A regra é clara. Mas e a estratégia?

Seminário de Coisas Legais

26 de Abril de 2018

O Duelo

Hoje, convidaremos dois grandes duelistas matemáticos para disputarem uma partida do Jogo Malha.

O Duelo

Hoje, convidaremos dois grandes duelistas matemáticos para disputarem uma partida do Jogo Malha. Com vocês, apresento Nicolau Tartaglia e Girolamo Cardano:

O Jogo Malha

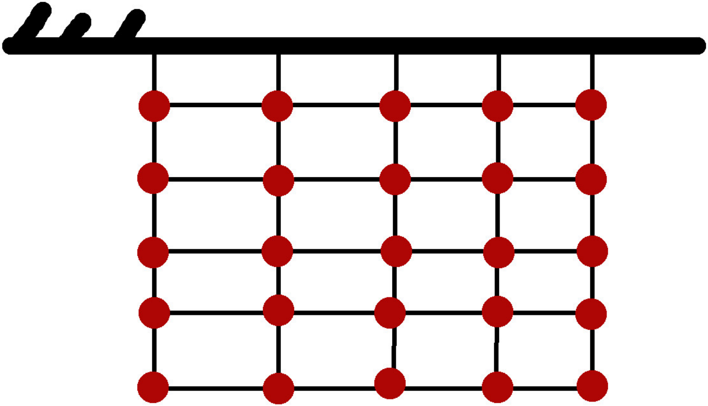


Figura: Regra: Tartaglia e Cardano devem se alternar no corte das linhas que prendem os círculos vermelhos ao teto. O responsável pelo primeiro corte que deixar cair algum desses círculos perde o jogo.

Exemplo:

Vamos fazer um exemplo do jogo Malha com um número reduzido de círculos. No caso abaixo, Cardano começa jogando e ganha ao fazer apenas um movimento:

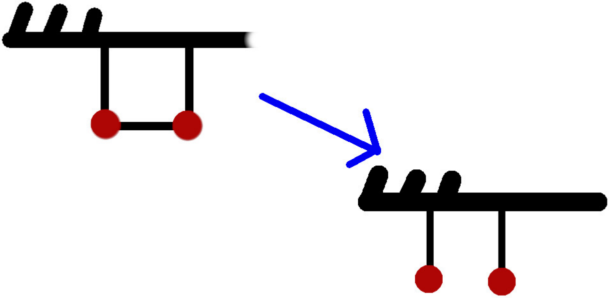


Figura: Cardano vence porque qualquer corte que Tartaglia fizer derrubará um círculo.

Perguntas que não querem calar:

Algum dos matemáticos pode bolar uma estratégia eficaz para ganhar esse jogo?

Perguntas que não querem calar:

Algum dos matemáticos pode bolar uma estratégia eficaz para ganhar esse jogo? Mais ainda, será que eles conseguem bolar uma estratégia **vencedora**, isto é, que garanta a eles a vitória independentemente da sequência de movimentos que o adversário fizer?

Perguntas que não querem calar:

Algum dos matemáticos pode bolar uma estratégia eficaz para ganhar esse jogo? Mais ainda, será que eles conseguem bolar uma estratégia **vencedora**, isto é, que garanta a eles a vitória independentemente da sequência de movimentos que o adversário fizer? O número de linhas e de colunas do tabuleiro pode influenciar nessa possível estratégia?

Perguntas que não querem calar:

Algum dos matemáticos pode bolar uma estratégia eficaz para ganhar esse jogo? Mais ainda, será que eles conseguem bolar uma estratégia **vencedora**, isto é, que garanta a eles a vitória independentemente da sequência de movimentos que o adversário fizer? O número de linhas e de colunas do tabuleiro pode influenciar nessa possível estratégia? O jogador que inicia o jogo tem algum tipo de vantagem sobre o adversário?

Em busca da resposta:

Para respondermos essas questões com relativa profundidade, convém primeiro fazer as seguintes observações sobre o Jogo Malha:

- Se o número de linhas e de colunas do tabuleiro é finito, o Jogo Malha tem um número de jogadas (cortes das linhas) finito.

Em busca da resposta:

Para respondermos essas questões com relativa profundidade, convém primeiro fazer as seguintes observações sobre o Jogo Malha:

- Se o número de linhas e de colunas do tabuleiro é finito, o Jogo Malha tem um número de jogadas (cortes das linhas) finito.
- Uma mesma jogada não pode ser feita duas vezes, evitando *loops* no jogo.

Em busca da resposta:

Para respondermos essas questões com relativa profundidade, convém primeiro fazer as seguintes observações sobre o Jogo Malha:

- Se o número de linhas e de colunas do tabuleiro é finito, o Jogo Malha tem um número de jogadas (cortes das linhas) finito.
- Uma mesma jogada não pode ser feita duas vezes, evitando *loops* no jogo.
- O critério de vitória do Jogo Malha faz com que empates não possam ocorrer.

Em busca da resposta:

Para respondermos essas questões com relativa profundidade, convém primeiro fazer as seguintes observações sobre o Jogo Malha:

- Se o número de linhas e de colunas do tabuleiro é finito, o Jogo Malha tem um número de jogadas (cortes das linhas) finito.
- Uma mesma jogada não pode ser feita duas vezes, evitando *loops* no jogo.
- O critério de vitória do Jogo Malha faz com que empates não possam ocorrer.
- Todos os jogadores sabem quais jogadas podem fazer e quais as possíveis respostas dos adversários.

Em busca da resposta:

Para respondermos essas questões com relativa profundidade, convém primeiro fazer as seguintes observações sobre o Jogo Malha:

- Se o número de linhas e de colunas do tabuleiro é finito, o Jogo Malha tem um número de jogadas (cortes das linhas) finito.
- Uma mesma jogada não pode ser feita duas vezes, evitando *loops* no jogo.
- O critério de vitória do Jogo Malha faz com que empates não possam ocorrer.
- Todos os jogadores sabem quais jogadas podem fazer e quais as possíveis respostas dos adversários.

