A Curva de Peano e um demônio da Tasmânia cego puntiforme infinitamente rápido

(Um problema da III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária)

Érik Amorim

(ICMC - USP São Carlos)

05/2012

Introdução

Objetivo: resolver o problema 7 da *III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária* (2000) porque ele é legal! E não precisa de matemática complicada.
http://oc.uan.edu.co/oimu/oimu.htm

Introdução

Objetivo: resolver o problema 7 da *III Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária* (2000) porque ele é legal! E não precisa de matemática complicada.
http://oc.uan.edu.co/oimu/oimu.htm

A ideia da solução do problema foi apresentada pelo prof. Carlos Gustavo Moreira (Gugu) do IMPA em uma palestra sobre problemas legais de análise. Os créditos da solução vão para ele!
http://www.impa.br/opencms/pt/pesquisa/pesquisa_pesquisadores/pesquisadores_carlos_gustavo_moreira/pesquisadores_carlos_gustavo_moreira.html

El problema

Problema 7 (8 puntos)

En el plano se mueve de cualquier manera un punto (un cerdo) con velocidad no superior a $1km/h$, describiendo una curva continua $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, donde $[0,1]$ es un intervalo de tiempo de una hora. Se sabe que el cerdo se encuentra inicialmente en un cuadrado de lado 8km. En el centro de este cuadrado se encuentra un demonio de Tasmania ciego que no puede saber la posición del cerdo, pero puede moverse con cualquier velocidad. Encontrar una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (el camino recorrido por el demonio de Tasmania) tal que en algún momento de tiempo $t \in [0,1]$ se obtiene la igualdad $\gamma(t) = \lambda(t)$, es decir, el demonio de Tasmania atrapa al cerdo independientemente del camino que éste último escoja.

Traduzindo...

Problema 7 (8 pontos)

No plano se move de qualquer maneira um ponto (um porco) com velocidade não superior a $1km/h$, descrevendo uma curva contínua $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, onde $[0,1]$ é um intervalo de tempo de uma hora. Sabe-se que o porco se encontra inicialmente em um quadrado de lado $8km$. No centro deste quadrado se encontra um demônio da Tasmânia cego que não pode saber a posição do porco, mas pode se mover com qualquer velocidade. Encontrar uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (o caminho percorrido pelo demônio da Tasmânia) tal que em algum momento de tempo $t \in [0,1]$ se obtém a igualdade $\gamma(t) = \lambda(t)$, isto é, o demônio da Tasmânia captura o porco independentemente do caminho que este último escolha.

Pré-requisitos

Demônio da Tasmânia:

Porco:

Pré-requisitos

Demônio da Tasmânia:

Porco:

Pré-requisitos

Demônio da Tasmânia:

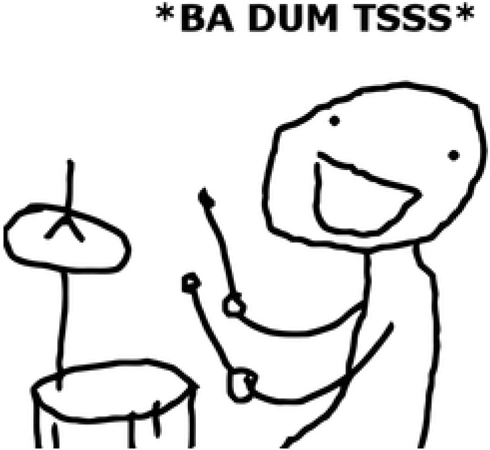
Porco:

Pré-requisitos

Curva de Peano:

Pré-requisitos

Curva de Peano:


BA DUM TSSS

Pré-requisitos

Curva de Peano:

Pré-requisitos

Curva de Peano:

Curvas no plano

Uma curva no plano é uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$.

Curvas no plano

Uma curva no plano é uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Se $[a, b]$ representa um intervalo de tempo, $f(t)$ representa o ponto do plano por onde a curva está passando no instante t.

