COM QUANTOS TANQUES SE GANHA UMA GUERRA?

Vinícius Dandaro Santos

vdandaro11@gmail.com

O QUE FAREMOS?

História

Estatística

O QUE FAREMOS?

História

- Segunda Guerra Mundial

Estatística

O QUE FAREMOS?

História

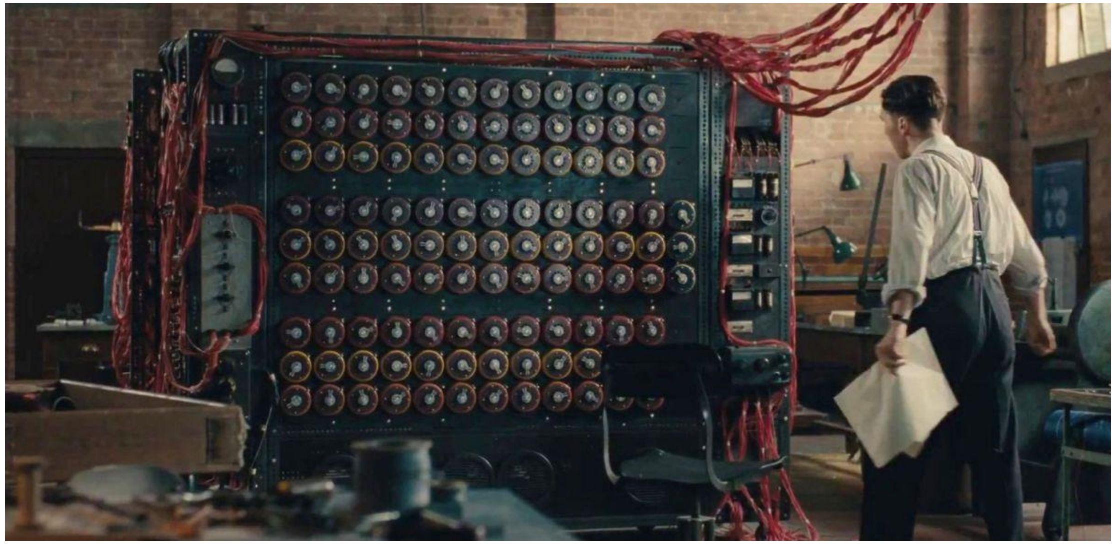
- Segunda Guerra Mundial

Estatística

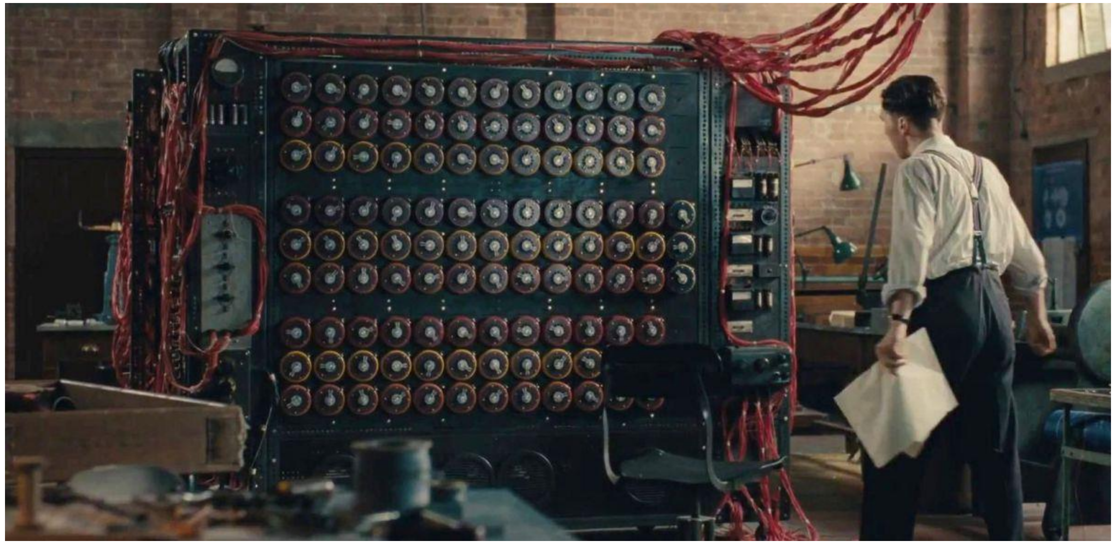
- Número de tanques produzidos pelos países do Eixo

INFORMAÇÃO!!!

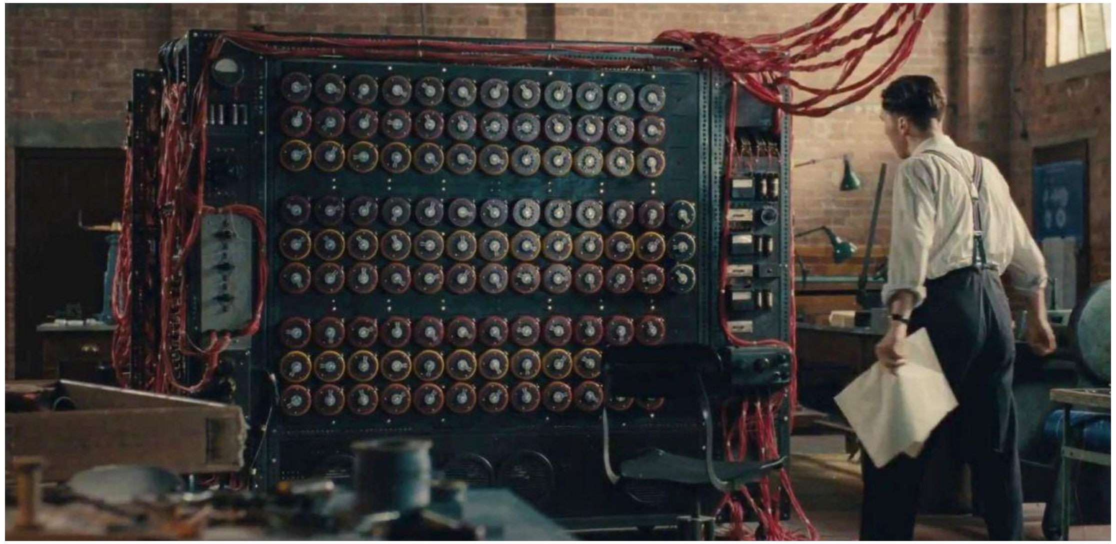
INFORMAÇÃO!!!



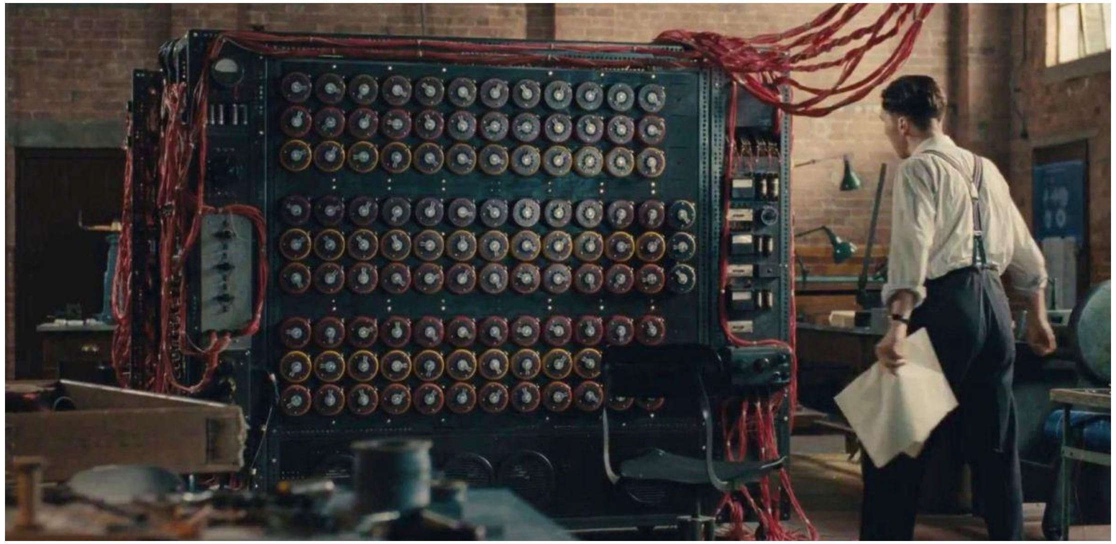
INFORMAÇÃO!!!



INFORMAÇÃO!!!



INFORMAÇÃO!!!



INFORMAÇÃO!!!

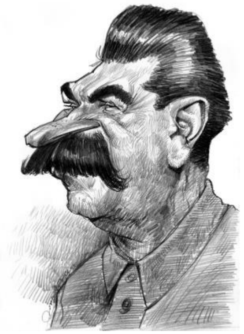
CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

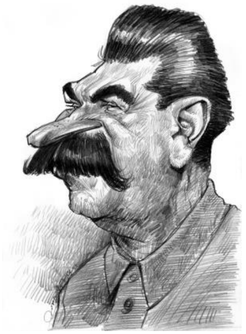


CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939



CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

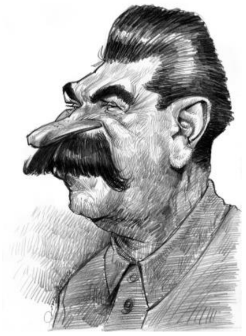
VS

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

CHARLES DE GAULLE



CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

CHARLES DE GAULLE

FRANKLIN D. ROOSEVELT

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

CHARLES DE GAULLE

FRANKLIN D. ROOSEVELT

JOSEF STALIN

VS

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

CHARLES DE GAULLE

FRANKLIN D. ROOSEVELT

JOSEF STALIN

ALDOF HITLER

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

CHARLES DE GAULLE

FRANKLIN D. ROOSEVELT

JOSEF STALIN

VS

ALDOF HITLER

BENITO MUSSOLINI

CONTEXTO HISTÓRICO

- Ano: 1939

WINSTON CHURCHILL

CHARLES DE GAULLE

FRANKLIN D. ROOSEVELT

JOSEF STALIN

VS

ALDOF HITLER

BENITO MUSSOLINI

HIROHITO

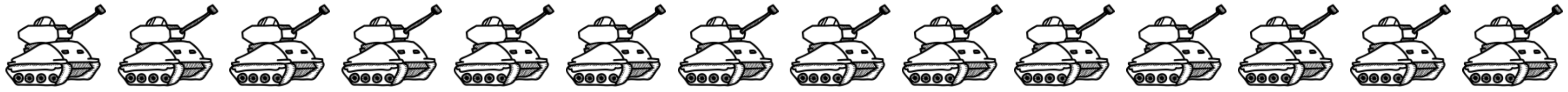
MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

- Serviço de Inteligência

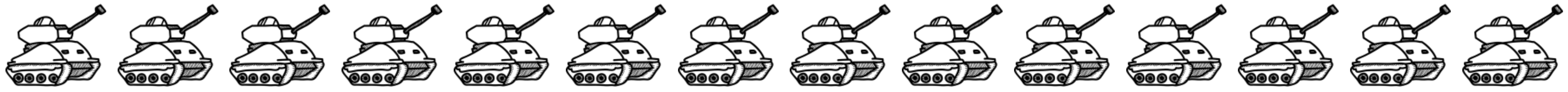
MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

- Serviço de Inteligência

1400 

MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

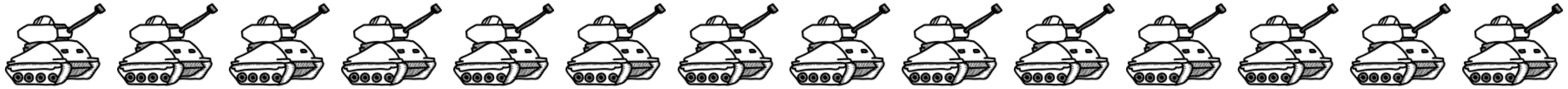
- Serviço de Inteligência

  1400 

- Estatísticos

MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

- Serviço de Inteligência

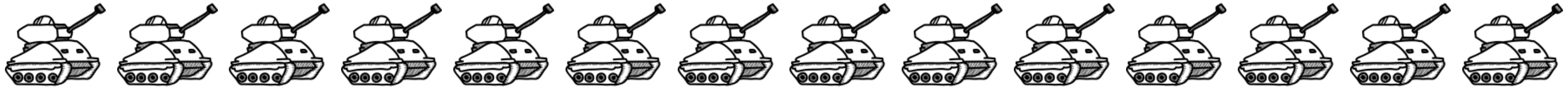
1400 

- Estatísticos

246 

MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

- Serviço de Inteligência

1400 

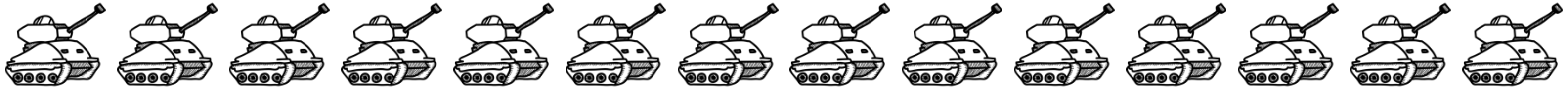
- Estatísticos

246 

- Produção Real

MAS QUANTOS TANQUES ESTAVAM SENDO PRODUZIDOS?