Como Malha satisfaz essas propriedades, dizemos que ele é um **Jogo Combinatório**.

Mas que diabos é um Jogo?

Até agora, falamos em Jogos e não falamos que estrutura matemática pode representá-los (e definí-los). Assim, vamos definir um Jogo G como sendo um conjunto de jogos!

Mas que diabos é um Jogo?

Até agora, falamos em Jogos e não falamos que estrutura matemática pode representá-los (e definí-los). Assim, vamos definir um Jogo G como sendo um conjunto de jogos!
Essa definição é feita **recursivamente** e nos diz que, se um jogo G é jogado por dois jogadores R e L, esse jogo G é definido pelos jogos obtidos após possíveis movimentos de R e pelos jogos obtidos após possíveis movimentos de L. Assim, se $\mathcal{G}_L$ é a família de jogos obtidos após movimentos de L e $\mathcal{G}_R$ é a família de jogos obtidos após movimentos de R, então denotamos

$$G = \{\mathcal{G}_L \mid \mathcal{G}_R\}$$

Exemplo:

Vamos formalizar a definição como conjunto do Jogo Malha utilizado no exemplo anterior:

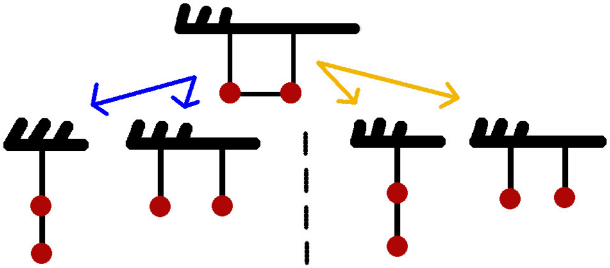
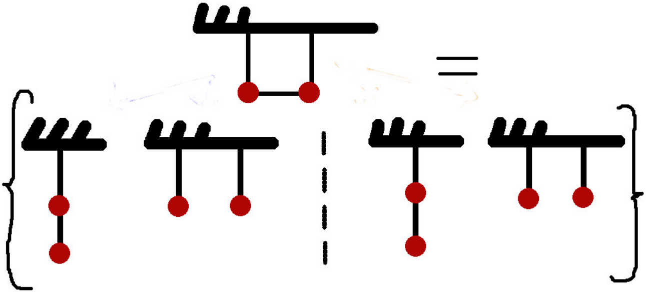


Figura: Na esquerda, temos as opções de jogadas que o jogador L pode fazer e, na direita, as opções de jogadas que o jogador R pode fazer.

Assim, em nossa construção de jogos por conjuntos,



Em outras palavras...

Com isso, vemos que a definição recursiva de jogos combinatórios preserva a ideia de representarmos as possíveis partidas como ramos de árvores. Vejamos:

Em outras palavras...

Com isso, vemos que a definição recursiva de jogos combinatórios preserva a ideia de representarmos as possíveis partidas como ramos de árvores. Vejamos:

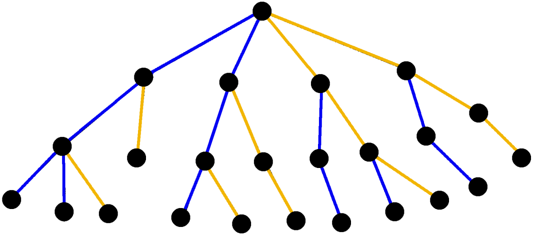
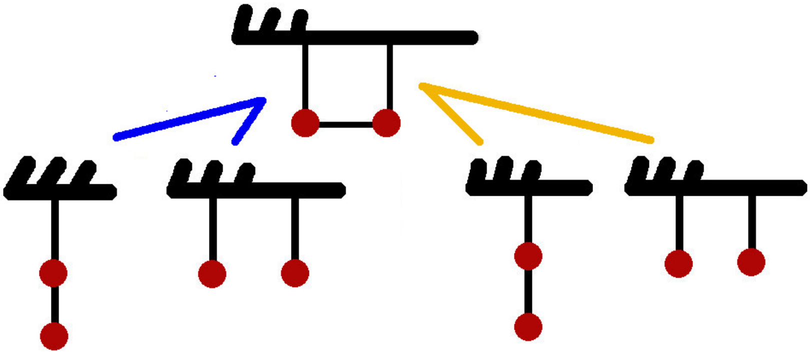


Figura: Aqui, um jogo G é representado pela **raiz** da árvore e todos os jogos que dele decorrem estão representados pelos demais vértices. O jogo é finalizado nas **folhas** da árvore, que não admitem mais opções de jogadas.

Exemplo:



Podemos subir em árvores!

Uma utilidade de se usar árvores (finitas!) para representar jogos é que podemos realizar uma indução sobre seus vértices.

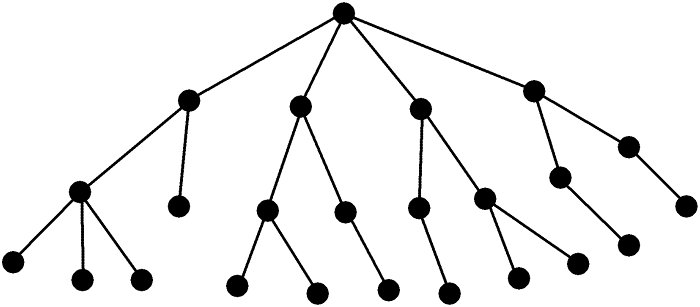
Podemos subir em árvores!

