Quer enriquecer? Pergunte-me como!

Como ganhar 1 milhão de dólares com matemática e provar para sua família que você não deveria ter feito engenharia!

Thiago Ramos

ICMC-USP

Motivação: Por que ganhar 1 milhão de dólares?

Motivação: Por que ganhar 1 milhão de dólares?

Investindo 1 milhão de dólares a uma taxa de $0,5\%$ ao mês, obtemos:

Motivação: Por que ganhar 1 milhão de dólares?

Investindo 1 milhão de dólares a uma taxa de $0,5\%$ ao mês, obtemos:

$$1.000.000 \times 0,005 = 5.000$$

Motivação: Por que ganhar 1 milhão de dólares?

Investindo 1 milhão de dólares a uma taxa de $0,5\%$ ao mês, obtemos:

$$1.000.000 \times 0,005 = 5.000$$

Ou seja, obtemos 5.000 dólares AO MÊS.

Motivação: Por que ganhar 1 milhão de dólares?

Investindo 1 milhão de dólares a uma taxa de $0,5\%$ ao mês, obtemos:

$$1.000.000 \times 0,005 = 5.000$$

Ou seja, obtemos 5.000 dólares AO MÊS.

Cerca de 2 bilhões de reais.

Como ganhar 1 milhão de dólares?

Como ganhar 1 milhão de dólares?

CMI

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EVENTS EUCLID

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

Poincaré Conjecture

In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.

Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod p to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

Como ganhar 1 milhão de dólares?

CMI

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EVENTS EUCLID

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

~~Poincaré Conjecture~~

~~In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.~~

Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod p to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

Como ganhar 1 milhão de dólares?

Cada problema resolvido te dará direito a 1 milhão de dólares!

Obrigado!

Plot Twist

Esse é um seminário sobre a Hipótese de Riemann!

Esse é um seminário sobre a Hipótese de Riemann!

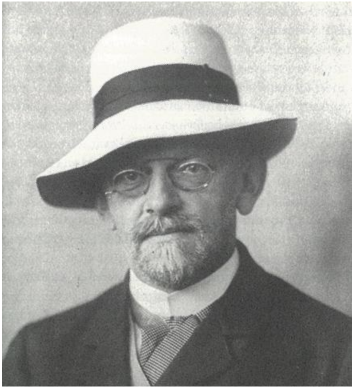
Bernhard Riemann
1826 - 1866

Os problemas de Hilbert

Os problemas de Hilbert

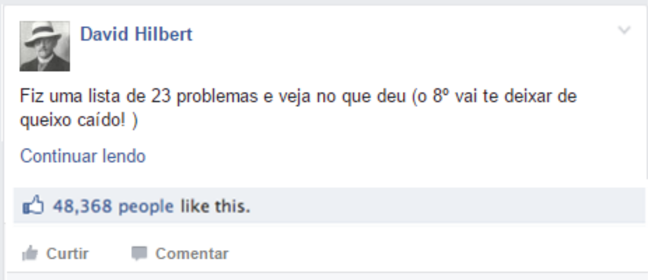
Em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, David Hilbert propôs uma lista de 23 problemas que, de acordo com ele, seriam de fundamental importância para a matemática no século 20.

Os problemas de Hilbert



David Hilbert
1862 - 1943

Os problemas de Hilbert



Post Oficial do Hilbert

Gênio, bilionário, playboy, filantropo: Landon Clay

Gênio, bilionário, playboy, filantropo: Landon Clay

"Landon Clay, a graduate of Harvard College, has had a distinguished career as a successful businessman and in finance and science-based venture capital funding. He has also devoted a great deal of thought and energy to philanthropic causes, from archaelogy and astronomy to biology and mathematics."

Gênio, bilionário, playboy, filantropo: Landon Clay

"Landon Clay, a graduate of Harvard College, has had a distinguished career as a successful businessman and in finance and science-based venture capital funding. He has also devoted a great deal of thought and energy to philanthropic causes, from archaelogy and astronomy to biology and mathematics."

Em 2000, exatamente 100 anos depois do Congresso Internacional de Matemáticos em Paris onde Hilbert propôs os seus 23 problemas, o Instituto Clay aproveitou a data simbólica propôs uma lista com 7 problemas para incentivar o estudo matemático.

Gênio, bilionário, playboy, filantropo: Landon Clay

"Landon Clay, a graduate of Harvard College, has had a distinguished career as a successful businessman and in finance and science-based venture capital funding. He has also devoted a great deal of thought and energy to philanthropic causes, from archaelogy and astronomy to biology and mathematics."

