-matemática: Gerhard Gentzen provou a consistência da aritmética em 1936 (análise de ordinais).

Não há consenso se (ou como) os resultados de Gödel e Gentzen fornecem uma solução satisfatória.

### 10. Determinação da resolubilidade de uma Equação Diofantina

Conceber um processo que determine, em finitas operações, se uma equação diofantina tem solução nos inteiros.

Exemplo: $3x^2 - 2xy - y^2z - 7 = 0$ tem uma solução inteira $x = 1, y = 2, z = -2$, enquanto $x^2 + y^2 + 1 = 0$ não uma tal solução.

**10. Determinação da resolubilidade de uma Equação Diofantina**

Conceber um processo que determine, em finitas operações, se uma equação diofantina tem solução nos inteiros.

- 1944: Emil Leon Post declara que o problema *"implora por uma prova de insolubilidade"*.
- 1949: Martin Davis
- 1950: Julia Robinson (independente)
- 1959: Davis, Hilary Putnan
- 1960: Robinson
- 1961–1969: Davis, Putnam, Robinson, Yuri Matiyasevich
- 1970: Matiyasevich completa a prova de que não existe um tal algoritmo (teorema de Matiyasevich ou teorema MRDP).

# Julia Bowman Robinson

⋆ 08/12/1919 † 30/07/1985

PhD na Universidade da California, em Berkely, orientada por Alfred Tarski.

Desde 1948, dedicou a maior parte de sua carreira ao décimo problema de Hilbert.O trabalho de Matiyasevich foi fortemente baseado nas ideias de Robinson, que estava muito próxima de resolver o problema.

Até 1975, teve apenas a posição de palestrante em Berkeley.

Teoria dos jogos (Soma-zero) na RAND Corporation.
Primeira a usar "problema do caixeiro viajante".

# Meus problemas favoritos

Existência de uma Equação Diofantina Universal.

Variantes do problema:

- e.d. quadráticas: solúvel;
- e.d. cúbicas: em aberto;
- e.d. de grau 4: insolúvel;
- e.d. de 2 a 8 incógnitas: em aberto;
- e.d. de 9 ou mais incógnitas: insolúvel.

## 18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes

(a) Existe apenas um número finito de grupos espaciais essencialmente diferentes no espaço euclidiano $n$-dimensional?

Resolvido afirmativamente por Ludwig Bieberbach (1910).

Número de grupos espaciais $n$-dimensionais:

- $n = 2$: 17;
- $n = 3$: 230;
- $n = 4$: 4894;
- $n = 5$: 222097;
- $n \geq 6$: desconhecido.

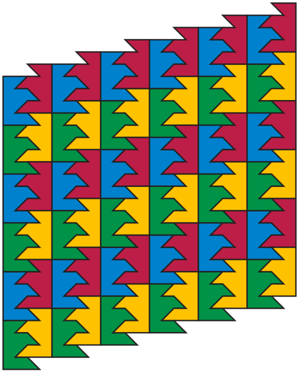
## 18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes

(b) Existe um poliedro que ladrilha o espaço tridimensional de forma anisoédrica?

- 1928: Karl Reinhardt encontra um tal poliedro.
- 1935: Heinrich Heesch encontra um ladrilhamento anisoédrico no espaço bidimensional.

## 18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes

(b) Existe um poliedro que ladrilha o espaço tridimensional de forma anisoédrica?



**18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes**

(c) Qual o empacotamento mais denso de esferas congruentes?

- Kepler (1611): empacotamentos cúbico de faces centradas e hexagonal fechado (densidade $74,05\%$).

## 18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes

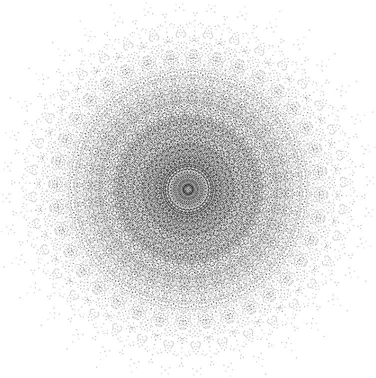
(c) Qual o empacotamento mais denso de esferas congruentes?