Uma utilidade de se usar árvores (finitas!) para representar jogos é que podemos realizar uma indução sobre seus vértices.Assim, seja φ uma propriedade que verifica:

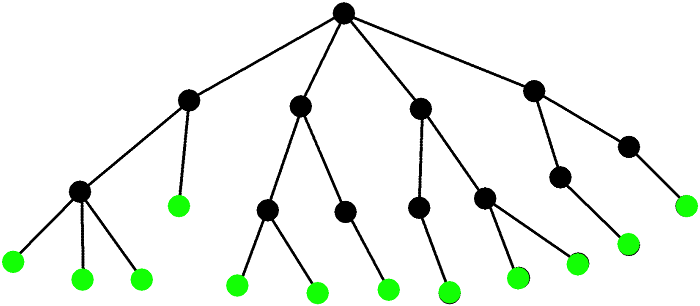
1. `Caso Base:` φ é válida para todas as folhas da árvore.
2. `Passo Indutivo:` Se φ é válida para todos os filhos de um vértice, então φ é válida para esse vértice.

Então, φ é válida para toda a árvore. Em particular, é válida para sua raiz.

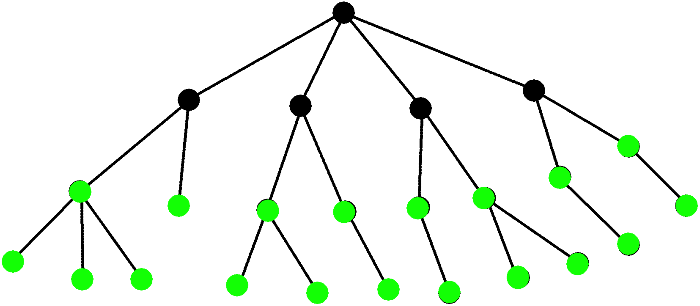
Em outras palavras,



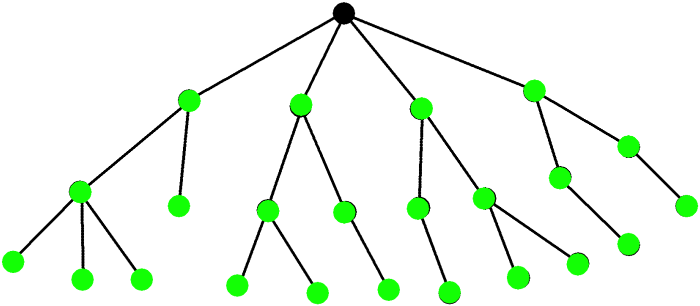
Em outras palavras,



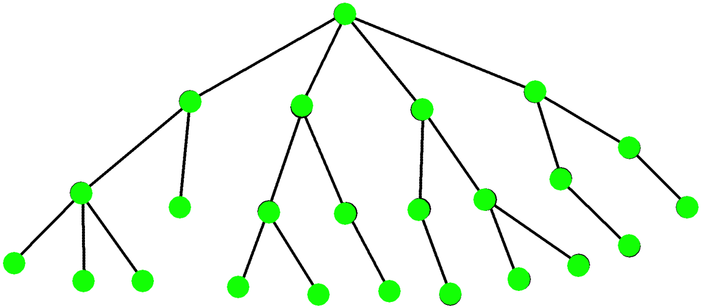
Em outras palavras,



Em outras palavras,



Em outras palavras,



Teorema Fundamental dos Jogos Combinatórios [1]

Teorema

Seja G um jogo combinatório jogado entre os jogadores A e B. Assim, um deles possui estratégia vencedora.

Teorema Fundamental dos Jogos Combinatórios [1]

Teorema

Seja G um jogo combinatório jogado entre os jogadores A e B. Assim, um deles possui estratégia vencedora.

Demonstração: A prova será por indução sobre a árvore de G.

Teorema Fundamental dos Jogos Combinatórios [1]

Teorema

Seja G um jogo combinatório jogado entre os jogadores A e B. Assim, um deles possui estratégia vencedora.

Demonstração: A prova será por indução sobre a árvore de G. Observemos que, nas folhas da árvore, o jogo já está determinado, de modo que um dos jogadores é vencedor nessa posição pela falta de empates no jogo.

Teorema Fundamental dos Jogos Combinatórios [1]

Teorema

Seja G um jogo combinatório jogado entre os jogadores A e B. Assim, um deles possui estratégia vencedora.

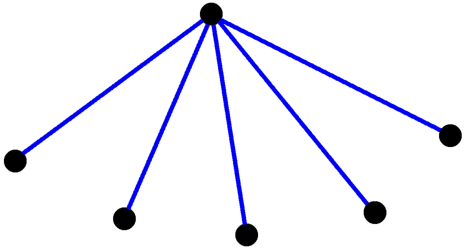
Demonstração: A prova será por indução sobre a árvore de G. Observemos que, nas folhas da árvore, o jogo já está determinado, de modo que um dos jogadores é vencedor nessa posição pela falta de empates no jogo. Para o passo indutivo, seja v um vértice da árvore cujas opções admitam estratégia vencedora para um dos jogadores.

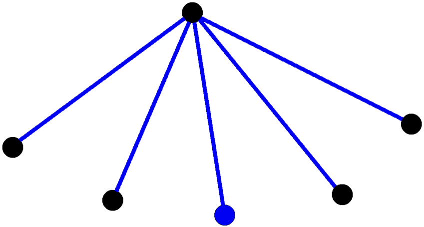
Teorema Fundamental dos Jogos Combinatórios [1]

Teorema

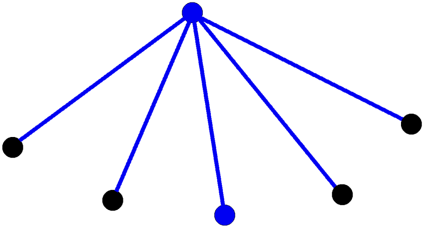
Seja G um jogo combinatório jogado entre os jogadores A e B. Assim, um deles possui estratégia vencedora.