Curvas no plano

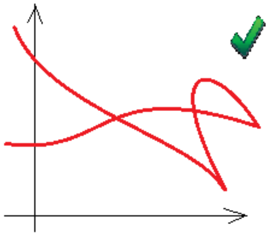
Uma curva no plano é uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Se $[a, b]$ representa um intervalo de tempo, $f(t)$ representa o ponto do plano por onde a curva está passando no instante t. Se desenharmos todos os infinitos pontos $f(t)$, $t \in [a, b]$, eles formarão um caminho, nossa noção intuitiva de curva.

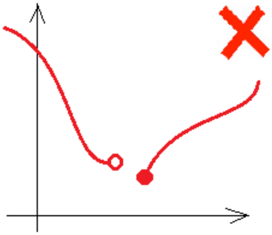
Curvas no plano

Uma curva no plano é uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
Se $[a, b]$ representa um intervalo de tempo, $f(t)$ representa o ponto do plano por onde a curva está passando no instante t.
Se desenharmos todos os infinitos pontos $f(t)$, $t \in [a, b]$, eles formarão um caminho, nossa noção intuitiva de curva.
Dizer que a função é contínua significa que esse caminho não dá "saltos".

Curvas no plano

Uma curva no plano é uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$.
Se $[a, b]$ representa um intervalo de tempo, $f(t)$ representa o ponto do plano por onde a curva está passando no instante t.
Se desenharmos todos os infinitos pontos $f(t)$, $t \in [a, b]$, eles formarão um caminho, nossa noção intuitiva de curva.
Dizer que a função é contínua significa que esse caminho não dá "saltos".





Curva de Peano

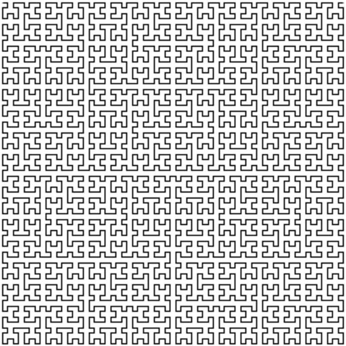
Uma Curva de Peano é uma curva que passa por todos os pontos de uma “região com área” do plano, por exemplo um quadrado.

Curva de Peano

Uma Curva de Peano é uma curva que passa por todos os pontos de uma "região com área" do plano, por exemplo um quadrado. É um objeto não intuitivo: uma linha contínua sem espessura que passa tantas vezes dentro de um quadrado que acaba pintando-o por inteiro!

Curva de Peano

Uma Curva de Peano é uma curva que passa por todos os pontos de uma “região com área” do plano, por exemplo um quadrado. É um objeto não intuitivo: uma linha contínua sem espessura que passa tantas vezes dentro de um quadrado que acaba pintando-o por inteiro!



Curva de Peano

No problema, o caminho a ser percorrido por Taz© obviamente deve ser uma curva de Peano.

Curva de Peano

No problema, o caminho a ser percorrido por Taz© obviamente deve ser uma curva de Peano.

Curva de Peano

No problema, o caminho a ser percorrido por Taz© obviamente deve ser uma curva de Peano.

Mas uma especial: ela intercepta no momento certo qualquer outra curva (não tão rápida) com ponto inicial dentro do quadrado!

Como construir curvas de Peano

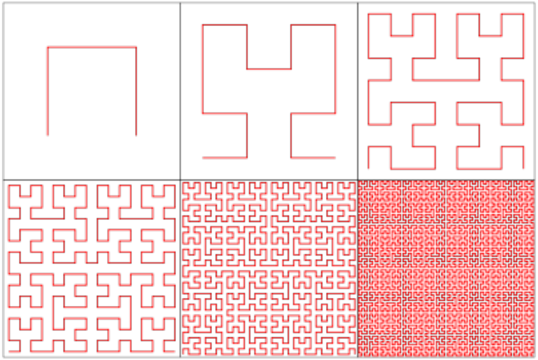
A Curva de Peano que recobre um quadrado é o limite de uma sequência de curvas.

Como construir curvas de Peano

A Curva de Peano que recobre um quadrado é o limite de uma sequência de curvas. Devem-se construir curvas cada vez mais complicadas, que ditam o comportamento do próximo passo, de forma que seja sempre possível prosseguir com o processo.