Em 2000, exatamente 100 anos depois do Congresso Internacional de Matemáticos em Paris onde Hilbert propôs os seus 23 problemas, o Instituto Clay aproveitou a data simbólica propôs uma lista com 7 problemas para incentivar o estudo matemático.
Em troca dos esforços, seria oferecido 1 milhão de dólares à pessoa que resolvesse um dos problemas.

Gênio, bilionário, playboy, filantropo: Landon Clay

Landon Clay

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap
Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis
The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem
If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation
This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

Hodge Conjecture
The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

Poincaré Conjecture
In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.

Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture
Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod p to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

Hardy's New Year Resolutions

Hardy's New Year Resolutions

Godfrey Harold Hardy
1877 - 1947

Hardy's New Year Resolutions

Hardy's New Year Resolutions

6- Matar Mussolini.

Hardy's New Year Resolutions

5- Ser proclamado presidente da União Soviética, Grã Bretanha e Alemanha.
6- Matar Mussolini.

Hardy's New Year Resolutions

4- Ser o primeiro homem a subir o Everest.

5- Ser proclamado presidente da União Soviética, Grã Bretanha e Alemanha.

6- Matar Mussolini.

Hardy's New Year Resolutions

3- Provar de forma definitiva que Deus não existe.

4- Ser o primeiro homem a subir o Everest.

5- Ser proclamado presidente da União Soviética, Grã Bretanha e Alemanha.

6- Matar Mussolini.

Hardy's New Year Resolutions

2- Jogar brilhantemente uma partida crucial de cricket.

3- Provar de forma definitiva que Deus não existe.

4- Ser o primeiro homem a subir o Everest.

5- Ser proclamado presidente da União Soviética, Grã Bretanha e Alemanha.

6- Matar Mussolini.

1- **Provar a Hipótese de Riemann.**

2- Jogar brilhantemente uma partida crucial de cricket.

3- Provar de forma definitiva que Deus não existe.

4- Ser o primeiro homem a subir o Everest.

5- Ser proclamado presidente da União Soviética, Grã Bretanha e Alemanha.

6- Matar Mussolini.

A importância da Hipótese de Riemann

A importância da Hipótese de Riemann

1- É um problema do Milênio.

A importância da Hipótese de Riemann

1- É um problema do Milênio.

2- Vale 1 milhão de dólares.

A importância da Hipótese de Riemann

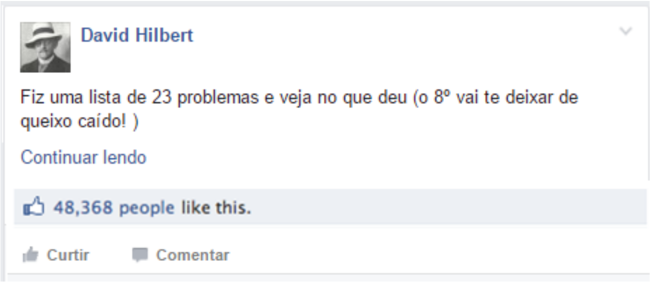
1- É um problema do Milênio.

2- Vale 1 milhão de dólares.

3- É um desejo inacabado do Hardy.

A importância da Hipótese de Riemann

1- É um problema do Milênio.
2- Vale 1 milhão de dólares.
3- É um desejo inacabado do Hardy.
4- É o 8º problema de Hilbert e é de cair o queixo.



Hipótese de Riemann: No início, tudo era Euler

Um dos trabalhos de Euler questionava o comportamento de séries, como por exemplo o que acontece quando fazemos

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...?$$

Um dos trabalhos de Euler questionava o comportamento de séries, como por exemplo o que acontece quando fazemos

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots ?$$

Sabemos que tal soma diverge (tende ao infinito).

E se fizermos

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots?$$

Hipótese de Riemann: No início, tudo era Euler

E se fizermos

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots ?$$

Euler descobriu que nesse caso

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Mais geralmente, o que acontece quando fazemos

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ...?$$

Mais geralmente, o que acontece quando fazemos

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots ?$$

Definindo a soma acima como

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Mais geralmente, o que acontece quando fazemos

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots ?$$

Definindo a soma acima como

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Sabemos (da vida) que $\zeta(s)$ converge se $s > 1$.