- Serviço de Inteligência

1400 

- Estatísticos

246 

- Produção Real

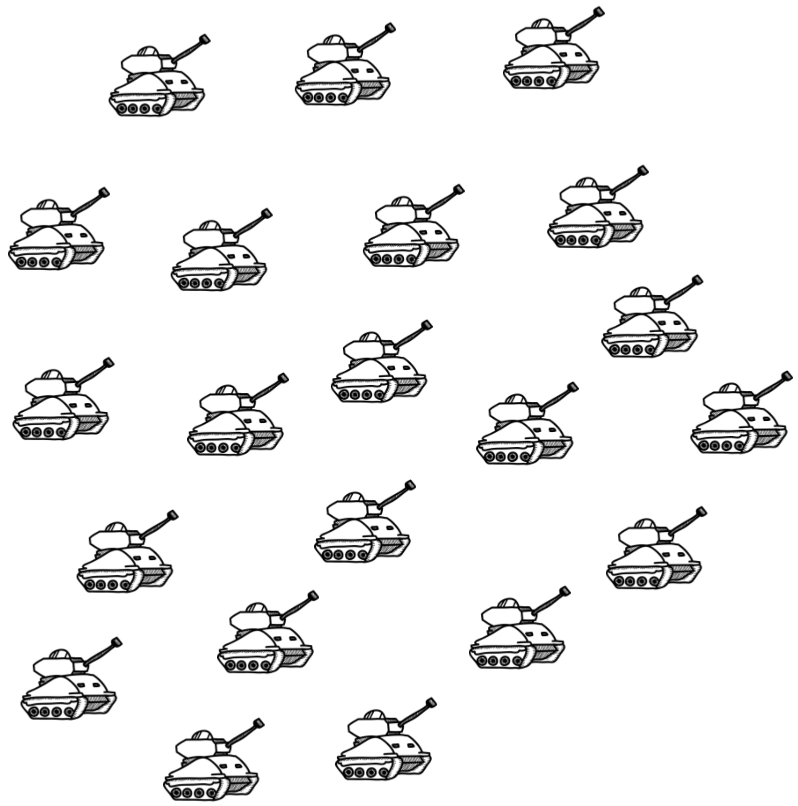
245 

TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**

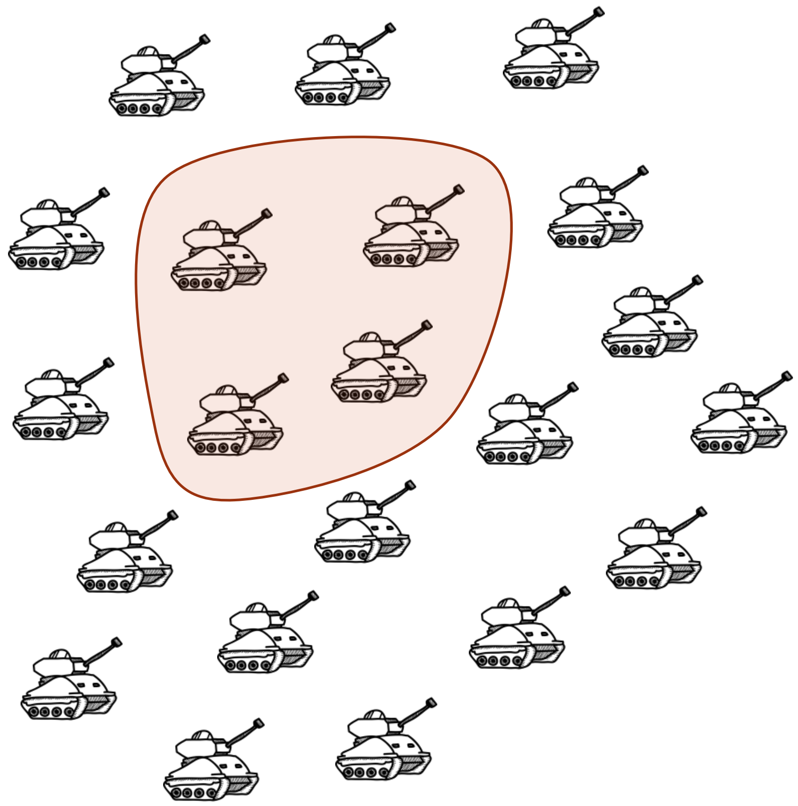
TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**



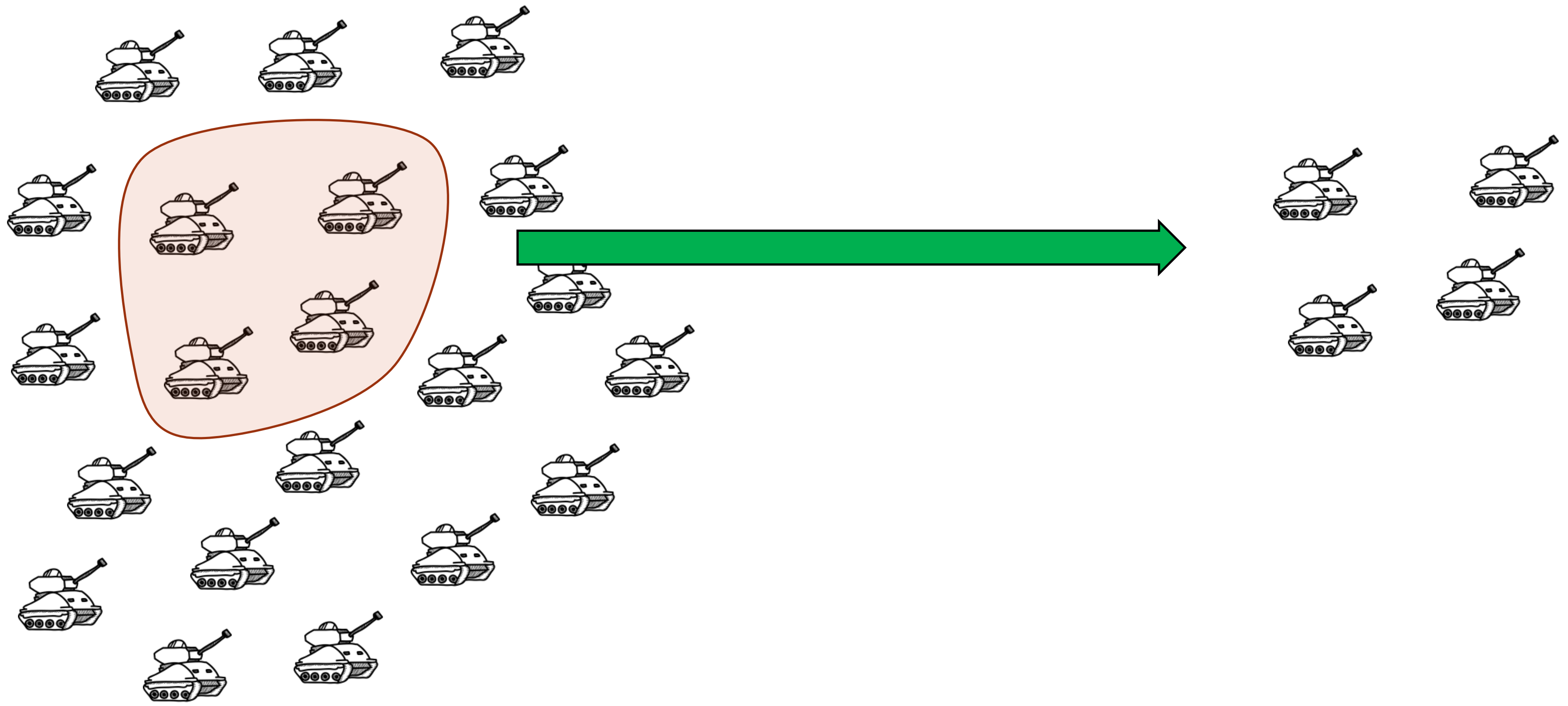
TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**



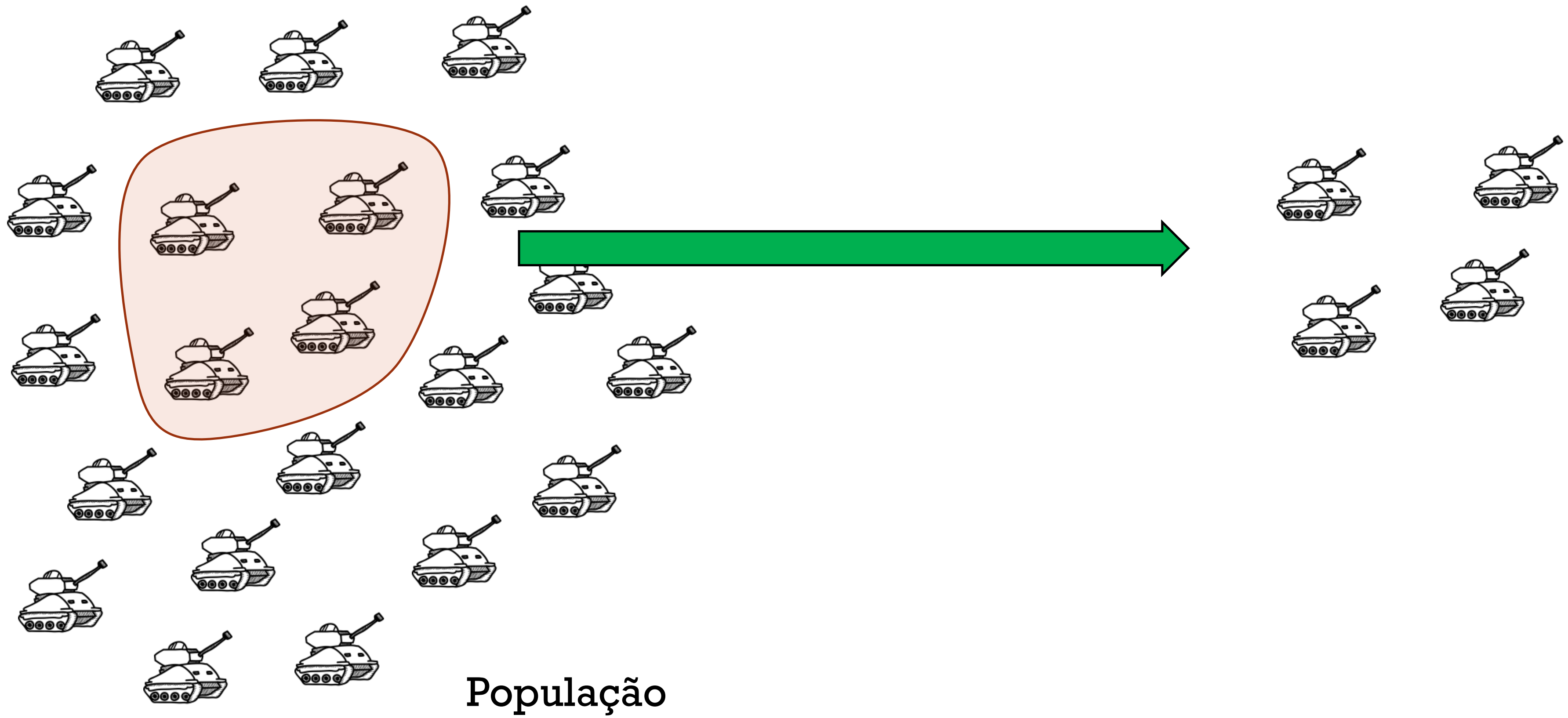
TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**



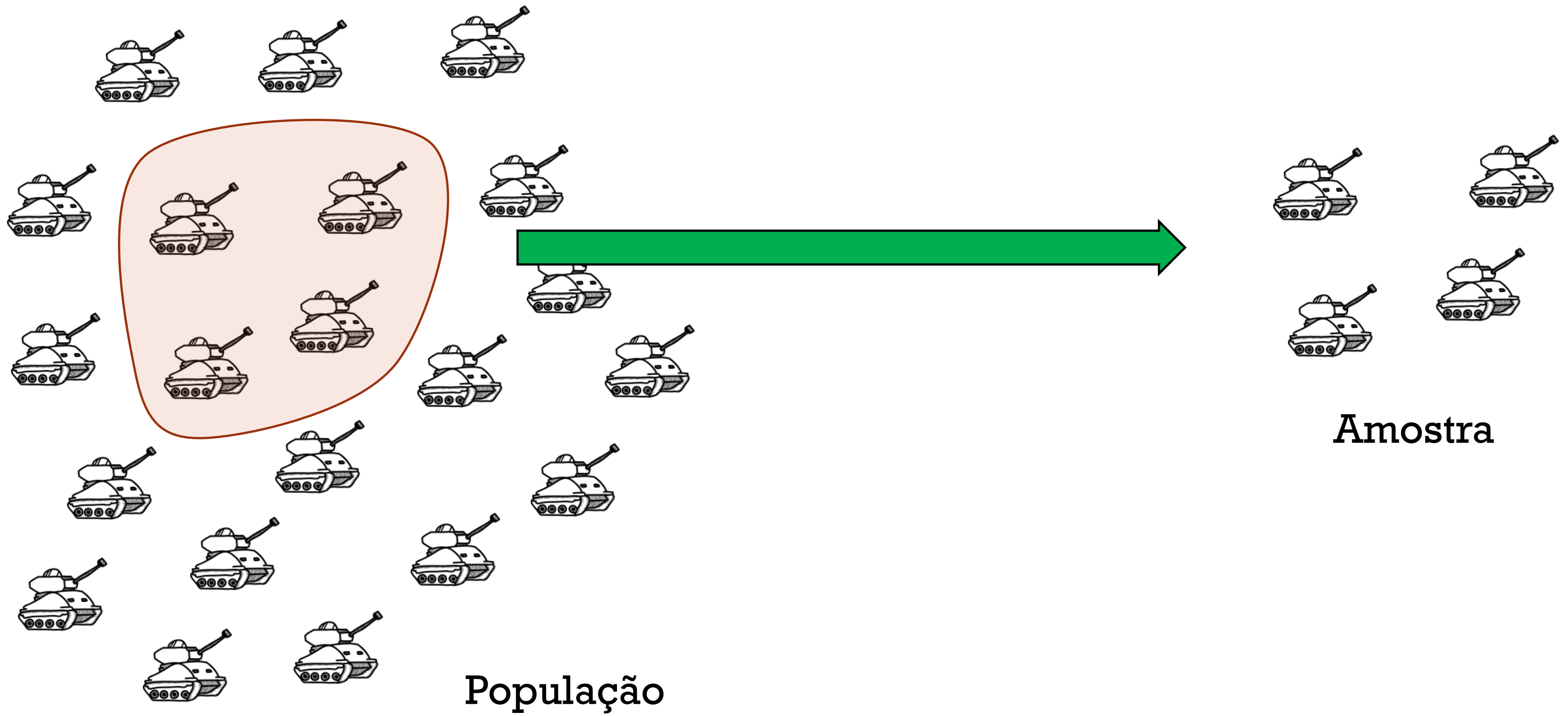
TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**