Como construir curvas de Peano

A Curva de Peano que recobre um quadrado é o limite de uma sequência de curvas. Devem-se construir curvas cada vez mais complicadas, que ditam o comportamento do próximo passo, de forma que seja sempre possível prosseguir com o processo.

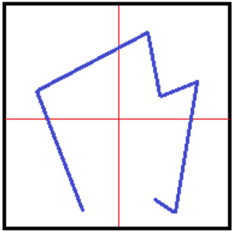


Como construir curvas de Peano

Primeiro passo: dividir o quadrado em 4 e fazer uma curva que passe $1/4$ do tempo em cada quadrado.

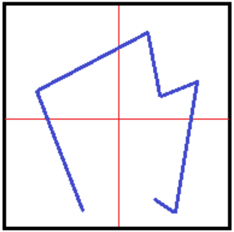
Como construir curvas de Peano

Primeiro passo: dividir o quadrado em 4 e fazer uma curva que passe 1/4 do tempo em cada quadrado.



Como construir curvas de Peano

Primeiro passo: dividir o quadrado em 4 e fazer uma curva que passe 1/4 do tempo em cada quadrado.



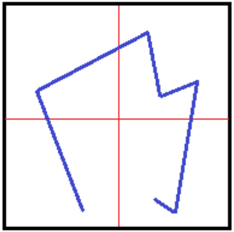
Essa curva determinará qual dos 4 quadrantes a curva final recobrirá em cada quarto de tempo.

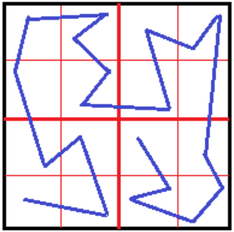
Como construir curvas de Peano

Segundo passo: dividir cada quadrado em 4 outros e construir uma outra curva que passe $1/16$ do tempo em cada quadrado, respeitando as 4 regiões originais da primeira curva.

Como construir curvas de Peano

Segundo passo: dividir cada quadrado em 4 outros e construir uma outra curva que passe 1/16 do tempo em cada quadrado, respeitando as 4 regiões originais da primeira curva.



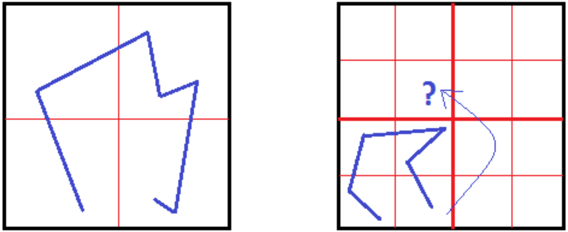


A parte chata da construção

A escolha da ordem dos 16 quadrados não é arbitrária. A nova curva deve se comportar como a primeira curva mandava em relação aos 4 quadrados maiores.

A parte chata da construção

A escolha da ordem dos 16 quadrados não é arbitrária. A nova curva deve se comportar como a primeira curva mandava em relação aos 4 quadrados maiores.



Exemplo: ao terminar o primeiro quadrante, a curva deve poder entrar imediatamente no segundo quadrante.

Como construir curvas de Peano

Terceiro passo:

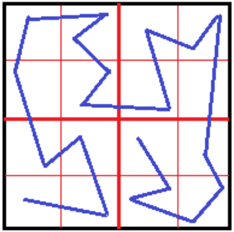
Como construir curvas de Peano

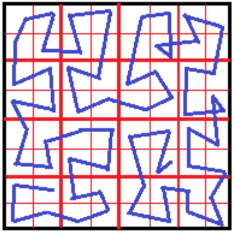
Terceiro passo: repetir infinitamente.

Como construir curvas de Peano

Terceiro passo: repetir infinitamente. Sempre permitindo que curva n possa passar pelos quadrados do passo anterior na ordem que eles foram visitados pela curva $n - 1$.

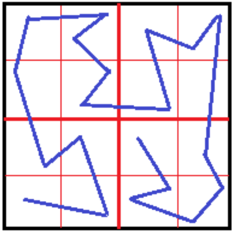
Terceiro passo: repetir infinitamente. Sempre permitindo que curva n possa passar pelos quadrados do passo anterior na ordem que eles foram visitados pela curva $n-1$.