Mais geralmente, o que acontece quando fazemos

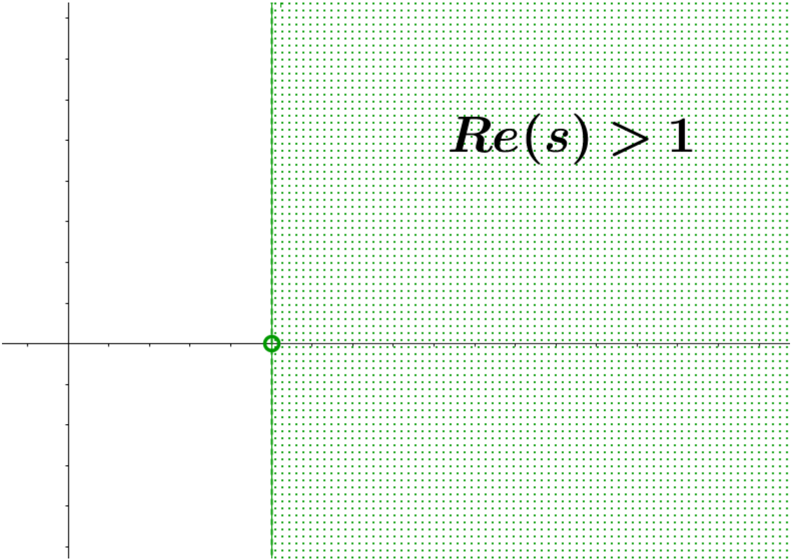
$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots?$$

Definindo a soma acima como

$$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Sabemos (da vida) que $\zeta(s)$ converge se $s>1$.
Na verdade, ζ converge para qualquer número complexo $s=x+iy$ desde que $x>1$, ou seja, $Re(s)>1$

A Zeta de Riemann



A Zeta de Riemann

Anos depois, o matemático Bernhard Riemann se deparou com o mesmo problema.

A Zeta de Riemann

Anos depois, o matemático Bernhard Riemann se deparou com o mesmo problema.
Depois de muito pensar sobre a função $\zeta(s)$, descobriu uma maneira de deixá-la mais divertida.

A Zeta de Riemann

Como $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ...$ se multiplicarmos por $(1 - \frac{2}{2^s})$ dos dois lados, temos

A Zeta de Riemann

$$(1-\frac{2}{2^s})\zeta(s) = (1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{2^s})(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+...+\frac{1}{n^s}+...) =$$

A Zeta de Riemann

$$(1-\frac{2}{2^s})\zeta(s)=(1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{2^s})(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots)=$$

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$$

$$-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{4^s}-\frac{1}{6^s}-\ldots-\frac{1}{(2n)^s}+\ldots$$

$$-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{4^s}-\frac{1}{6^s}-\ldots-\frac{1}{(2n)^s}+\ldots=$$

A Zeta de Riemann

$$(1 - \frac{2}{2^s})\zeta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

A Zeta de Riemann

Dessa forma $\zeta(s)$ fica bem definida para todo valor tal que $Re(s) > 0$ e diferente de 1.

$$\zeta(s) = \frac{\dfrac{1}{1^s} - \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} - ... + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^s} + ...}{1 - \dfrac{2}{2^s}}$$

A Zeta de Riemann

De fato, a partir disso é fácil ver que

A Zeta de Riemann

De fato, a partir disso é fácil ver que

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s)$$

É uma extensão holomorfa de ζ para todo valor de s tal que $Re(s) < 1$.

A Zeta de Riemann

De fato, a partir disso é fácil ver que

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s)$$

É uma extensão holomorfa de ζ para todo valor de s tal que $Re(s) < 1$.

Note que por exemplo, se fizermos $s = -3$ então teremos que $\zeta(-3)$ depende de $\zeta(4)$ e então conseguimos calcular seu valor já que sabemos quanto vale $\zeta(4)$.

A Zeta de Riemann: Uma lenda urbana

A Zeta de Riemann: Uma lenda urbana

Sabemos que a série $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ diverge.

Sabemos que a série $1 + 2 + 3 + 4 + ...$ diverge.
Sabemos também, através da extensão da ζ que fizemos anteriormente, que $\zeta(-1) = \frac{-1}{12}$.

Sabemos que a série $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ diverge.
Sabemos também, através da extensão da ζ que fizemos anteriormente, que $\zeta(-1) = \dfrac{-1}{12}$.

Temos então que

$$\frac{-1}{12} = \zeta(-1) = \frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \dots + \frac{1}{n^{-1}} + \dots$$

A Zeta de Riemann: Uma lenda urbana

Sabemos que a série $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ diverge.
Sabemos também, através da extensão da ζ que fizemos anteriormente, que $\zeta(-1) = \frac{-1}{12}$.