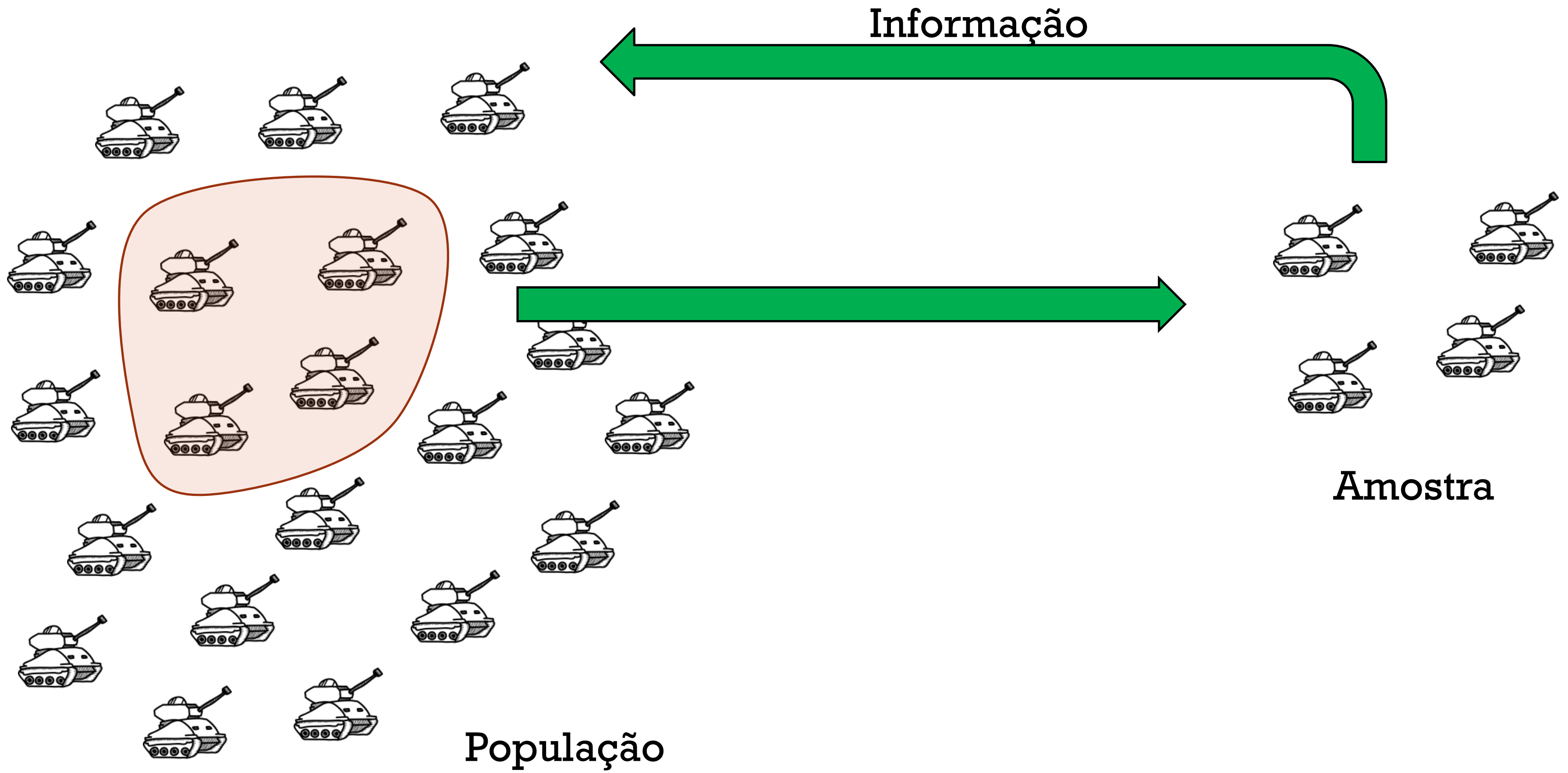
TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**



TERMOS E FERRAMENTAS

- **População/Amostra**

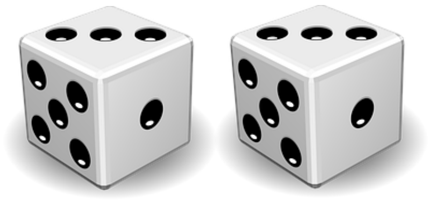


TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**

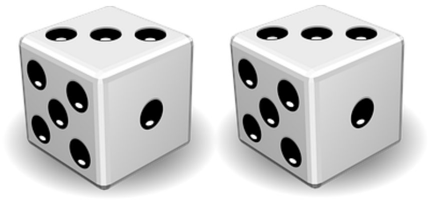
TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



TERMOS E FERRAMENTAS

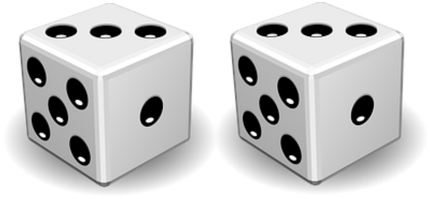
- **Variável Aleatória**



$$S = \{(1{,}1);\ (1{,}2);\ (1{,}3);\ \ldots;\ (3{,}3);\ (3{,}4);\ (3{,}4);\ \ldots;\ (6{,}5);\ (6{,}6)\}$$

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**

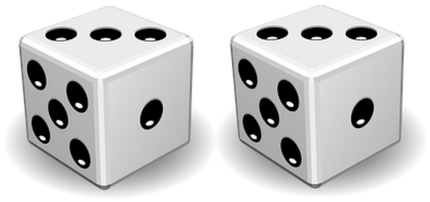


$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



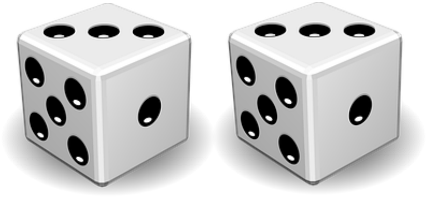
$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

(1,2)

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



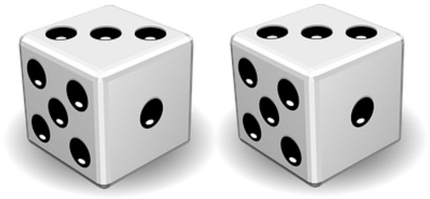
$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

(1,2) X = 2

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

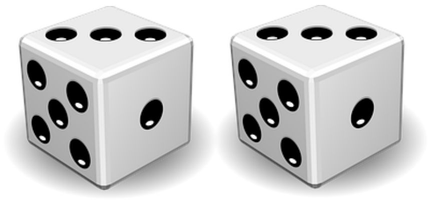
X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

(1,2) X = 2

(2,5)

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

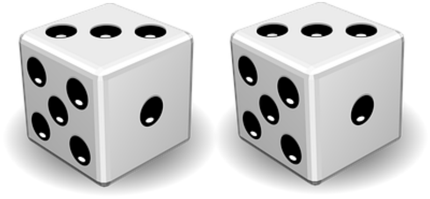
X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

(1,2) X = 2

(2,5) X = 1

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



$S = \{(1{,}1);\ (1{,}2);\ (1{,}3);\ \ldots;\ (3{,}3);\ (3{,}4);\ (3{,}4);\ \ldots;\ (6{,}5);\ (6{,}6)\}$

X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

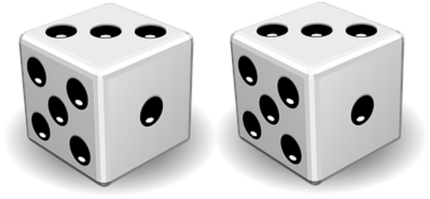
(1,2) X = 2

(2,5) X = 1

(4,6)

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Variável Aleatória**



$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

X = Quantidade de números menores que 3 em cada lançamento

(1,2) X = 2

(2,5) X = 1

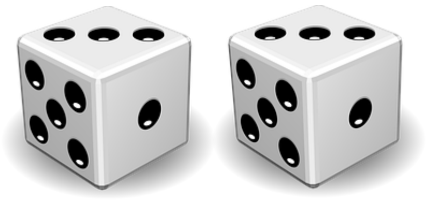
(4,6) X = 0

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Distribuição Uniforme**

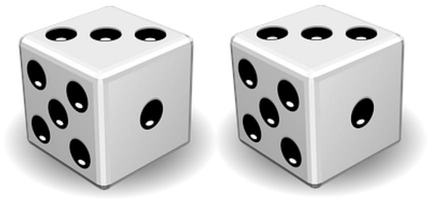
TERMOS E FERRAMENTAS

- **Distribuição Uniforme**



TERMOS E FERRAMENTAS

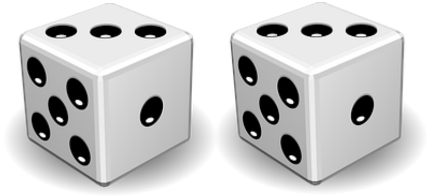
- **Distribuição Uniforme**



$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Distribuição Uniforme**

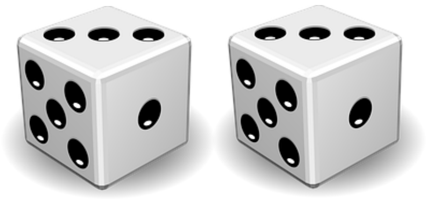


$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$

Y = Assume o resultado do lançamento

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Distribuição Uniforme**



$$S = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ \ldots;\ (3,3);\ (3,4);\ (3,4);\ \ldots;\ (6,5);\ (6,6)\}$$

Y = Assume o resultado do lançamento

$$P[(1,1)] = P[(1,2)] = \ldots = P[(6,6)] = \frac{1}{36}$$

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Valor esperado**

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Valor esperado**

X assuma os valores: $x_1, x_2, x_3, \ldots$

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Valor esperado**

X assuma os valores: $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Probabilidade de X assumir esses valores: $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots$

TERMOS E FERRAMENTAS

- **Valor esperado**

X assuma os valores: $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Probabilidade de X assumir esses valores: $p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de probabilidade

TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de probabilidade

TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de probabilidade

X = Naipe da carta ♣ ♦ ♥ ♠

TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de probabilidade

X = Naipe da carta ♣ ♦ ♥ ♠

$$P(X = \heartsuit) = P(X = \spadesuit) = P(X = \clubsuit) = P(X = \diamondsuit) = \frac{1}{4}$$

TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de verossimilhança

TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de verossimilhança

População

TERMOS E FERRAMENTAS

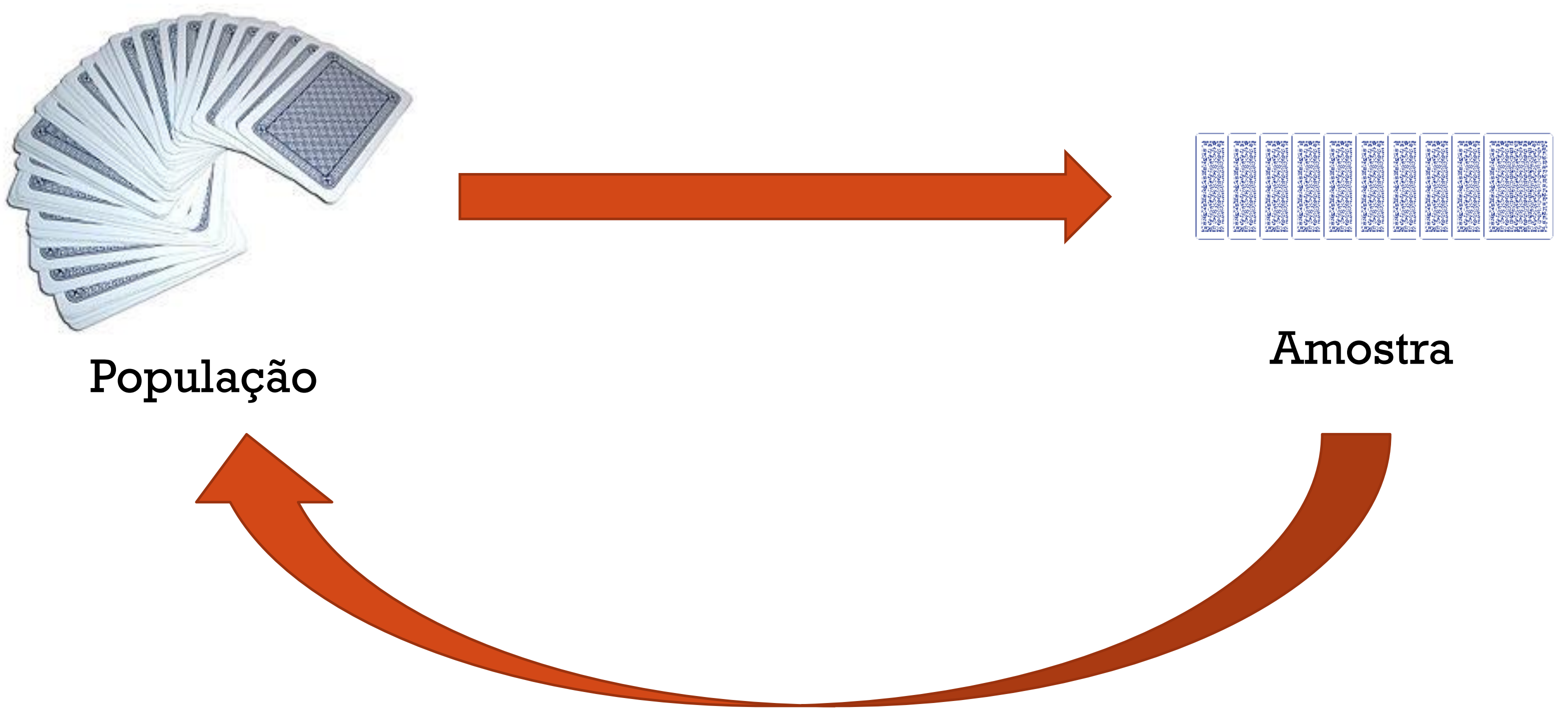
- Função de verossimilhança

População

Amostra

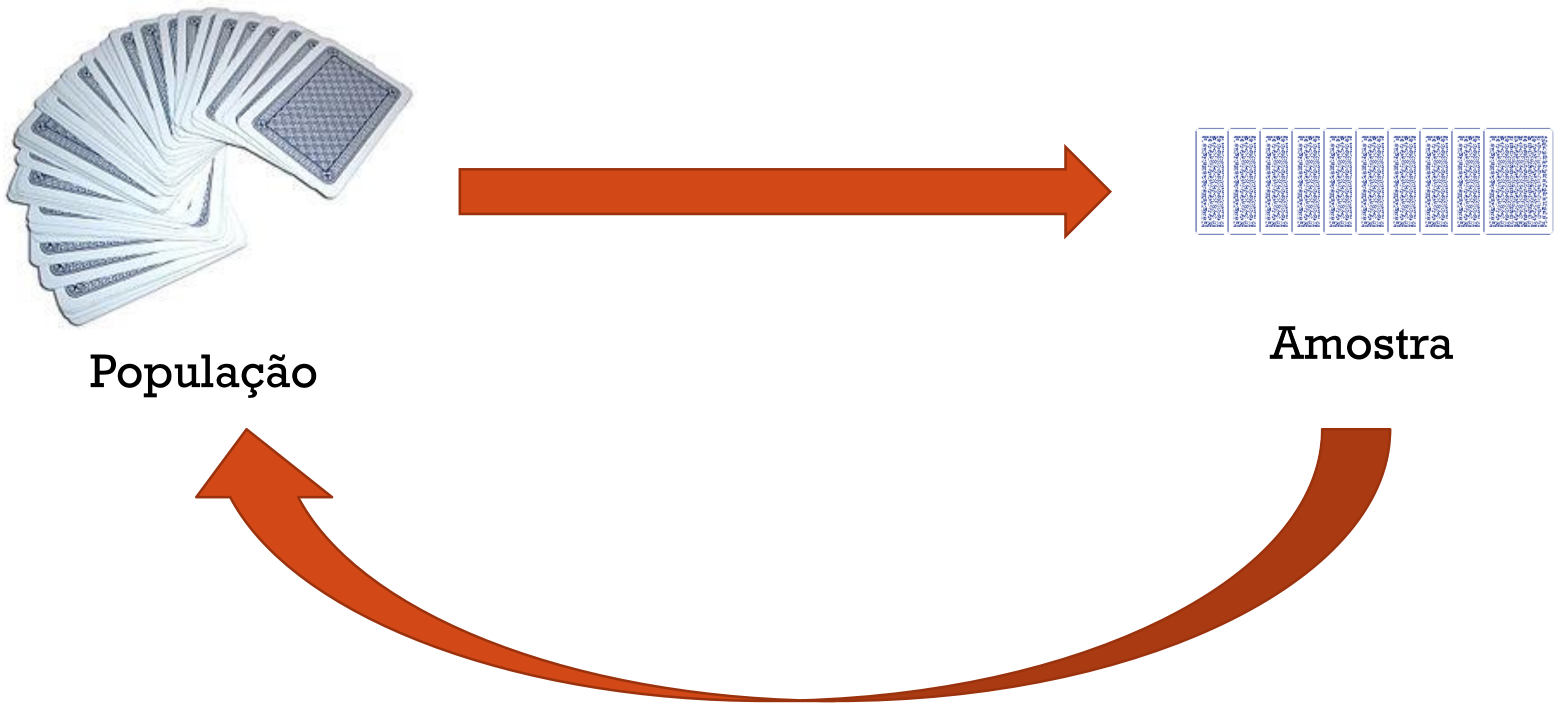
TERMOS E FERRAMENTAS

- Função de verossimilhança



TERMOS E FERRAMENTAS

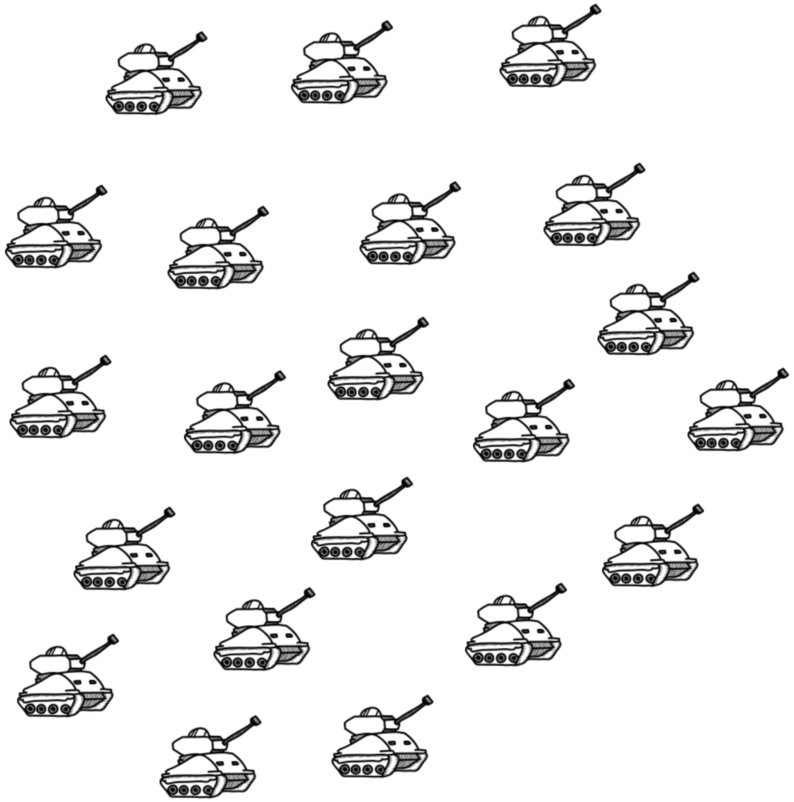
- Função de verossimilhança

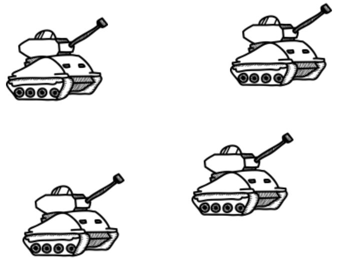


Função de Verossimilhança (L)