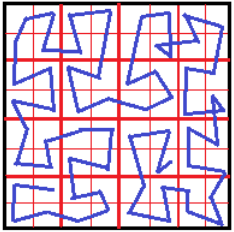




Como construir curvas de Peano

Terceiro passo: repetir infinitamente. Sempre permitindo que curva n possa passar pelos quadrados do passo anterior na ordem que eles foram visitados pela curva $n-1$.





A curva n passa $1/4^n$ do tempo dentro de cada quadrado menor.

Como construir curvas de Peano

A Curva de Peano é o limite dessa sequência de curvas. O que garante sua existência é um teorema sobre limites uniformes.

Como construir curvas de Peano

A Curva de Peano é o limite dessa sequência de curvas. O que garante sua existência é um teorema sobre limites uniformes. O ingrediente chave para que ele possa ser aplicado são os quadrados cada vez menores.

Como construir curvas de Peano

A Curva de Peano é o limite dessa sequência de curvas. O que garante sua existência é um teorema sobre limites uniformes.
O ingrediente chave para que ele possa ser aplicado são os quadrados cada vez menores.
É possível afirmar exatamente qual dos quadrados do n-ésimo passo a curva está preenchendo em um intervalo de tempo do tipo

$$\left[\frac{k}{4^n}, \frac{k+1}{4^n}\right]$$

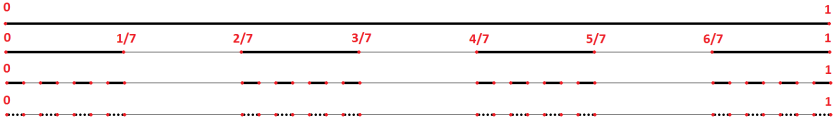
para $k \in \mathbb{N}$.

Peano e Cantor

A parte chata de fazer com que cada curva da sequência respeite os quadrados da curva anterior pode ser ignorada!

Peano e Cantor

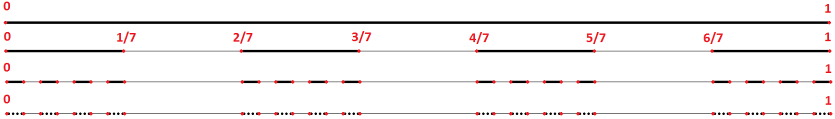
A parte chata de fazer com que cada curva da sequência respeite os quadrados da curva anterior pode ser ignorada!



Ao invés de dividir cada intervalo de tempo em 4, dividimos em 7 partes, 4 das quais serão as que importam realmente. As outras 3 serão usadas para a curva poder ter tempo de ir até o quadrado certo.

Peano e Cantor

A parte chata de fazer com que cada curva da sequência respeite os quadrados da curva anterior pode ser ignorada!



Ao invés de dividir cada intervalo de tempo em 4, dividimos em 7 partes, 4 das quais serão as que importam realmente. As outras 3 serão usadas para a curva poder ter tempo de ir até o quadrado certo.

Apareceu aqui um Conjunto de Cantor construído removendo-se de cada intervalo três partes de comprimento igual a $1/7$ do anterior!

Peano e Cantor

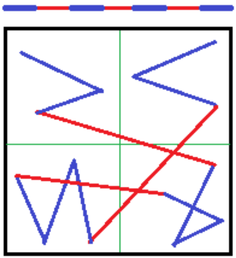
Primeiro passo: dividir o quadrado em 4.

Peano e Cantor

Primeiro passo: dividir o quadrado em 4. Fazer uma curva que passe $1/7$ do tempo em um quadrado, depois $1/7$ viajando de qualquer maneira até um segundo quadrado, depois $1/7$ nesse quadrado, depois $1/7$ viajando até um terceiro, e assim por diante.

Peano e Cantor

Primeiro passo: dividir o quadrado em 4. Fazer uma curva que passe 1/7 do tempo em um quadrado, depois 1/7 viajando de qualquer maneira até um segundo quadrado, depois 1/7 nesse quadrado, depois 1/7 viajando até um terceiro, e assim por diante.