Demonstração: A prova será por indução sobre a árvore de G. Observemos que, nas folhas da árvore, o jogo já está determinado, de modo que um dos jogadores é vencedor nessa posição pela falta de empates no jogo. Para o passo indutivo, seja v um vértice da árvore cujas opções admitam estratégia vencedora para um dos jogadores. Suponhamos que A joga primeiro. Temos dois casos a considerar:

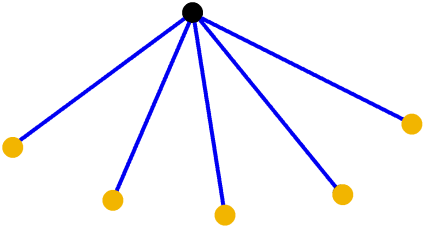




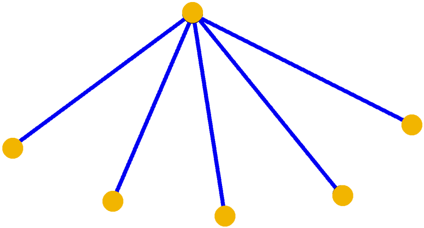
- Se existe uma opção de v que tem estratégia vencedora para A, A deve jogar nessa opção para ganhar o jogo.



- Se existe uma opção de v que tem estratégia vencedora para A, A deve jogar nessa opção para ganhar o jogo.



- Se todas as opções de v possuem estratégia vencedora para B, então B tem uma estratégia vencedora.



- Se todas as opções de v possuem estratégia vencedora para B.

Agora, suponhamos que B joga primeiro.

Agora, suponhamos que B joga primeiro. Analogamente, temos os seguintes casos a considerar:

- Se existe uma opção de v que tem estratégia vencedora para B, B deve jogar nessa opção para ganhar o jogo.

Agora, suponhamos que B joga primeiro. Analogamente, temos os seguintes casos a considerar:

- Se existe uma opção de v que tem estratégia vencedora para B, B deve jogar nessa opção para ganhar o jogo.
- Caso todas as opções de v deem vitória para A, B não tem escapatória: qualquer movimento que fizer dará vitória para A.

Agora, suponhamos que B joga primeiro. Analogamente, temos os seguintes casos a considerar:

- Se existe uma opção de v que tem estratégia vencedora para B, B deve jogar nessa opção para ganhar o jogo.
- Caso todas as opções de v deem vitória para A, B não tem escapatória: qualquer movimento que fizer dará vitória para A.

Em qualquer caso, **alguém** (não sabemos quem) tem estratégia vencedora nesse jogo, comprovando o passo indutivo.

Mas e daí?

Mas e daí?

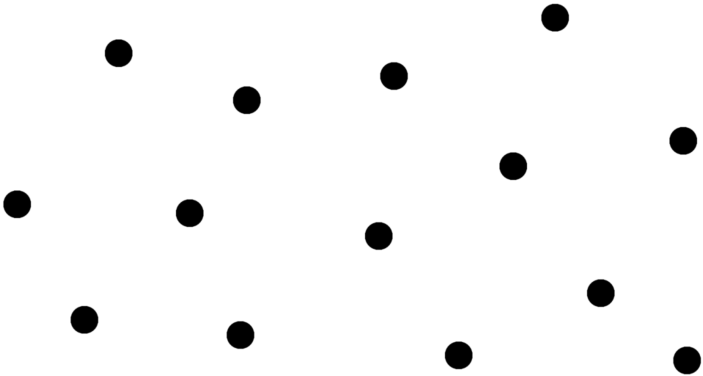
Se aplicarmos esse resultado ao nosso Jogo Malha, concluimos que Cardano ou Tartaglia tem uma estratégia vencedora para esse jogo.

Mas e daí?

Se aplicarmos esse resultado ao nosso Jogo Malha, concluimos que Cardano ou Tartaglia tem uma estratégia vencedora para esse jogo. Mas será que conseguimos explicitar essa estratégia?

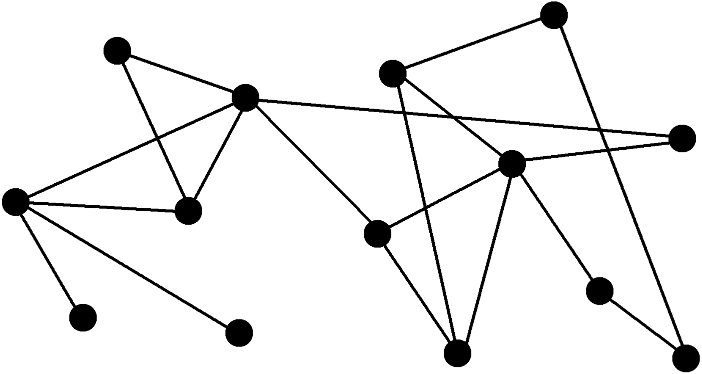
Um pouco sobre grafos

Um grafo G é um conjunto de vértices com um conjunto de arestas associado. Vejamos um exemplo:

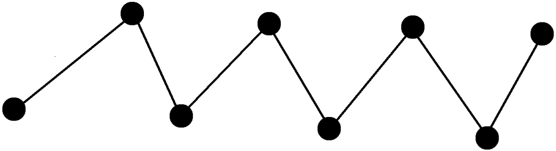


Um pouco sobre grafos

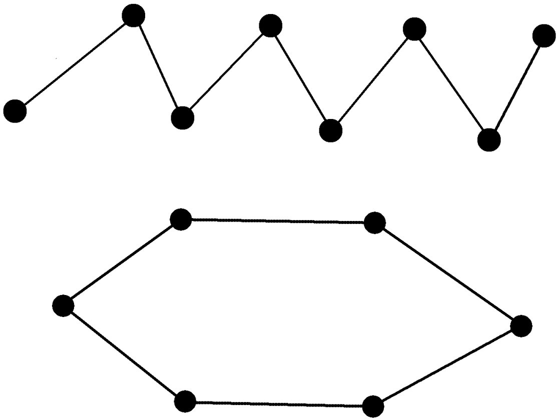
Um grafo G é um conjunto de vértices com um conjunto de arestas associado. Vejamos um exemplo:



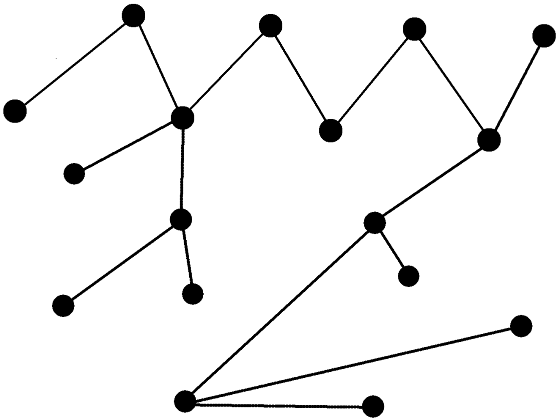
Exemplos Clássicos



Exemplos Clássicos



Exemplos Clássicos



Definições Úteis

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo.

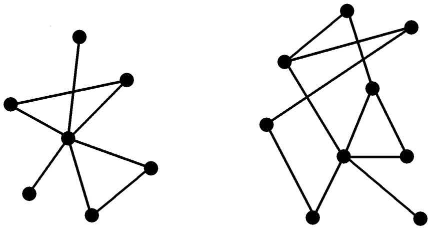
Definições Úteis

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles.

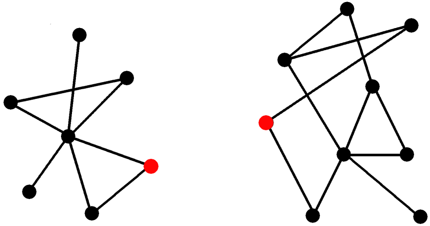
Definições Úteis

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles. Os exemplos vistos até aqui são conexos.

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles. Os exemplos vistos até aqui são conexos. O exemplo abaixo é **desconexo**:



Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles. Os exemplos vistos até aqui são conexos. O exemplo abaixo é **desconexo**:



Definições Úteis

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles. Os exemplos vistos até aqui são conexos. O exemplo abaixo é **desconexo**:

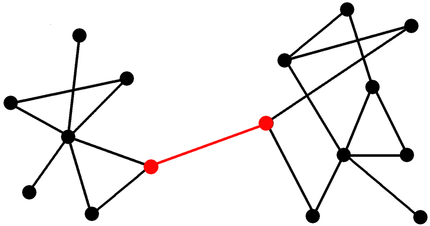


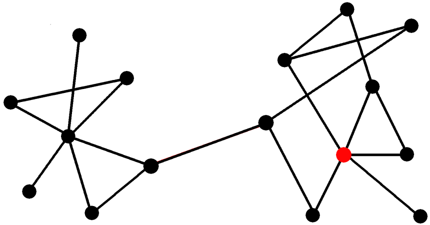
Figura: Como a retirada da aresta vermelha faz com que o novo grafo fique desconexo, essa aresta é dita ser uma **ponte** do grafo.

Definições Úteis

Dado v um vértice de um grafo $G = (V, E)$, o **grau** $g(v)$ desse vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem.

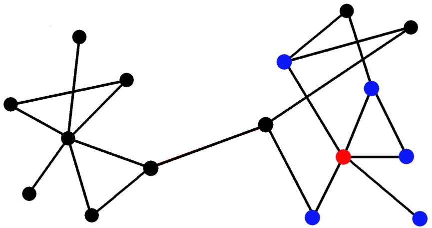
Definições Úteis

Dado v um vértice de um grafo $G = (V, E)$, o **grau** $g(v)$ desse vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. O vértice em vermelho abaixo, por exemplo, possui grau 5.



Definições Úteis

Dado v um vértice de um grafo $G = (V, E)$, o **grau** $g(v)$ desse vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. O vértice em vermelho abaixo, por exemplo, possui grau 5.



Já os **vizinhos** de um vértice são os vértices que possuem uma aresta com ele. No nosso exemplo, os vizinhos do vértice vermelho são os pontos em azul.

Observações Importantes

Observação:

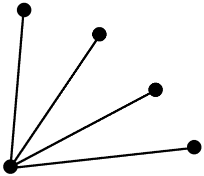
Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Assim, a soma dos graus de seus vértices corresponde ao dobro do número de arestas.

Observações Importantes

Observação:

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Assim, a soma dos graus de seus vértices corresponde ao dobro do número de arestas.

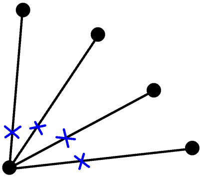
Isso ocorre porque, durante a contagem dos graus, contamos cada aresta exatamente duas vezes: cada uma contribui em uma unidade no grau de suas pontas.



Observação:

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Assim, a soma dos graus de seus vértices corresponde ao dobro do número de arestas.

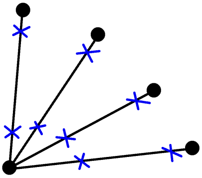
Isso ocorre porque, durante a contagem dos graus, contamos cada aresta exatamente duas vezes: cada uma contribui em uma unidade no grau de suas pontas.



Observação:

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Assim, a soma dos graus de seus vértices corresponde ao dobro do número de arestas.

Isso ocorre porque, durante a contagem dos graus, contamos cada aresta exatamente duas vezes: cada uma contribui em uma unidade no grau de suas pontas.



Observação:

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $n > 1$ vértices e $n - 1$ arestas, então G admite algum vértice de grau 1.

Observação:

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $n > 1$ vértices e $n - 1$ arestas, então G admite algum vértice de grau 1.

Por um momento, suponhamos que não, de modo que nenhum vértice tem grau 1. Eles não podem ter grau 0, uma vez que o grafo é conexo.

Observação:

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $n > 1$ vértices e $n - 1$ arestas, então G admite algum vértice de grau 1.