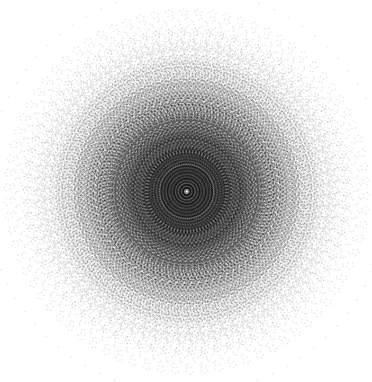
**18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes**

(c) Qual o empacotamento mais denso de esferas congruentes?

- Kepler (1611): empacotamentos cúbico de faces centradas e hexagonal fechado (densidade $74,05\%$).
- Thomas Hales (1998): checagem computacional de cerca de 5000 casos.
- Projeto Flyspeck (2014): prova formal usando Isabelle e HOL Light.

- dim. 24: conjectura-se que o reticulado de Leech é o empacotamento mais denso;





# Meus problemas favoritos

- dim. 24: conjectura-se que o reticulado de Leech é o empacotamento mais denso;
- dim. 1 a 8: empacotamento regular mais denso é conhecido;
- dim 10, 11 e 13: existem empacotamentos mais densos do que qualquer empacotamento regular.

# Problemas em aberto

## 8. Problemas de números primos ou Hipótese de Riemann

Provar que todos os zeros não triviais da função

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

têm parte real $\frac{1}{2}$.

Sabe-se que mais de 40% dos zeros satisfazem a hipótese de Riemann.

- Conjectura de Goldbach.
- Conjectura dos Primos Gêmeos.

# Problemas em aberto

**12. Extensão do Teorema de Kronecker sobre corpos abelianos para qualquer extensão algébrica dos racionais**

Estender o teorema de Kronecker para o caso em que, no lugar dos racionais ou do corpo quadrático complexo, qualquer corpo algébrico seja estabelecido como extensão dos racionais.

Samit Dasgupta e Mahesh Kakde (2021): corpos $p$-ádicos.

## 16. Topologia de curvas e superfícies algébricas

- Investigar as posições relativas dos ramos de curvas (e superfícies) algébricas reais de grau $n$.
- Determinar o limitante superior para o número de ciclos limite em campos vetoriais polinomiais bidimensionais de grau $n$ e investigar suas posições relativas.

Primeira parte: permanece sem solução para $n \geq 8$.

Segunda parte: Yulii Ilyashenko e Jean Écalle (1991/1992) mostraram que todo campo vetorial polinomial no plano tem apenas finitos ciclos limite. Mas nenhum limite superior é conhecido para $n > 1$.

# O vigésimo quarto problema

Originalmente, Hilbert listou 24 problemas, mas acabou decidindo não propor um deles:

*"The 24th problem in my Paris lecture was to be: Criteria of simplicity, or proof of the greatest simplicity of certain proofs. Develop a theory of the method of proof in mathematics in general. Under a given set of conditions there can be but one simplest proof. Quite generally, if there are two proofs for a theorem, you must keep going until you have derived each from the other, or until it becomes quite evident what variant conditions (and aids) have been used in the two proofs. Given two routes, it is not right to take either of these two or to look for a third; it is necessary to investigate the area lying between the two routes."*

# O vigésimo quarto problema

- 2000: Rüdiger Thiele descobre o problema nos manuscritos de Hilbert.
- 2002: Thiele e Larry Wos publicam um artigo[22] relacionando o problema com questões de raciocínio automatizado e lógica.