Temos então que

$$\frac{-1}{12} = \zeta(-1) = \frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{-1}} + \ldots$$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = \frac{-1}{12}$$

A Zeta de Riemann: Uma lenda urbana

Sabemos que a série $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ diverge.
Sabemos também, através da extensão da ζ que fizemos anteriormente, que $\zeta(-1) = \dfrac{-1}{12}$.

Temos então que

$$\frac{-1}{12} = \zeta(-1) = \frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{-1}} + \ldots$$

ou seja

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots = \frac{-1}{12}$$

Isso é falso (pelo menos nesse contexto), pois $\zeta(s)$ é definida como a série acima, apenas quando $Re(s) > 1$!

A Hipótese de Riemann

A questão por trás da Hipótese de Riemann é onde estão os zeros da função ζ.

A Hipótese de Riemann

A questão por trás da Hipótese de Riemann é onde estão os zeros da função ζ.

- Se $Re(s) < 1$, então

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s)$$

A Hipótese de Riemann

A questão por trás da Hipótese de Riemann é onde estão os zeros da função ζ.

- Se $Re(s) < 1$, então

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s)$$

- Se $Re(s) > 0$ e $s \neq 1$, então

$$\zeta(s) = \frac{\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^s} + ...}{1 - \frac{2}{2^s}}$$

A Hipótese de Riemann: Os zeros triviais

A Hipótese de Riemann: Os zeros triviais

Afirmação

A função $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy$ *é não nula se* $Re(s) > 0$.

A Hipótese de Riemann: Os zeros triviais

Afirmação

A função $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy$ *é não nula se* $Re(s) > 0$.

Então se $Re(s) < 0$,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0$$

se, e somente se,

$$\sin(\frac{s\pi}{2}) = 0$$

A Hipótese de Riemann: Os zeros triviais

Afirmação

A função $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy$ *é não nula se* $Re(s) > 0$.

Então se $Re(s) < 0$,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0$$

se, e somente se,

$$\sin(\frac{s\pi}{2}) = 0$$

Todo s da forma $s = -2k, \ k \in \mathbb{N}$ é chamado zero trivial da função ζ.

Afirmação

A função $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy$ *é não nula se* $Re(s) > 0$.

Então se $Re(s) < 0$,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0$$

se, e somente se,

$$\sin(\frac{s\pi}{2}) = 0$$

Todo s da forma $s = -2k, \ k \in \mathbb{N}$ é chamado zero trivial da função ζ.

Note que o resultado anterior nos diz exatamente a posição dos zeros da função $\zeta(s)$ quando $Re(s) < 0$.

Note que o resultado anterior nos diz exatamente a posição dos zeros da função $\zeta(s)$ quando $Re(s) < 0$.

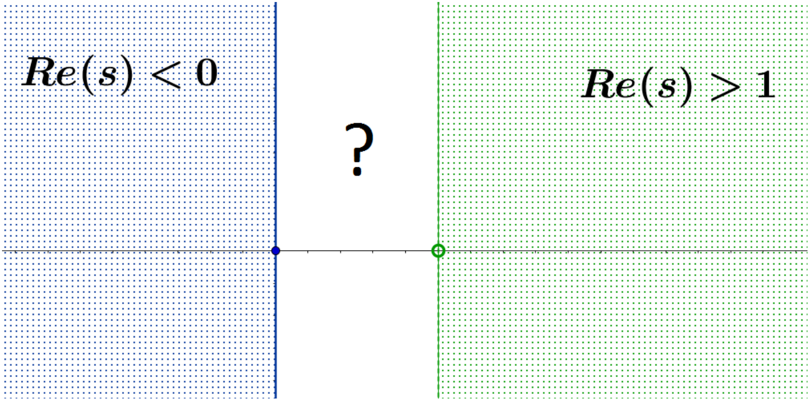
Veremos mais adiante que $\zeta(s) \neq 0$ se $Re(s) > 1$

Note que o resultado anterior nos diz exatamente a posição dos zeros da função $\zeta(s)$ quando $Re(s) < 0$.

Veremos mais adiante que $\zeta(s) \neq 0$ se $Re(s) > 1$

Mas o que acontece quando $0 < Re(s) < 1$?