Por um momento, suponhamos que não, de modo que nenhum vértice tem grau 1. Eles não podem ter grau 0, uma vez que o grafo é conexo. Assim, o grau de todos os vértices é no mínimo 2, de modo que a soma de todos esses graus é, no mínimo, $2n$.

Observação:

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo com $n > 1$ vértices e $n - 1$ arestas, então G admite algum vértice de grau 1.

Por um momento, suponhamos que não, de modo que nenhum vértice tem grau 1. Eles não podem ter grau 0, uma vez que o grafo é conexo. Assim, o grau de todos os vértices é no mínimo 2, de modo que a soma de todos esses graus é, no mínimo, $2n$. Mas, pela observação anterior, a soma de todos os graus deve ser o dobro do número de arestas, de modo que esse valor deveria ser $2(n - 1)$, que é estritamente menor que $2n$.

Proposição 1:

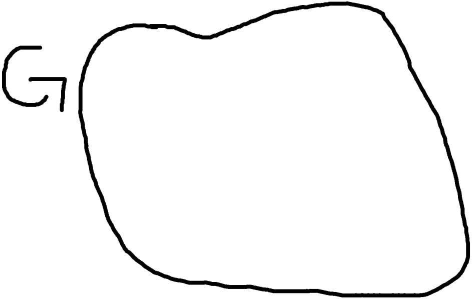
Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

Resultados Úteis

Proposição 1:

Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

Justificativa:

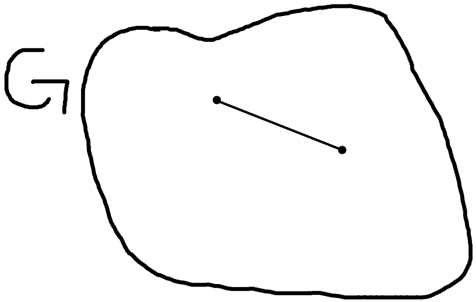


Resultados Úteis

Proposição 1:

Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

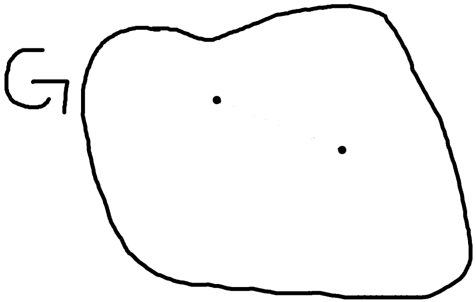
Justificativa:



Proposição 1:

Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

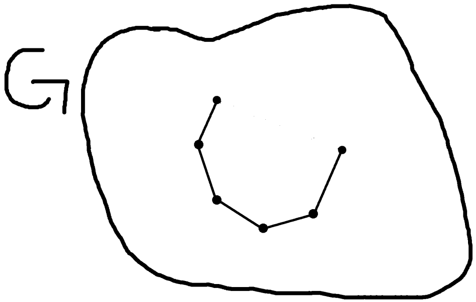
Justificativa:



Proposição 1:

Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

Justificativa:

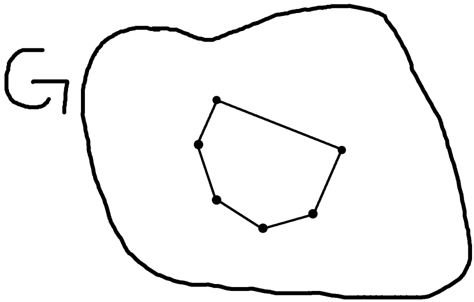


Resultados Úteis

Proposição 1:

Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

Justificativa:



Proposição 1:

Seja $G = (V, E)$ uma árvore conexa. Assim, cada uma de suas arestas é uma ponte.

Demonstração: Por um momento, suponhamos que uma das arestas uv do grafo não é uma ponte. Isso significa que, se nós a removermos do grafo, ele ainda será conexo. Mas, pela definição de conexidade, isso significa que existe um caminho C de arestas conectando os vértices u e v. Logo, a aresta uv "fecha" esse caminho em G, formando um ciclo, o que contradiz o fato do grafo ser uma árvore [2].

Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

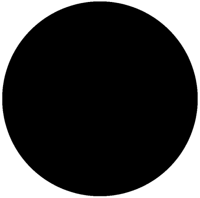
Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n.

Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n. Caso $n = 1$, temos:

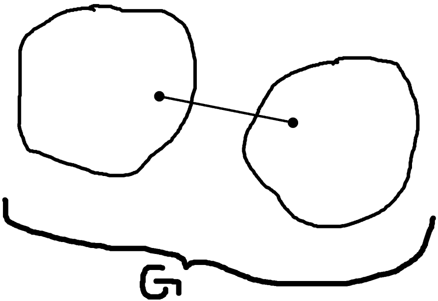


Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos:

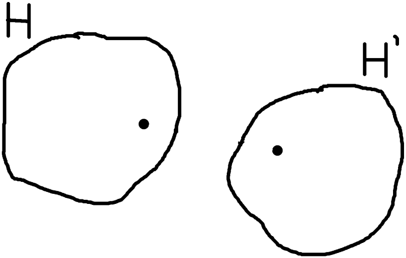


Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos:

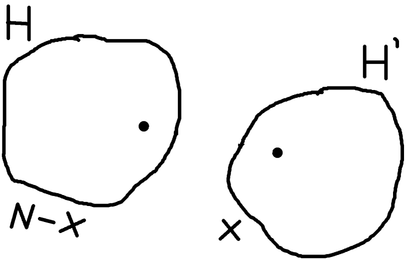


Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

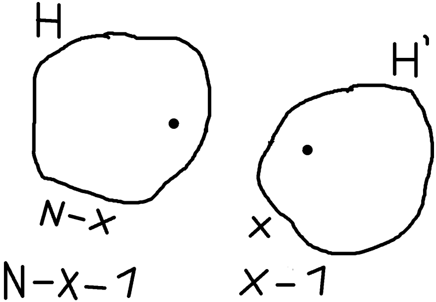
Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos:



Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

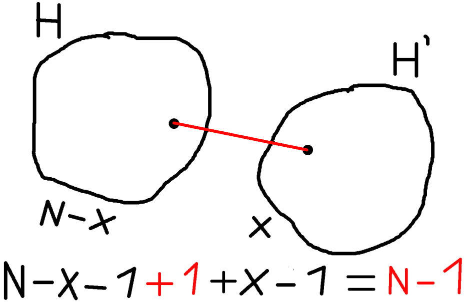
Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos:



Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

Justificativa: podemos verificar isso por indução sobre n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos:



Resultados Úteis:

Proposição 2:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices em que toda aresta é uma ponte. Assim, G possui $n - 1$ arestas.