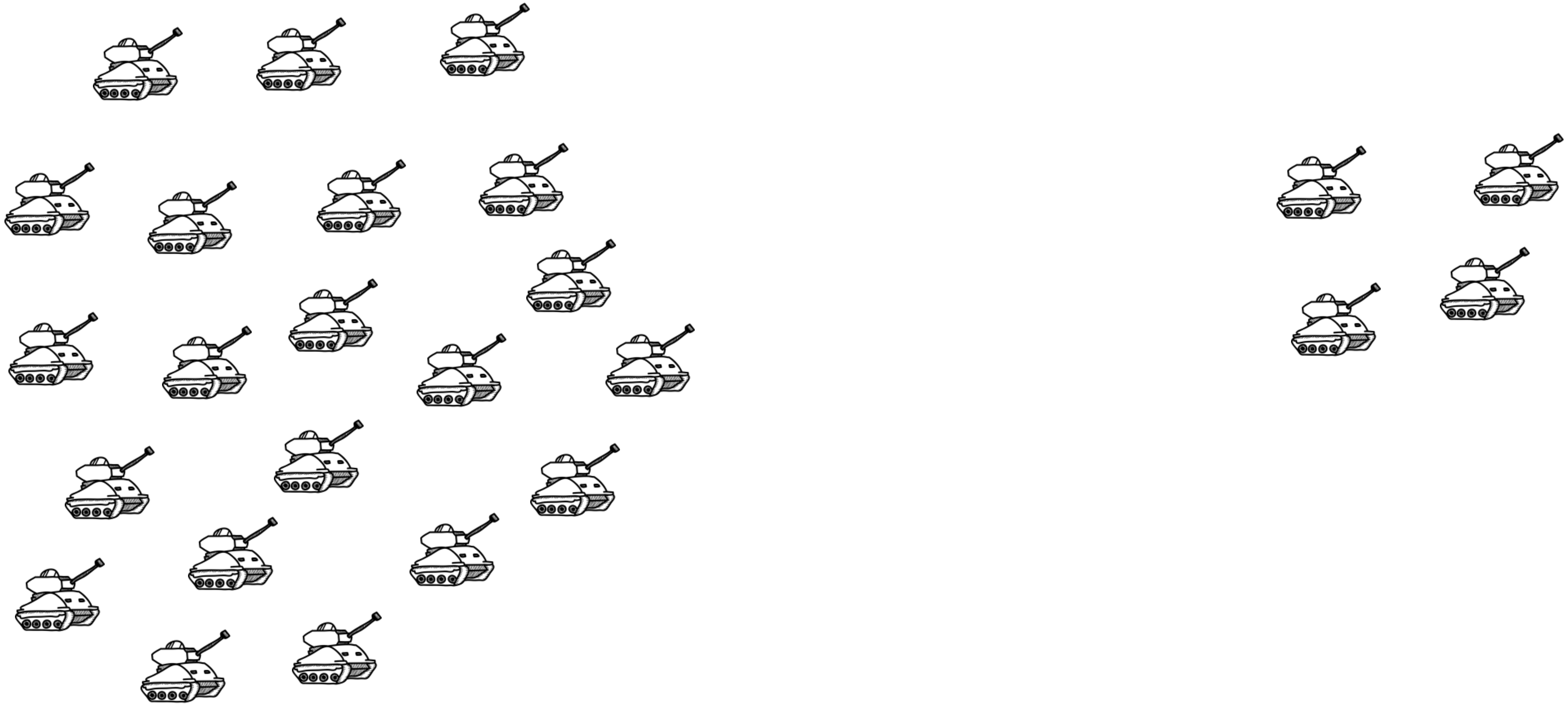
O PROBLEMA

O PROBLEMA



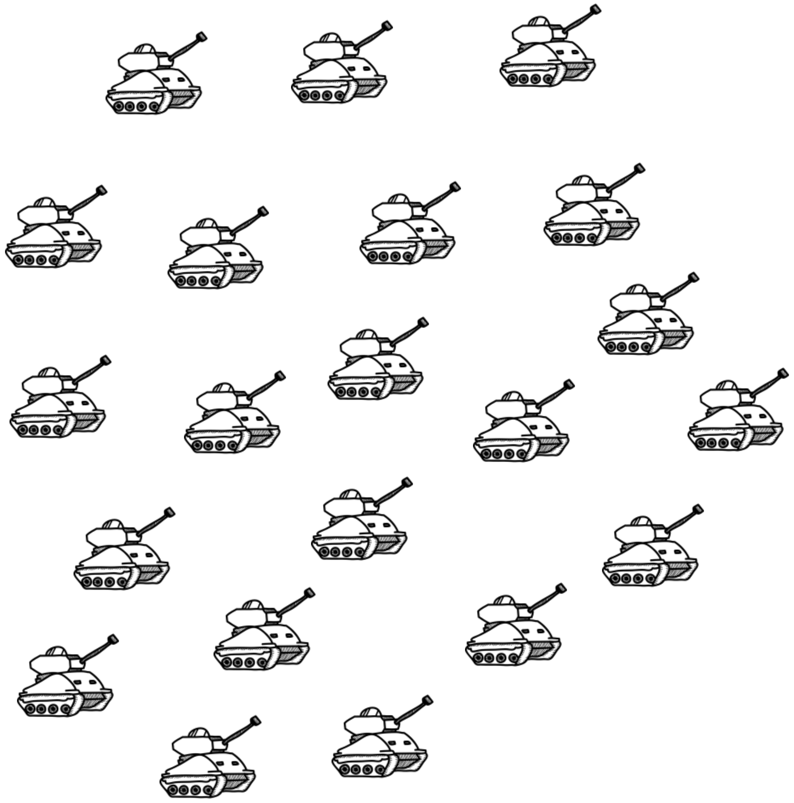


O PROBLEMA

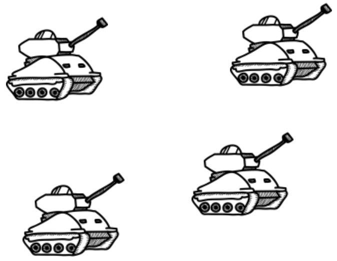


População = Tanques Produzidos

O PROBLEMA

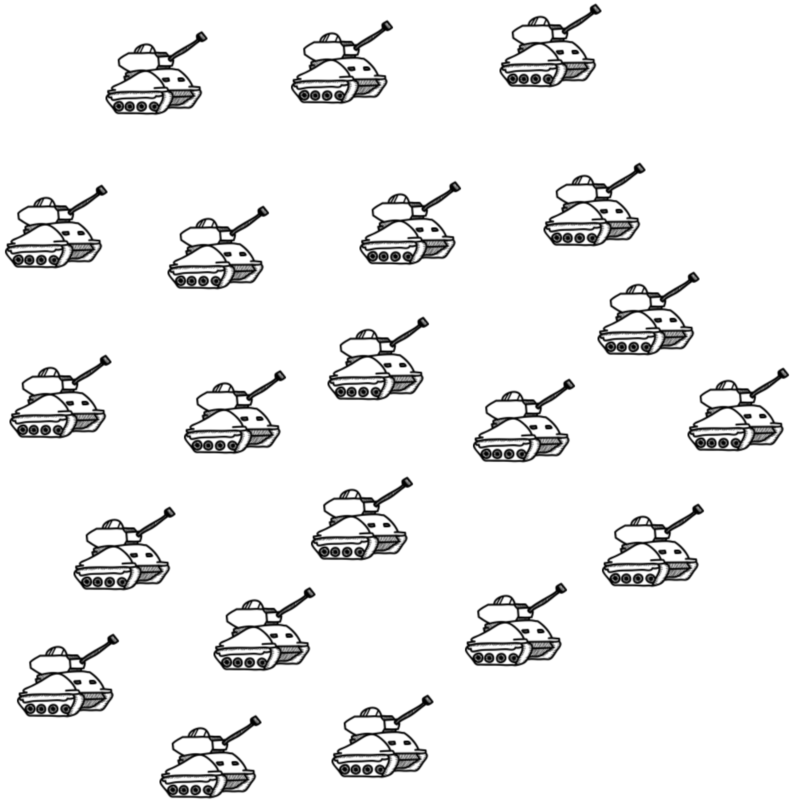


População = Tanques Produzidos

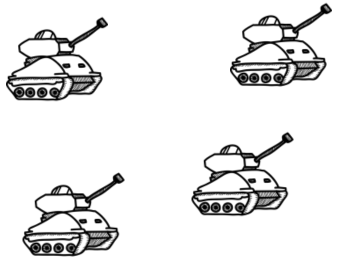


Amostra = Tanques capturados

O PROBLEMA



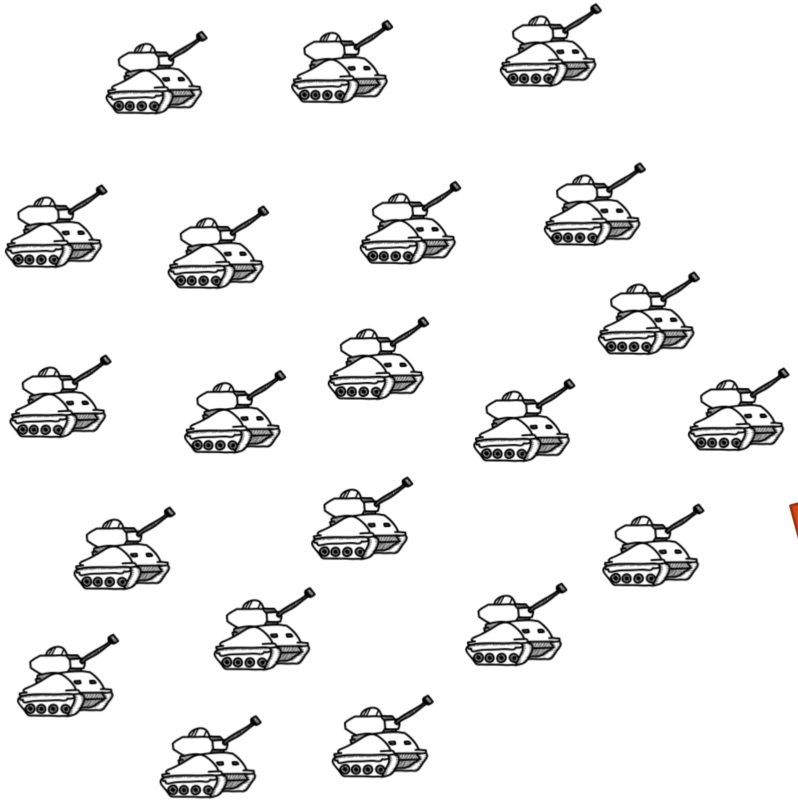
População = Tanques Produzidos

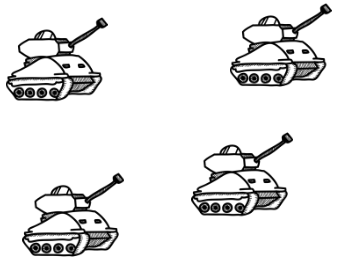


Amostra = Tanques capturados

Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

O PROBLEMA



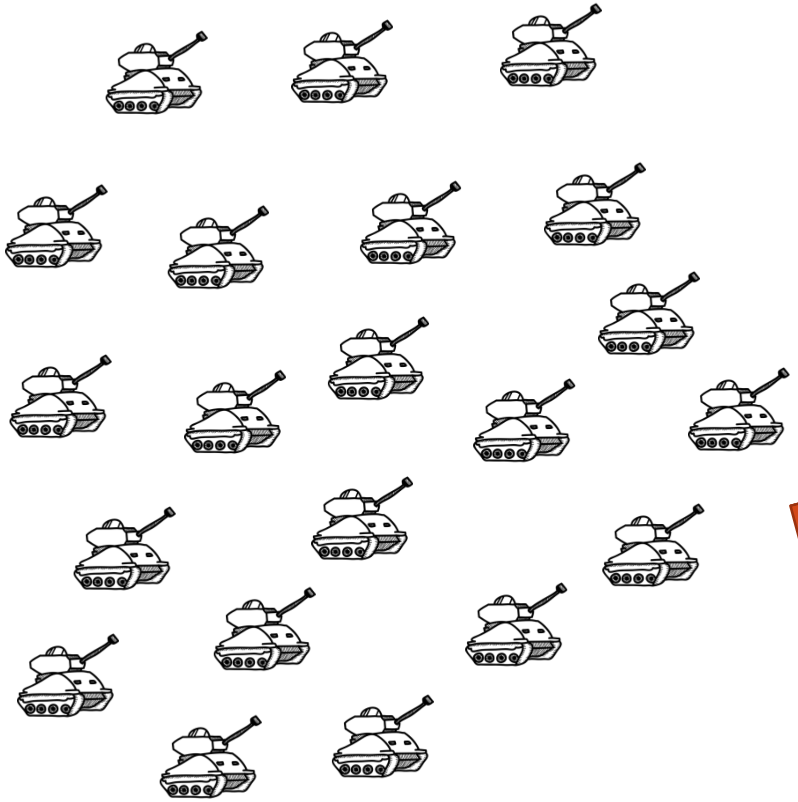


Amostra = Tanques capturados

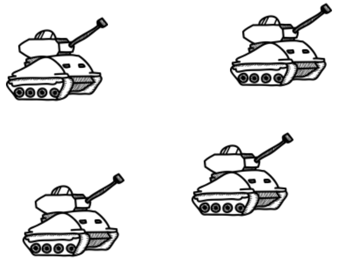
Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

População = Tanques Produzidos

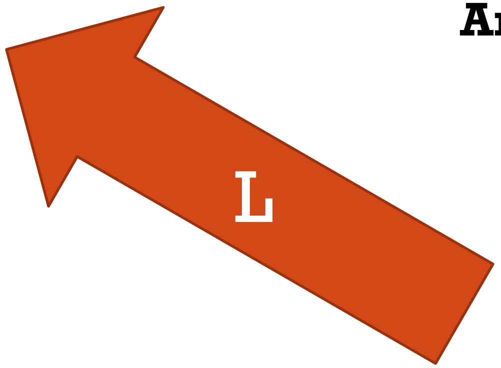
O PROBLEMA



População = Tanques Produzidos

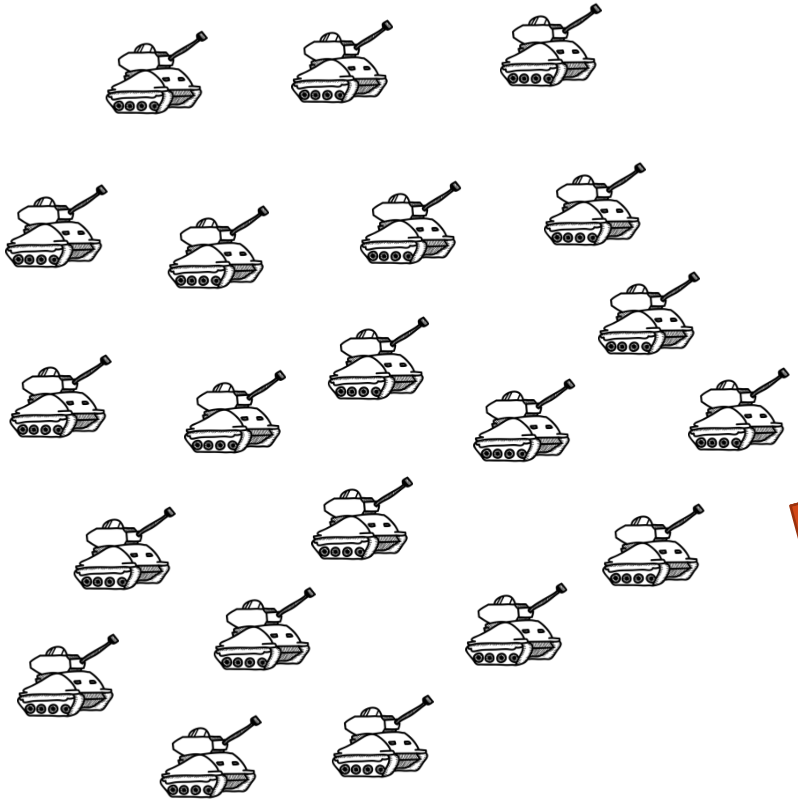


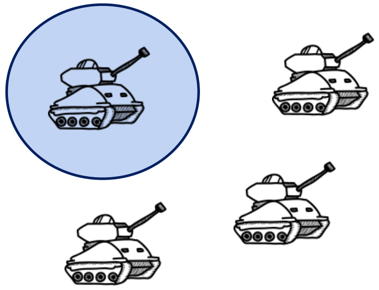
Amostra = Tanques capturados



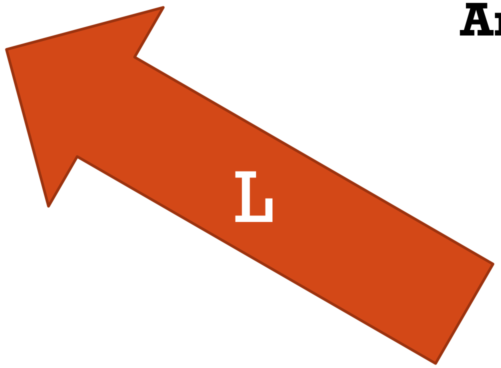
Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

O PROBLEMA





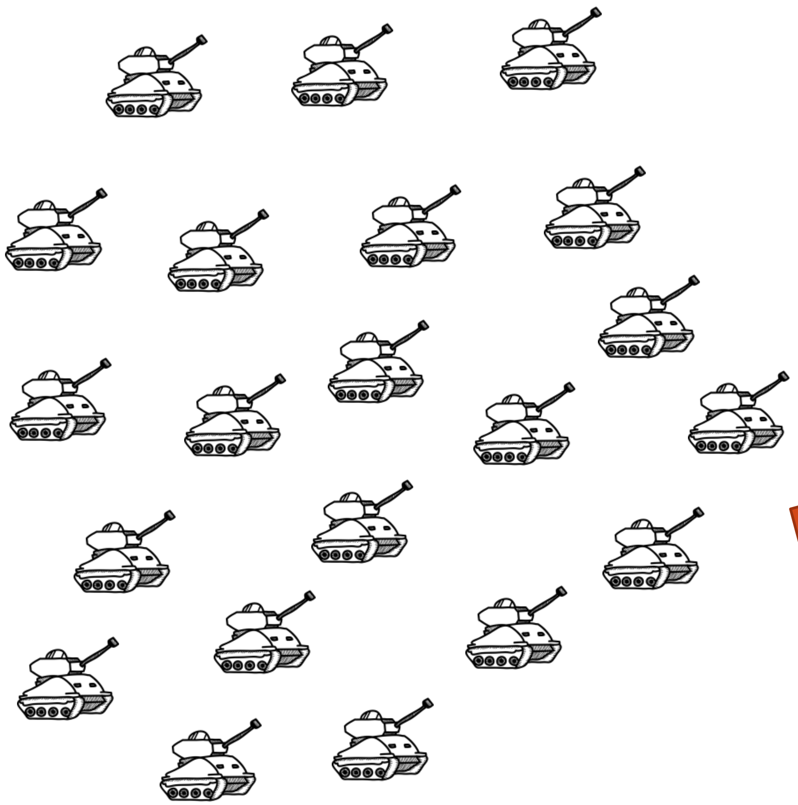
Amostra = Tanques capturados



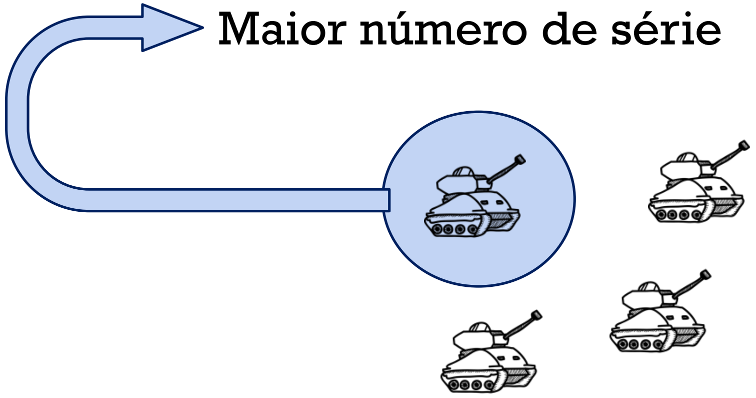
Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