# Outros “problemas matemáticos”

Conjecturas de Weil (1949)

Paul Erdös

Problemas de Smale (1998)

Agência de Projetos de Pesquisa Avançada de Defesa - DARPA (2000)

Problemas do prêmio Millenium (2000)

# Problemas do prêmio Millenium

- Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer
- Conjectura de Hodge
- Existência e suavidade de Navier–Stokes
- P versus NP
- Hipótese de Riemann
- Existência de Yang–Mills existence e intervalo de massa
- Conjectura de Poincaré (resolvido por Grigori Perelman em 2010)

*“Se eu acordasse depois de ter dormido por mil anos, minha primeira pergunta seria: a hipótese de Riemann foi provada?”*

David Hilbert

[1] Mira-Cristiana Anisiu. "Julia Robinson and Hilbert's Tenth Problem". Em: *Didactica Mathematica* 34 (2016).

[2] *Anisohedral tiling*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Anisohedral_tiling&oldid=1024613108 (acesso em 06/2023).

[3] *Continuum hypothesis*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis (acesso em 06/2023).

[4] Samit Dasgupta e Mahesh Kakde. "Brumer-Stark Units and Hilbert's 12th Problem". Em: (2021). arXiv: 2103.02516.

[5] *David Hilbert*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=David_Hilbert&oldid=1159149090 (acesso em 06/2023).

[6] Solomon Feferman. "Julia Bowman Robinson 1919-1985". Em: *Biographical Memoirs* 63 (1994).

[7] Ivor Grattan-Guinness. “A Sideways Look at Hilbert’s Twenty-three Problems of 1900”. Em: *Notices of the American Mathematical Society* 47 (2000).

[8] Michiel Hazewinkel. “Hilbert’s 1990 ICM Lecture: the 23 problems”. Em: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (1990).

[9] David Hilbert. “Mathematical problems”. Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* 8.10 (1902), pp. 437–479.

[10] *Hilbert’s problems*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hilbert%27s_problems&oldid=1147108403 (acesso em 06/2023).

[11] *Hilbert’s Problems: 23 and Math*. 2020. URL: https://www.simonsfoundation.org/2020/05/06/hilberts-problems-23-and-math/ (acesso em 06/2023).

[12] *Hilbert’s second problem*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_second_problem (acesso em 06/2023).

[13] *Hilbert's tenth problem*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hilbert%27s_tenth_problem&oldid=1139372218 (acesso em 06/2023).

[14] *Hilbert's twenty-fourth problem — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hilbert%27s_twenty-fourth_problem&oldid=1156825079 (acesso em 06/2023).

[15] Kelsey Houston-Edwards. *Mathematicians Find Long-Sought Building Blocks for Special Polynomials*. URL: https://www.quantamagazine.org/mathematicians-find-polynomial-building-blocks-hilbert-sought-20210525/ (acesso em 06/2023).

[16] *Kepler conjecture*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kepler_conjecture&oldid=1157476263 (acesso em 06/2023).

[17] Jaume Llibre. "Sobre el problema 16 de Hilbert". Em: *La Gaceta de la RSME* 18.3 (2015), pp. 542–554.

[18] Thanases Pheidas. "Extensions of Hilbert's Tenth Problem". Em: *The Journal of Symbolic Logic* 59.2 (1994), pp. 372–397.

[19] *Riemann hypothesis*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Riemann_hypothesis&oldid=1160855033 (acesso em 06/2023).

[20] Harald Sack. *David Hilbert's 23 Fundamental Problems*. 2019. URL: http://scihi.org/david-hilbert-problems/ (acesso em 06/2023).

[21] Marcus du Sautoy. *A Música dos Números Primos: A história de um problema não resolvido na matemática*. Zahar, 2007. ISBN: 9788537802281.

[22] Rüdiger Thiele e Larry Wos. "Hilbert's Twenty-Fourth Problem". Em: *Journal of Automated Reasoning* 29 (2002), pp. 67–89. DOI: 10.1023/A:1020537107897.

[23] *What are Space Groups?* URL: https://msestudent.com/what-are-space-groups-simple-explanation (acesso em 06/2023).

# Muito obrigada!

Agradeço especialmente à minha orientadora Marina Andretta. Se não fosse por ela, eu não estaria aqui hoje.