Demonstração: essa prova será feita por indução sobre o número n de vértices. O caso base $n = 1$ é válido, visto que o grafo com apenas um vértice não possui arestas. Para o passo indutivo, suponhamos $n > 1$ e que o resultado é válido para todo grafo conexo com menos de n vértices cujas arestas são pontes. Assim, vamos remover uma aresta qualquer uv de G. Como essa aresta é uma ponte, o grafo se tornará desconexo e formado por componentes H e H'. Cada uma dessas componentes é conexa e, se H tem x vértices, então H' tem $n - x$ vértices (lembre-se: nós não removemos vértices!). Como as arestas de H e H' continuam sendo pontes e $x, n - x < n$, podemos aplicar a hipótese indutiva nesses grafos. Portanto, H tem $x - 1$ arestas e H' tem $n - x - 1$ arestas. Assim, G tem

$$x - 1 + n - x - 1 + 1 = n - 1$$

arestas, finalizando essa prova.

Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

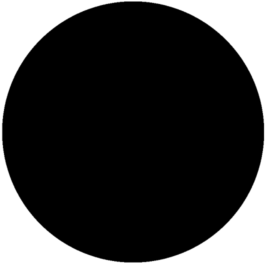
Justificativa: novamente, realizaremos uma indução sobre o número de vértices n.

Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Justificativa: novamente, realizaremos uma indução sobre o número de vértices n. Caso $n = 1$, temos

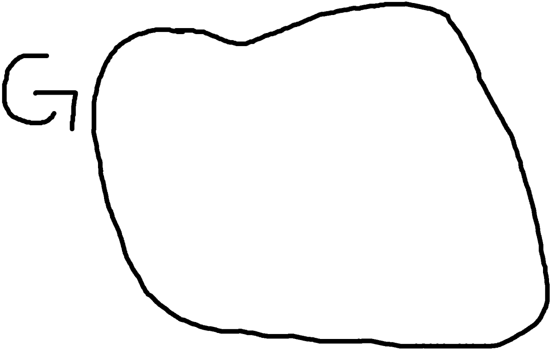


Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Justificativa: novamente, realizaremos uma indução sobre o número de vértices n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos

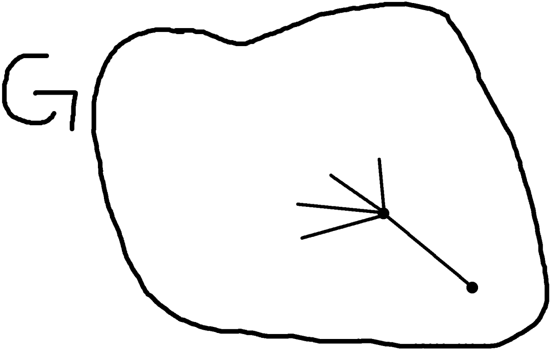


Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Justificativa: novamente, realizaremos uma indução sobre o número de vértices n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos

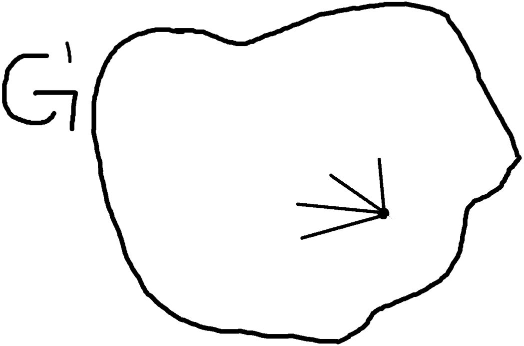


Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Justificativa: novamente, realizaremos uma indução sobre o número de vértices n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos

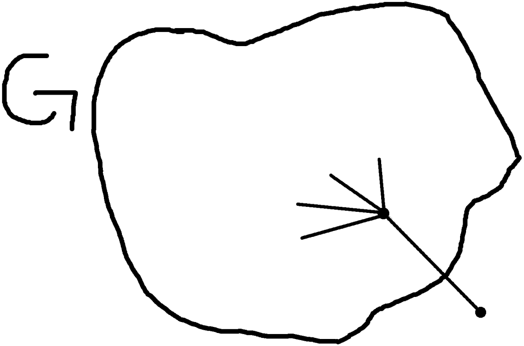


Resultados Úteis:

Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Justificativa: novamente, realizaremos uma indução sobre o número de vértices n. Caso $n > 1$, tomando o enunciado por hipótese indutiva, temos



Proposição 3:

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices com $n - 1$ arestas. Assim, G é uma árvore.

Demonstração: novamente, essa prova será feita por indução sobre n. O caso em que $n = 1$ é válido, pois esse grafo não possui arestas e, assim, não possui circuitos. Assim, podemos supor $n > 1$ e, por hipótese indutiva, que o resultado é válido para todo grafo com menos de n vértices. Por uma observação feita há algum tempo atrás, sabemos que existe um vértice v de grau 1 em G. Se removermos esse vértice (e a aresta a ele associada), a hipótese indutiva nos dirá que $G \setminus \{v\}$ é uma árvore. Assim, $G \setminus \{v\}$ não tem circuitos. Mas, a inclusão do vértice v e de sua aresta não criará um novo circuito, de modo que G continuará uma árvore [3].