População = Tanques Produzidos

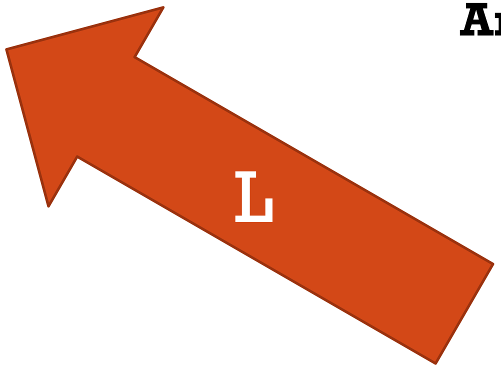
O PROBLEMA



População = Tanques Produzidos

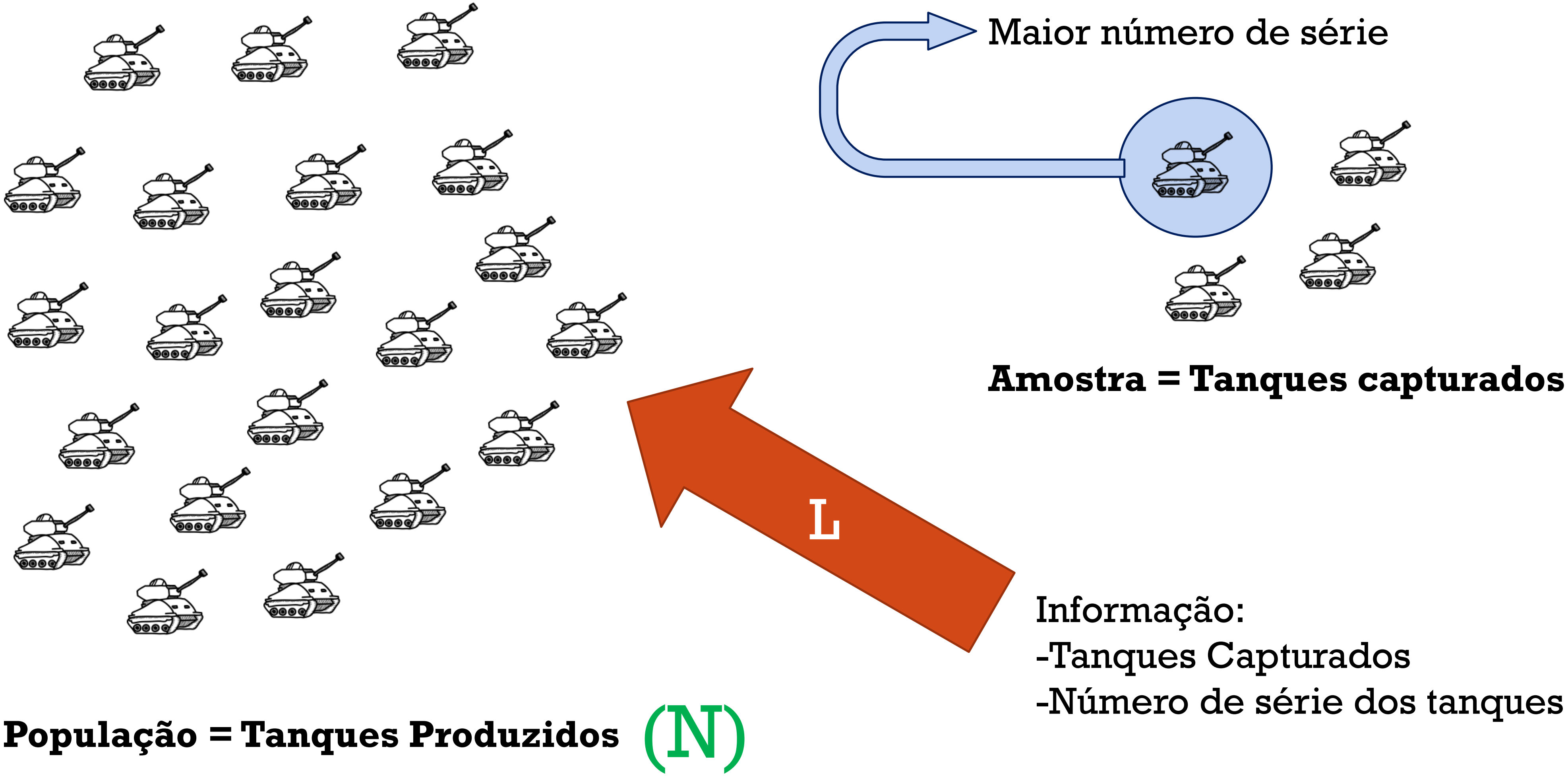


Amostra = Tanques capturados

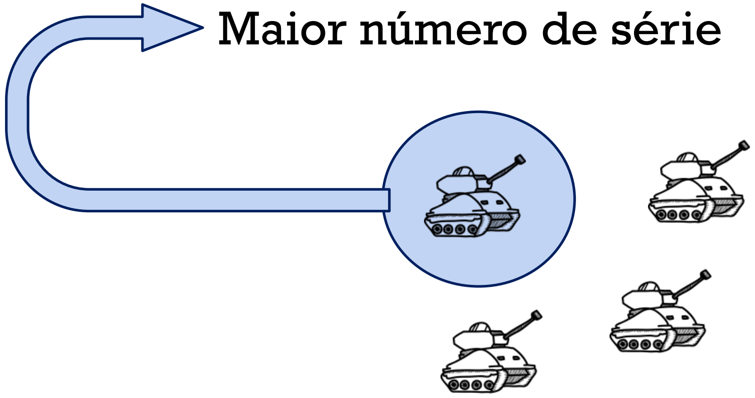


Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

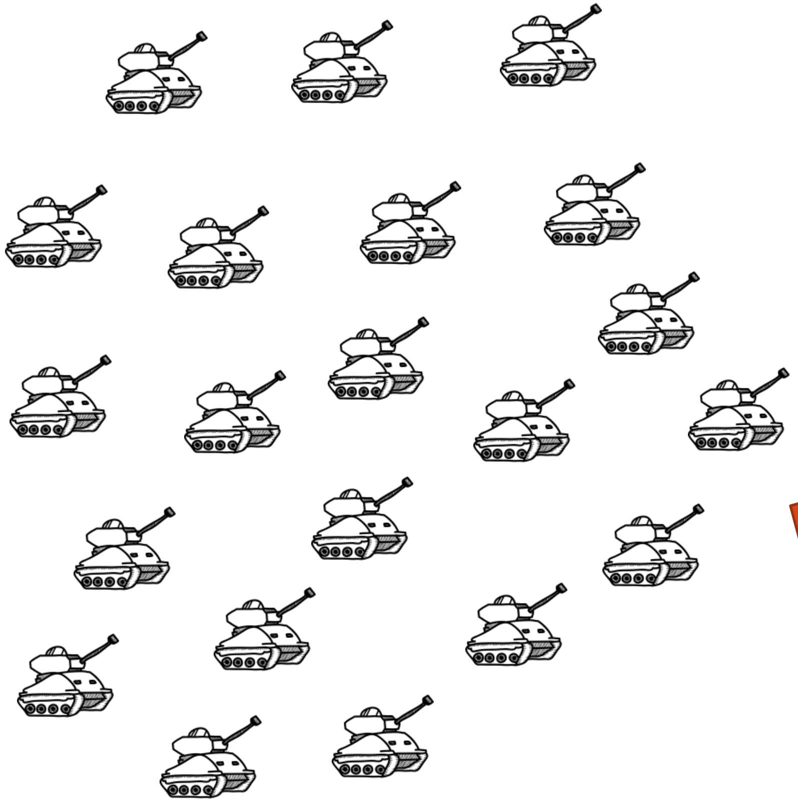
O PROBLEMA

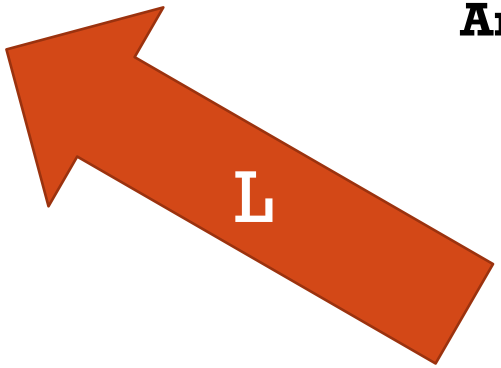

Maior número de série
Amostra = Tanques capturados
L
Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques
População = Tanques Produzidos (N)

O PROBLEMA



Amostra = Tanques capturados (n)

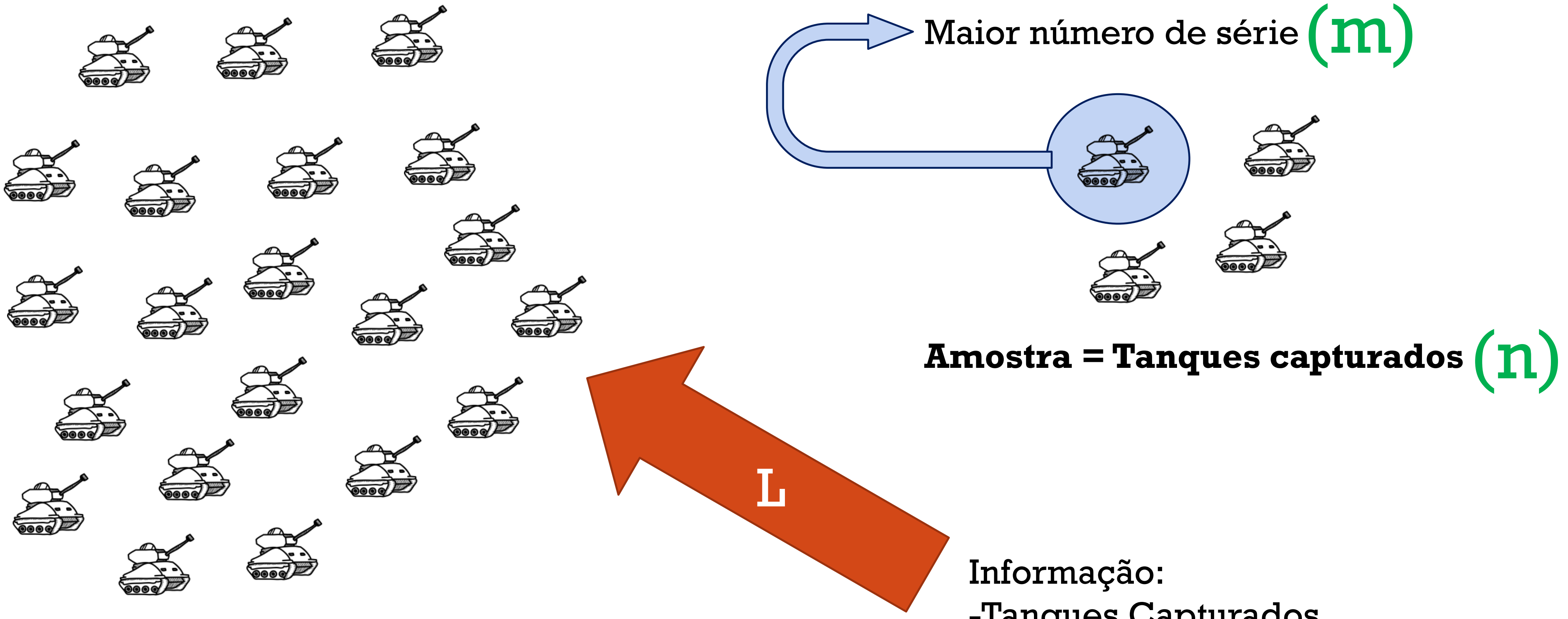




Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

População = Tanques Produzidos (N)

O PROBLEMA



Informação:
-Tanques Capturados
-Número de série dos tanques

População = Tanques Produzidos (N)

FORMAS DE CALCULAR

FORMAS DE CALCULAR

Análise Clássica

FORMAS DE CALCULAR

Análise Clássica

Análise Bayesiana

FORMAS DE CALCULAR

Análise Clássica

- Amostragem repetida

Análise Bayesiana

FORMAS DE CALCULAR

Análise Clássica

- Amostragem repetida

Análise Bayesiana

- Informação a priori

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Objetivo: Probabilidade amostra com maior número de série **m** e tamanho **n** entre todos os **N** tanques

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Objetivo: Probabilidade amostra com maior número de série **m** e tamanho **n** entre todos os **N** tanques
- 1) Amostras de tamanho **n** entre os **N** tanques (casos possíveis):

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Objetivo: Probabilidade amostra com maior número de série **m** e tamanho **n** entre todos os **N** tanques
- 1) Amostras de tamanho **n** entre os **N** tanques (casos possíveis):

$$C_{N,n} = \binom{N}{n}$$

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Objetivo: Probabilidade amostra com maior número de série **m** e tamanho **n** entre todos os **N** tanques
- 1) Amostras de tamanho **n** entre os **N** tanques (casos possíveis):

$$C_{N,n} = \binom{N}{n}$$

- 2) Amostras tamanho **n** e maior número de série **m** (casos favoráveis):

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Objetivo: Probabilidade amostra com maior número de série **m** e tamanho **n** entre todos os **N** tanques
- 1) Amostras de tamanho **n** entre os **N** tanques (casos possíveis):

$$C_{N,n} = \binom{N}{n}$$

- 2) Amostras tamanho **n** e maior número de série **m** (casos favoráveis):

$$C_{m-1,n-1} = \binom{m-1}{n-1}$$

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Probabilidade: Razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis:

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Probabilidade: Razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis:

$$P(m|N) = \begin{cases} \dfrac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, & n \leq m \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Probabilidade: Razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis:

$$P(m|N) = \begin{cases} \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, & n \leq m \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Função de Verossimilhança:

FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA

- Probabilidade: Razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis:

$$P(m|N) = \begin{cases} \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, & n \leq m \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Função de Verossimilhança:

$$L(N|m) = \begin{cases} \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, & n \leq m \leq N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ANÁLISE CLÁSSICA