A hipótese de Riemann



A hipótese de Riemann

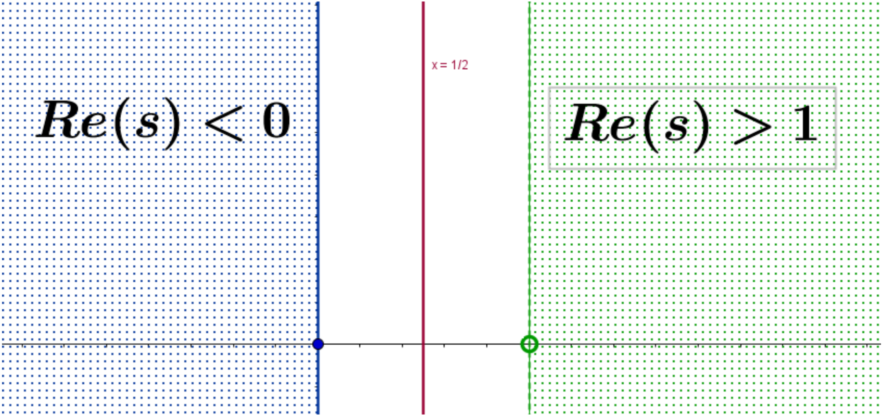
A Hipótese de Riemann nos diz que na região onde $0 < Re(s) < 1$, todos os zeros da função ζ são da forma $s = 1/2 + iy$.

A hipótese de Riemann

A Hipótese de Riemann nos diz que na região onde $0 < Re(s) < 1$, todos os zeros da função ζ são da forma $s = 1/2 + iy$.

Isto é, todos os zeros estão sob a reta $x = 1/2$.

A hipótese de Riemann



Ok... Mas e daí?

Ok... Mas e daí?

Por que o interesse pelos zeros da ζ?

Ok... Mas e daí?

Por que o interesse pelos zeros da ζ?

Por que o interesse pela função ζ de forma geral?

Ok... Mas e daí

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

Ok... Mas e daí

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

Utilizando o fato de que todo número natural tem uma decomposição única em fatores primos, podemos escrever a função Zeta como:

Ok... Mas e daí

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

Utilizando o fato de que todo número natural tem uma decomposição única em fatores primos, podemos escrever a função Zeta como:

$$\zeta(s) = (\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + ...)(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + ...)(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + ...)...$$

Ok... Mas e daí

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

Utilizando o fato de que todo número natural tem uma decomposição única em fatores primos, podemos escrever a função Zeta como:

$$\zeta(s) = (\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + ...)(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + ...)(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + ...)...$$

cada termo do produto acima é da forma

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{p^s})^n$$

Ok... Mas e daí

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

Utilizando o fato de que todo número natural tem uma decomposição única em fatores primos, podemos escrever a função Zeta como:

$$\zeta(s) = (\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + ...)(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + ...)(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + ...)...$$

cada termo do produto acima é da forma

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{p^s})^n$$

Mas $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{p^s})^n$ nada mais é que uma série geométrica, portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{p^s})^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Ok... Mas e daí

Então temos que:

Ok... Mas e daí

Então temos que:

$$\zeta(s) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\right)\cdot \ldots$$

Ok... Mas e daí

Então temos que:

$$\zeta(s) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\right)\cdot\ldots$$

A função Zeta está diretamente relacionada com a distribuição dos números primos!

O teorema dos números primos

Teorema

A quantidade $L(n)$ de números primos menores que n é aproximadamente

$$L(n) = \frac{n}{\ln n}$$

O teorema dos números primos

Teorema

A quantidade $L(n)$ de números primos menores que n é aproximadamente

$$L(n) = \frac{n}{\ln n}$$

Por exemplo, $L(10) \approx \dfrac{10}{2,3} \approx 4.$

O teorema dos números primos

Teorema

A quantidade $L(n)$ de números primos menores que n é aproximadamente

$$L(n) = \frac{n}{\ln n}$$

Por exemplo, $L(10) \approx \dfrac{10}{2,3} \approx 4$. De fato, temos quatro números primos até 10 (2,3,5,7).

O teorema dos números primos

Seja $P(n)$ a função que nos dá exatamente a quantidade de números primos menores que n.

O teorema dos números primos

Seja $P(n)$ a função que nos dá exatamente a quantidade de números primos menores que n.