Ou seja...

Em suma, mostramos o seguinte resultado:

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de n vértices. Assim, são equivalentes:

1. G é uma árvore.
2. Toda aresta de G é uma ponte.
3. G tem $n - 1$ arestas.

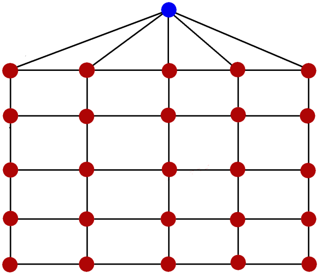
Mas e daí?

Mas e daí?

Após toda essa discussão sobre grafos, podemos encarar com certa naturalidade o tabuleiro de Malha como um grafo. Basta encarar os nós e o teto do tabuleiro como vértices:

Mas e daí?

Após toda essa discussão sobre grafos, podemos encarar com certa naturalidade o tabuleiro de Malha como um grafo. Basta encarar os nós e o teto do tabuleiro como vértices:



Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam).

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**. Como vimos, o grafo vai possuir apenas pontes se, e somente se, tiver n vértices e $n - 1$ arestas.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**. Como vimos, o grafo vai possuir apenas pontes se, e somente se, tiver n vértices e $n-1$ arestas. Se L é o número de linhas da malha e C o número de colunas, então o tabuleiro inicial possui $L \cdot C + 1$ vértices e $L \cdot C + L \cdot (C-1)$ arestas.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**. Como vimos, o grafo vai possuir apenas pontes se, e somente se, tiver n vértices e $n-1$ arestas. Se L é o número de linhas da malha e C o número de colunas, então o tabuleiro inicial possui $L \cdot C + 1$ vértices e $L \cdot C + L \cdot (C-1)$ arestas. Para que todas as arestas do grafo sejam pontes, ele deve possuir $L \cdot C$ arestas.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**. Como vimos, o grafo vai possuir apenas pontes se, e somente se, tiver n vértices e $n-1$ arestas. Se L é o número de linhas da malha e C o número de colunas, então o tabuleiro inicial possui $L \cdot C + 1$ vértices e $L \cdot C + L \cdot (C-1)$ arestas. Para que todas as arestas do grafo sejam pontes, ele deve possuir $L \cdot C$ arestas. Portanto, devem ser removidas $L \cdot (C-1)$ arestas.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**. Como vimos, o grafo vai possuir apenas pontes se, e somente se, tiver n vértices e $n-1$ arestas. Se L é o número de linhas da malha e C o número de colunas, então o tabuleiro inicial possui $L \cdot C + 1$ vértices e $L \cdot C + L \cdot (C-1)$ arestas. Para que todas as arestas do grafo sejam pontes, ele deve possuir $L \cdot C$ arestas. Portanto, devem ser removidas $L \cdot (C-1)$ arestas. Como os jogadores se alternam na remoção das arestas, o primeiro jogador será perdedor se esse produto for par.

Mas e daí?

Encarando dessa forma, um dos jogadores perde se não existe uma aresta do grafo que ele possa remover sem que o grafo fique desconexo. Isso porque, se o grafo está desconexo, significa que existe uma componente conexa que contém o teto e outra que não o contém (essa representa os nós que cairam). Em outras palavras, o jogador perdedor é aquele que **só possui pontes para remover**. Como vimos, o grafo vai possuir apenas pontes se, e somente se, tiver n vértices e $n - 1$ arestas. Se L é o número de linhas da malha e C o número de colunas, então o tabuleiro inicial possui $L \cdot C + 1$ vértices e $L \cdot C + L \cdot (C - 1)$ arestas. Para que todas as arestas do grafo sejam pontes, ele deve possuir $L \cdot C$ arestas. Portanto, devem ser removidas $L \cdot (C - 1)$ arestas. Como os jogadores se alternam na remoção das arestas, o primeiro jogador será perdedor se esse produto for par. Assim, o segundo jogador será o perdedor se esse produto for ímpar.

Em suma...

Assim, descobrimos quando o primeiro a jogar garante vitória no jogo malha, bem como determinamos condições para que o segundo jogador possua a estratégia vencedora.

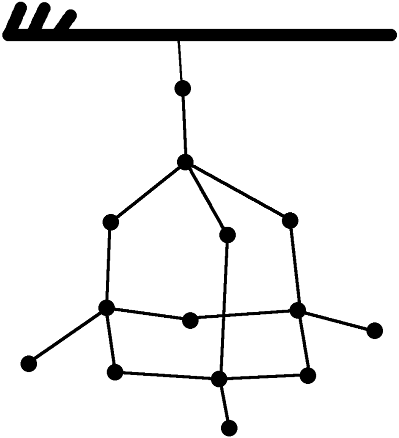
Em suma...

Assim, descobrimos quando o primeiro a jogar garante vitória no jogo malha, bem como determinamos condições para que o segundo jogador possua a estratégia vencedora. Ainda assim, resta-nos explicitar o algoritmo para que esses jogadores, de fato, vençam.

Em suma...

Assim, descobrimos quando o primeiro a jogar garante vitória no jogo malha, bem como determinamos condições para que o segundo jogador possua a estratégia vencedora. Ainda assim, resta-nos explicitar o algoritmo para que esses jogadores, de fato, vençam. Isso é simples: basta eles sempre removerem uma aresta que não é uma ponte, isto é, que faz parte de algum circuito.

E se o tabuleiro fosse assim?



Referências Bibliográficas:

Michael Albert, Richard Nowakowski e David Wolfe. *Lessons in Play, An Introduction to Combinatorial Game Theory*. Wellesley, Massachusetts: CRC Press, 2007.

Paulo Feofiloff, Yoshiharu Kohayakawa e Yoshiko Wakabayashi. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*. São Paulo, São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004.

Frank Harary. *Graph Theory*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1969.