ANÁLISE CLÁSSICA

- Variável Aleatória **X** = maior número de série

ANÁLISE CLÁSSICA

- Variável Aleatória **X** = maior número de série

$$E(X) = \sum_{m=n}^{N} mP(m|N) =$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Variável Aleatória **X** = maior número de série

$$E(X) = \sum_{m=n}^{N} mP(m|N) = \sum_{m=n}^{N} m\frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Variável Aleatória **X** = maior número de série

$$E(X) = \sum_{m=n}^{N} mP(m|N) = \sum_{m=n}^{N} m\frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$\Rightarrow \overline{m} =$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Variável Aleatória **X** = maior número de série

$$E(X) = \sum_{m=n}^{N} mP(m|N) = \sum_{m=n}^{N} m\frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$\Rightarrow \overline{m} = n + n\frac{\hat{N} - n}{n+1}$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Variável Aleatória **X** = maior número de série

$$E(X) = \sum_{m=n}^{N} mP(m|N) = \sum_{m=n}^{N} m\frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

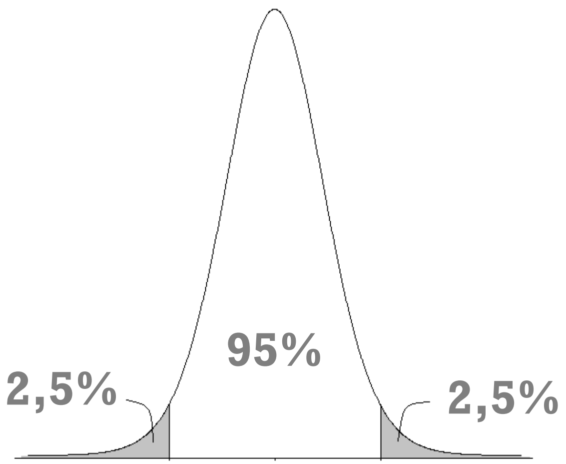
$$\Rightarrow \overline{m} = n + n\frac{\hat{N} - n}{n+1} \Rightarrow \hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança

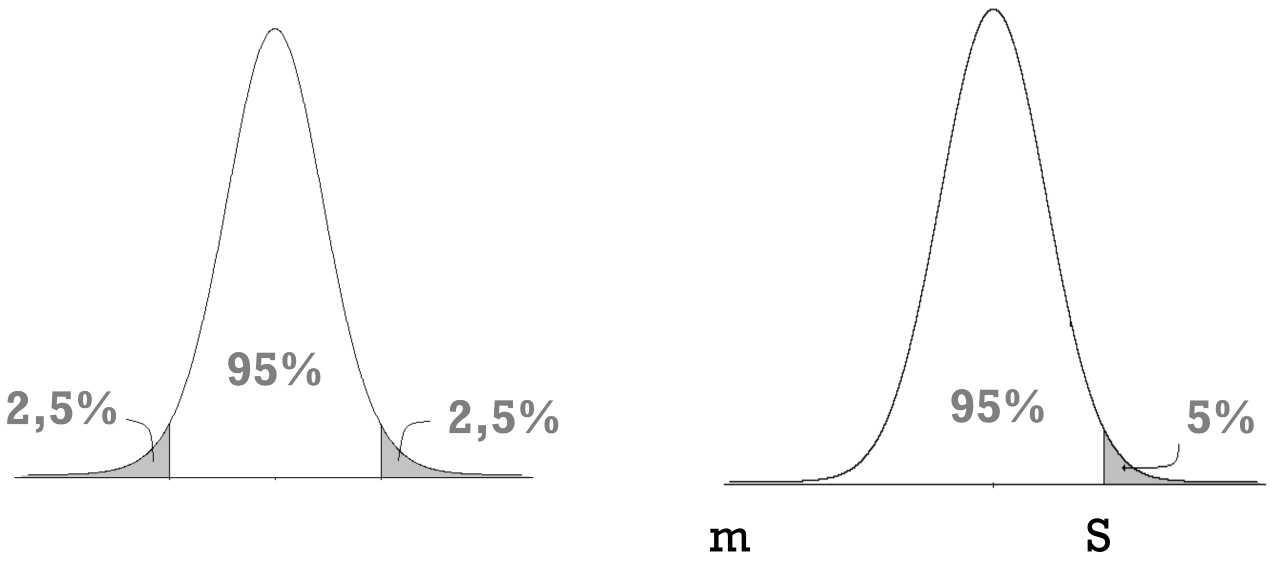
ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança



ANÁLISE CLÁSSICA

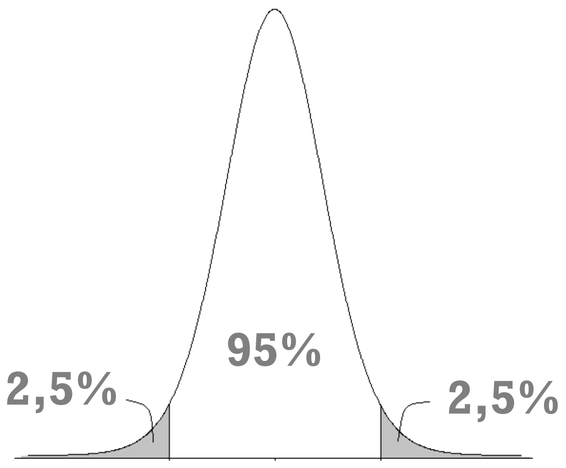
- Intervalo de Confiança

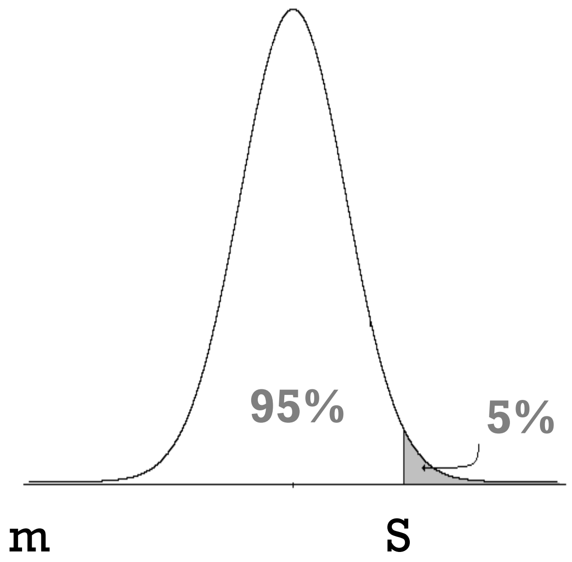


ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança

S = limitante superior do intervalo



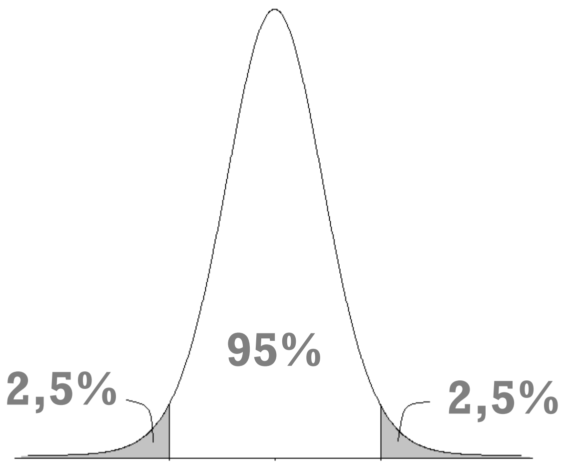


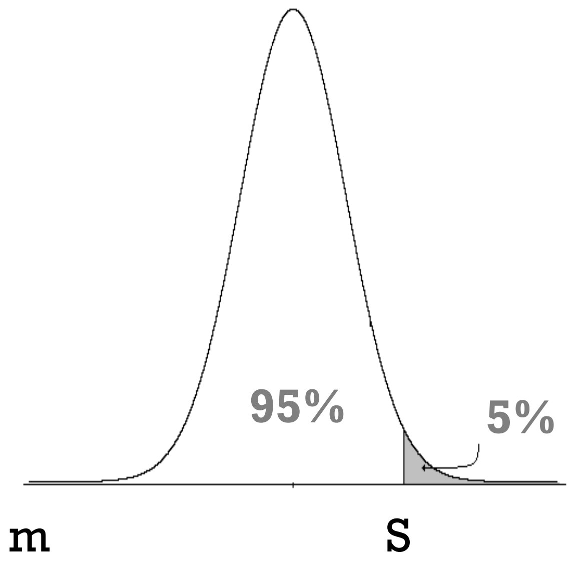
ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança

S = limitante superior do intervalo

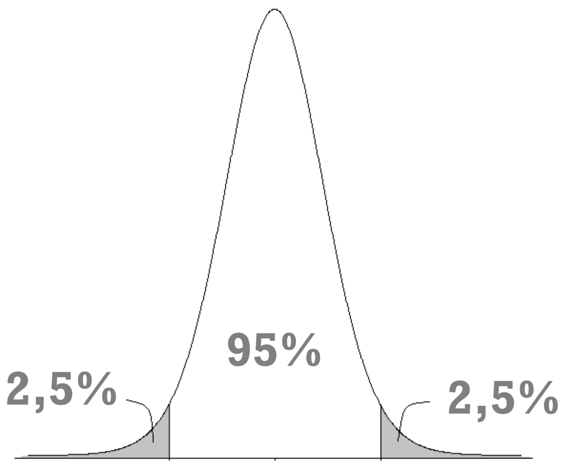
IC = [m, S]

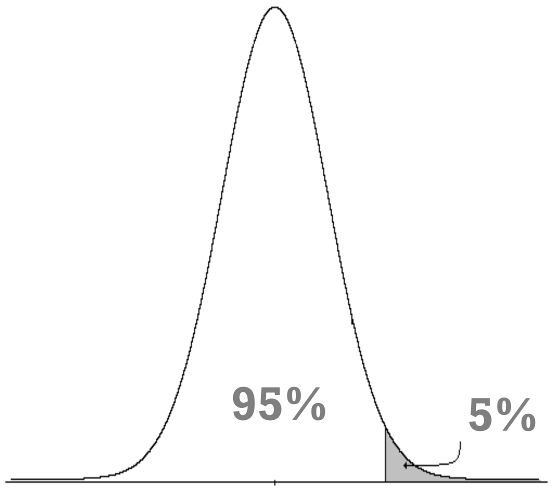




ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança





m S

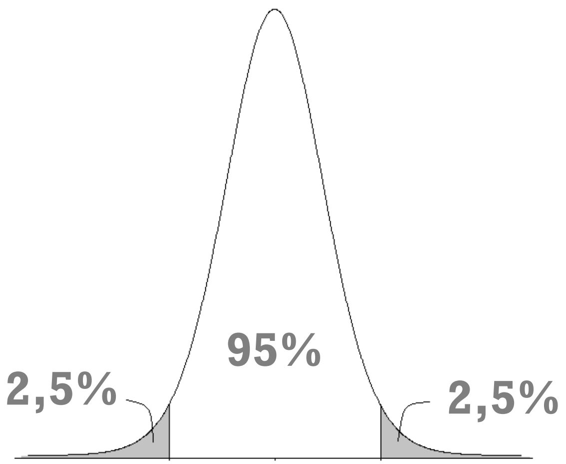
S = limitante superior do intervalo

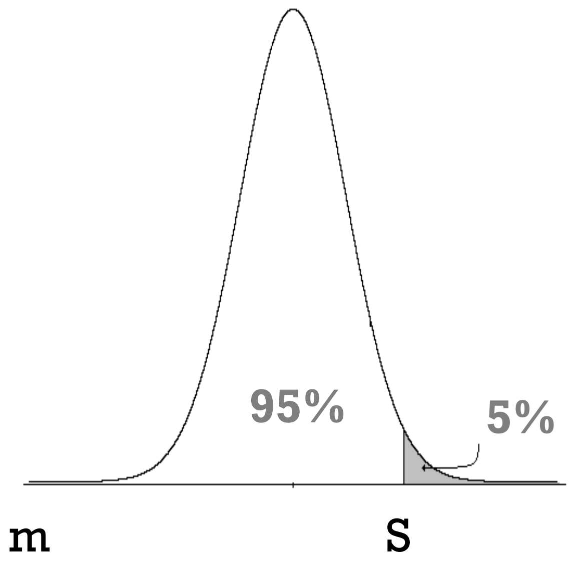
IC = [m, S]

$$\sum_{N=m}^{S} P(N|m) =$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança





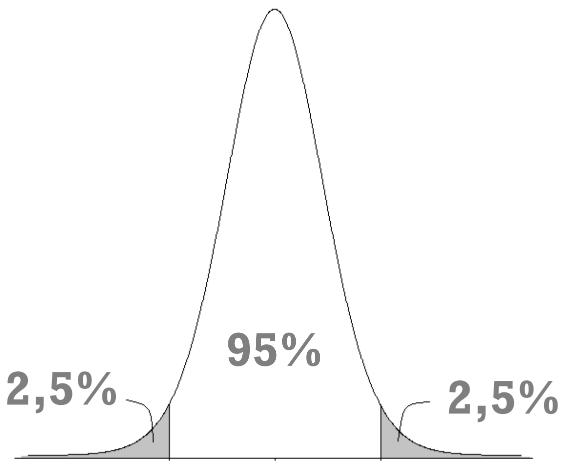
S = limitante superior do intervalo

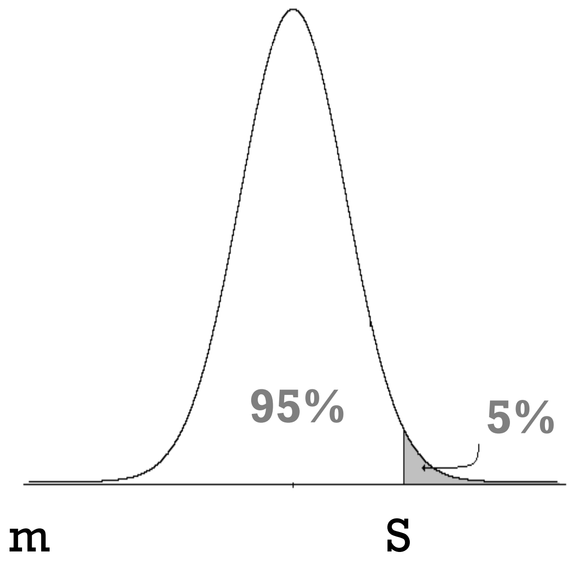
IC = [m, S]

$$\sum_{N=m}^{S} P(N|m) = \sum_{N=m}^{S} \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 0,95$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança





S = limitante superior do intervalo

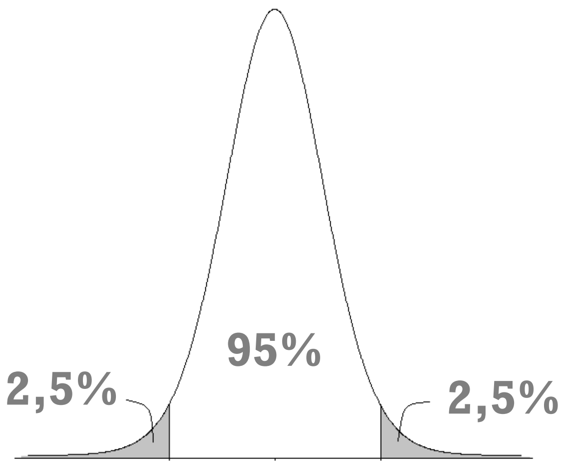
IC = [m, S]

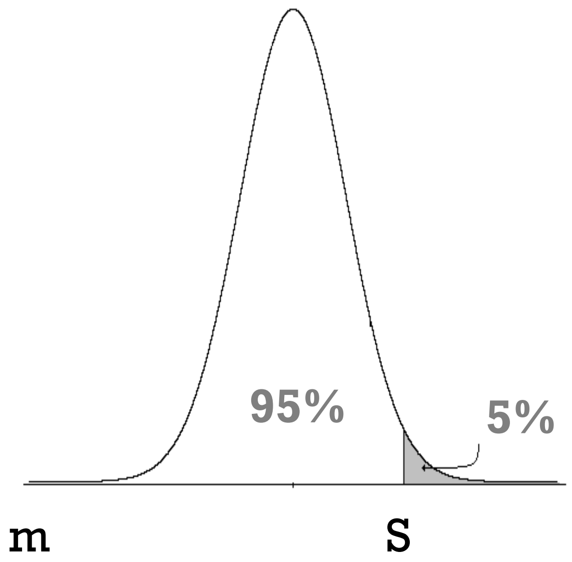
$$\sum_{N=m}^{S} P(N|m) = \sum_{N=m}^{S} \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 0,95$$

$$S = \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}$$

ANÁLISE CLÁSSICA

- Intervalo de Confiança





S = limitante superior do intervalo

IC = [m, S]

$$\sum_{N=m}^{S} P(N|m) = \sum_{N=m}^{S} \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 0,95$$

$$S = \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

ANÁLISE CLÁSSICA

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

25	27	35	49	84
120	155	173	215	219
269	317	349	353	355
387	397	465	485	495

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

25	27	35	49	84
120	155	173	215	219
269	317	349	353	355
387	397	465	485	495

n = 20

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

25	27	35	49	84
120	155	173	215	219
269	317	349	353	355
387	397	465	485	495

n = 20

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

25	27	35	49	84
120	155	173	215	219
269	317	349	353	355
387	397	465	485	495

$n = 20$ $m = 495$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_1 = \left[495, \frac{495}{0,05^{\frac{1}{20}}}\right] \approx [495, 575]$$

ANÁLISE BAYESIANA

ANÁLISE BAYESIANA

Função de Verossimilhança
+
Informação a Priori

ANÁLISE BAYESIANA

Função de Verossimilhança
+
Informação a Priori

$\longrightarrow$

Informação a Posteriori

ANÁLISE BAYESIANA

Função de Verossimilhança
+
Informação a Priori

$\xrightarrow{\text{Teorema de Bayes}}$

Informação a Posteriori

ANÁLISE BAYESIANA

Função de Verossimilhança
+
Informação a Priori

$\xrightarrow{\text{Teorema de Bayes}}$

Informação a Posteriori

- Informação a Priori: População segue uma distribuição uniforme

ANÁLISE BAYESIANA

Função de Verossimilhança
+
Informação a Priori

Teorema de Bayes $\longrightarrow$

Informação a Posteriori

- Informação a Priori: População segue uma distribuição uniforme

$$P(N) = \begin{cases} \frac{1}{N^*}, & m \leq N \leq N^* \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ANÁLISE BAYESIANA

Função de Verossimilhança
+
Informação a Priori

Teorema de Bayes $\longrightarrow$

Informação a Posteriori

- Informação a Priori: População segue uma distribuição uniforme

$$P(N) = \begin{cases} \frac{1}{N^*}, & m \leq N \leq N^* \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow P(N) = \begin{cases} \frac{1}{2000}, & m \leq N \leq 2000 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Teorema de Bayes

ANÁLISE BAYESIANA

- Teorema de Bayes

$$P(N|m) = \frac{L(N|m)P(N)}{\sum_{N=m}^{\infty}(L(N|m)P(N))}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Teorema de Bayes

$$P(N|m) = \frac{L(N|m)P(N)}{\sum_{N=m}^{\infty}(L(N|m)P(N))}$$

$$\Rightarrow \; P(N|m) = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\sum_{N=m}^{\infty}\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}} =$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Teorema de Bayes

$$P(N|m) = \frac{L(N|m)P(N)}{\sum_{N=m}^{\infty}(L(N|m)P(N))}$$

$$\Rightarrow \; P(N|m) = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\sum_{N=m}^{\infty}\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}} = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\binom{m-1}{n-1}\frac{1}{2000}\sum_{N=m}^{\infty}\binom{N}{n}^{-1}}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Teorema de Bayes

$$P(N|m) = \frac{L(N|m)P(N)}{\sum_{N=m}^{\infty}(L(N|m)P(N))}$$

$$\Rightarrow \; P(N|m) = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\sum_{N=m}^{\infty}\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}} = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\binom{m-1}{n-1}\frac{1}{2000}\sum_{N=m}^{\infty}\binom{N}{n}^{-1}} = \frac{\binom{N}{n}^{-1}}{\sum_{N=m}^{\infty}\binom{N}{n}^{-1}}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Teorema de Bayes

$$P(N|m) = \frac{L(N|m)P(N)}{\sum_{N=m}^{\infty}(L(N|m)P(N))}$$

$$\Rightarrow \; P(N|m) = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\sum_{N=m}^{\infty}\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}} = \frac{\binom{m-1}{n-1}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2000}}{\binom{m-1}{n-1}\frac{1}{2000}\sum_{N=m}^{\infty}\binom{N}{n}^{-1}} = \frac{\binom{N}{n}^{-1}}{\sum_{N=m}^{\infty}\binom{N}{n}^{-1}}$$

$$\Rightarrow \; P(N|m) = (n-1)\frac{(m-1)!}{(m-n)!}\frac{(N-m)!}{N!}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Valor esperado e variância de **N|m:**

ANÁLISE BAYESIANA

- Valor esperado e variância de **N|m:**

$$E(N|m) = \mu = \frac{n-1}{n-2}(m-1)$$

$$Var(N|m) = \sigma^2 = \frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Valor esperado e variância de **N|m:**

$$E(N|m) = \mu = \frac{n-1}{n-2}(m-1)$$

$$Var(N|m) = \sigma^2 = \frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}$$

$$N = \mu \pm \sigma =$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Valor esperado e variância de **N|m:**

$$E(N|m) = \mu = \frac{n-1}{n-2}(m-1)$$

$$Var(N|m) = \sigma^2 = \frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}$$

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

ANÁLISE BAYESIANA

- Valor esperado e variância de **N|m:**

$$E(N|m) = \mu = \frac{n-1}{n-2}(m-1)$$

$$Var(N|m) = \sigma^2 = \frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}$$

$$\underbrace{N = \mu \pm \sigma}_{\text{Intervalo De Credibilidade}} = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

25	27	35	49	84
120	155	173	215	219
269	317	349	353	355
387	397	465	485	495

$n = 20$ $m = 495$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_1 = \left[495, \frac{495}{0,05^{\frac{1}{20}}}\right] \approx [495, 575]$$

Análise Bayesiana

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_1 = \left[495, \frac{495}{0,05^{\frac{1}{20}}}\right] \approx [495, 575]$$

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_1 = \left[495, \frac{495}{0,05^{\frac{1}{20}}}\right] \approx [495, 575]$$

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

$$N_{b_1} \approx 521 \pm 28$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_1 = \left[495, \frac{495}{0,05^{\frac{1}{20}}}\right] \approx [495, 575]$$ ⟹ Amplitude = 80

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

$$N_{b_1} \approx 521 \pm 28$$

EXEMPLO 1: 20 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_1} = 495\left(\frac{20+1}{20}\right) - 1 \approx 519$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_1 = \left[495, \frac{495}{0,05^{\frac{1}{20}}}\right] \approx [495, 575]$$

Amplitude = 80

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

$$N_{b_1} \approx 521 \pm 28$$

Amplitude = 56

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

21	27	40	44	65
67	78	88	111	128
146	147	152	162	195
201	223	245	251	252
266	274	276	278	296
305	323	326	328	333
369	375	398	406	416
418	448	476	484	497

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

21	27	40	44	65
67	78	88	111	128
146	147	152	162	195
201	223	245	251	252
266	274	276	278	296
305	323	326	328	333
369	375	398	406	416
418	448	476	484	497

n = 40

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

21	27	40	44	65
67	78	88	111	128
146	147	152	162	195
201	223	245	251	252
266	274	276	278	296
305	323	326	328	333
369	375	398	406	416
418	448	476	484	497

n = 40

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

- Números de Série:

Gerador de números: **N = 500**

21	27	40	44	65
67	78	88	111	128
146	147	152	162	195
201	223	245	251	252
266	274	276	278	296
305	323	326	328	333
369	375	398	406	416
418	448	476	484	497

n = 40 m = 497

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

Análise Bayesiana

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{C_2} = 497\frac{40+1}{40} - 1 \approx 508$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = \overline{m}\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{C_2} = 497\frac{40+1}{40} - 1 \approx 508$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_2 = \left[497, \frac{497}{0,05^{\frac{1}{40}}}\right] \approx [497, 536]$$

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_2} = 497\frac{40+1}{40} - 1 \approx 508$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_2 = \left[497, \frac{497}{0,05^{\frac{1}{40}}}\right] \approx [497, 536]$$

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

$$N_{b_2} \approx 509 \pm 13$$

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_2} = 497\frac{40+1}{40} - 1 \approx 508$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_2 = \left[497, \frac{497}{0,05^{\frac{1}{40}}}\right] \approx [497, 536]$$

Amplitude = 39
(era 80)

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

$$N_{b_2} \approx 509 \pm 13$$

EXEMPLO 2: 40 TANQUES CAPTURADOS

Análise Clássica

$$\hat{N} = m\frac{n+1}{n} - 1$$

$$N_{c_2} = 497\frac{40+1}{40} - 1 \approx 508$$

$$IC = \left[m, \frac{m}{0,05^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$IC_2 = \left[497, \frac{497}{0,05^{\frac{1}{40}}}\right] \approx [497, 536]$$

Amplitude = 39
(era 80)

Análise Bayesiana

$$N = \mu \pm \sigma = \frac{n-1}{n-2}(m-1) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)(m-n-1)}{(n-2)^2(n-3)}}$$

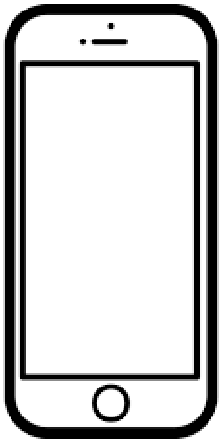
$$N_{b_2} \approx 509 \pm 13$$

(era 56)
Amplitude = 26

ONDE PODEMOS USAR ATUALMENTE?

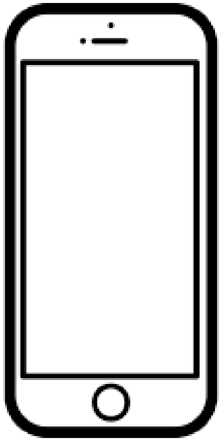
ONDE PODEMOS USAR ATUALMENTE?

- iPhones



ONDE PODEMOS USAR ATUALMENTE?

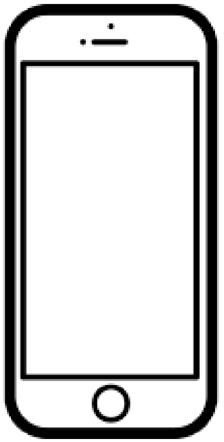
- iPhones



Objetivo: Estimar número de iPhones vendidos

ONDE PODEMOS USAR ATUALMENTE?

- iPhones



Objetivo: Estimar número de iPhones vendidos

Até setembro de 2008: **9,1 milhões** de iPhones vendidos no ano

REFERÊNCIAS

- **[Goodman (1954)]** Goodman, L. A. (1954). "Some Practical Techniques in Serial Number Analysis". Journal of the American Statistical Association, 49:97–112.

- **[Höhle (2006)]** Höhle, H. (2006). "Bayesian Estimation of the Size of a Population". Collaborative Research Center, 386, Paper 499.

- **[Wolfram Research (2004)]** Wolfram Research (2004). "Hypergeometric Differential Equation". Disponínel em: http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricDifferentialEquation.html Acesso em: 03 de março de 2019.

- **[Marlow (1965)]** Marlow, W. (1965). "Factorial Distributions". The Annals of Mathematical Statistics, 36:1066–1068.

- **[Arthur (2008)]** Arthur, Charles (2008). "Why iPhones are just like German tanks". Disponível em: https://www.theguardian.com/technology/blog/2008/oct/08/iphone.apple Acesso em: 03 de março de 2019.

DÚVIDAS?