Afirmação

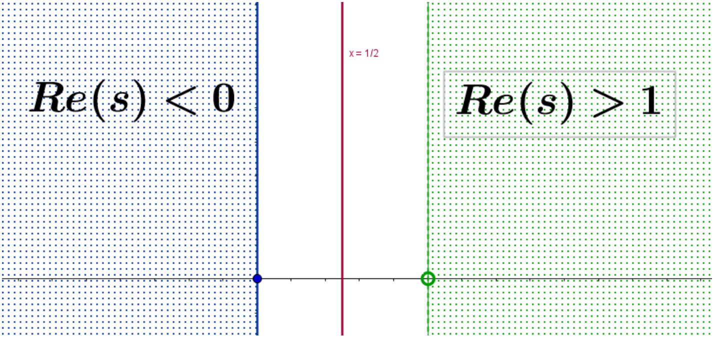
A Hipótese de Riemann é verdade se, e somente se, $L(n)$ *e* $P(n)$ *nunca diferem mais que* $\sqrt{n} \cdot \ln n$.

No céu tem pão?

No céu tem pão?

A Hipótese de Riemann nos diz que na região onde $0 < Re(s) < 1$, todos os zeros da função ζ são da forma $s = 1/2 + iy$.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})[\int_0^\infty e^{-y} y^{-s} dy]\zeta(1-s)$$



No céu tem pão?

Equivalência

Seja $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. *Mostrar que se* $n \geq 1$,

$$\sum_{d|n} d \geq H_n + \exp(H_n)\log(H_n)$$

e que a igualdade vale apenas se $n = 1$ *é equivalente à Hipótese de Riemann!*

No céu tem pão?

Equivalência

Mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{1-12t^2}{(1+4t^2)^3} \int_{1/2}^\infty \log(|\zeta(x+it)|)dxdt = \frac{\pi(3-\gamma)}{32}$$

onde

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

é equivalente à Hipótese de Riemann!

No céu tem pão?

Equivalência

Se

$$G(n) = \frac{\sigma(n)}{n \log \log n}$$

onde $\sigma(n)$ *é a soma dos divisores de* n*. Então mostrar que*

$$G(n) < \exp(\gamma), \ \forall n \geq 5041$$

é equivalente à Hipótese de Riemann.

No céu tem pão?

Equivalência

Mostrar que

$$|\log MMC(1,2,3,...,n) - n| < \sqrt{n}\log^2(n)$$

é equivalente à Hipótese de Riemann!

No céu tem cogumelo?

No céu tem cogumelo?

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EVENTS EUCLID

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

~~Poincaré Conjecture~~

~~In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.~~

Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod p to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

No céu tem cogumelo?

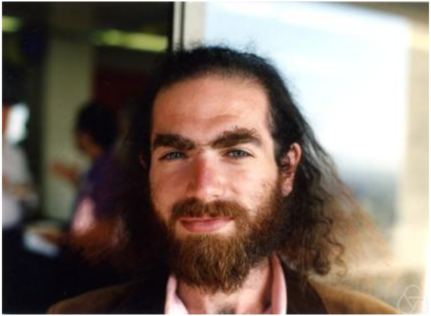
Em 2002/2003 o matemático russo Grigoriy Perelman foi o primeiro a resolver um dos problemas do milênio: A conjectura de Poincaré.

No céu tem cogumelo?

Em 2002/2003 o matemático russo Grigoriy Perelman foi o primeiro a resolver um dos problemas do milênio: A conjectura de Poincaré.

A conjectura dizia que toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 é equivalente à esfera 3-dimensional.

No céu tem cogumelo?



Grigoriy Perelman

Referências

- A Friendly Introduction to The Riemann Hypothesis - Thomas Wright
  http://www.math.jhu.edu/ wright/RH2.pdf
- Values of the Riemann zeta function at integers - Roman J. Dwilewicz, Ján Minác
  http://www.mat.uab.cat/matmat/PDFv2009/v2009n06.pdf
- Collection of equivalent forms of Riemann Hypothesis - Mathoverflow
  http://mathoverflow.net/questions/39944/collection-of-equivalent-forms-of-riemann-hypothesis
- Proposed (dis)proofs of the Riemann Hypothesis -
  http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin//zeta/RHproofs.htm

Referências

- Hipótese de Riemann, espaços de Hilbert e análise de Fourier. - Emanoel Carneiro
  http://video.impa.br/index.php?page=vII-simposio-nacional-ic
- Riemann Hypothesis - Numberphile
  https://www.youtube.com/watch?v=d6c6uIyieoo
- The Key to the Riemann Hypothesis - Numberphile
  https://www.youtube.com/watch?v=VTveQ1ndH1c