Peano e Cantor

Segundo passo: dividir cada quadrado em 4 outros. Definir uma curva que:

Peano e Cantor

Segundo passo: dividir cada quadrado em 4 outros. Definir uma curva que:

- Durante os sétimos $[0, 1/7]$, $[2/7, 3/7]$, $[4/7, 5/7]$ e $[6/7, 1]$, esteja em cada um dos quatro quadrados maiores, na ordem definida no passo anterior.

Peano e Cantor

Segundo passo: dividir cada quadrado em 4 outros. Definir uma curva que:

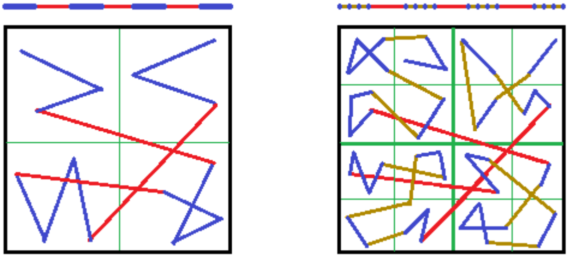
- Durante os sétimos $[0, 1/7]$, $[2/7, 3/7]$, $[4/7, 5/7]$ e $[6/7, 1]$, esteja em cada um dos quatro quadrados maiores, na ordem definida no passo anterior.
- Durante cada um desses sétimos, visite cada quadrante do quadrado maior correspondente, em qualquer ordem.

Peano e Cantor

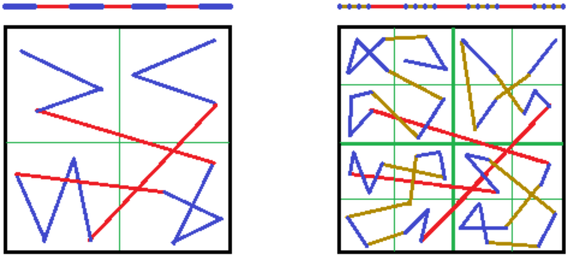
Segundo passo: dividir cada quadrado em 4 outros. Definir uma curva que:

- Durante os sétimos $[0, 1/7]$, $[2/7, 3/7]$, $[4/7, 5/7]$ e $[6/7, 1]$, esteja em cada um dos quatro quadrados maiores, na ordem definida no passo anterior.
- Durante cada um desses sétimos, visite cada quadrante do quadrado maior correspondente, em qualquer ordem.
- Durante os sétimos $[1/7, 2/7]$, $[3/7, 4/7]$ e $[5/7, 6/7]$, viaje entre os quadrados maiores pela mesma rota da curva anterior.

Peano e Cantor



Peano e Cantor



Dentro de cada quadrado maior, a nova curva deve levar 1/49 do tempo total em um quadrado menor, depois 1/49 viajando a outro menor, depois 1/49 dentro dele, etc.

Peano e Cantor

Terceiro passo:

Peano e Cantor

Terceiro passo: repetir infinitamente.

Peano e Cantor

Terceiro passo: repetir infinitamente. Desta vez temos liberdade para escolher qualquer ordem dos quadrados.

Peano e Cantor

Terceiro passo: repetir infinitamente. Desta vez temos liberdade para escolher qualquer ordem dos quadrados.

Em intervalos de tempo do tipo

$$\left[\frac{k}{7^n}, \frac{k+1}{7^n}\right]$$

as curvas dos passos $\geq n$ ou estão dentro de um quadrado do n-ésimo passo, ou viajando entre dois quadrados de algum passo $\leq n$.

Peano e Cantor

Terceiro passo: repetir infinitamente. Desta vez temos liberdade para escolher qualquer ordem dos quadrados.
Em intervalos de tempo do tipo

$$\left[\frac{k}{7^n}, \frac{k+1}{7^n}\right]$$

as curvas dos passos $\geq n$ ou estão dentro de um quadrado do n-ésimo passo, ou viajando entre dois quadrados de algum passo $\leq n$. E portanto a curva limite também!

Agora sim, a solução

A solução do problema envolverá a construção de uma Curva de Peano por esse método de divisões em 4 quadrados e 7 intervalos de tempo.

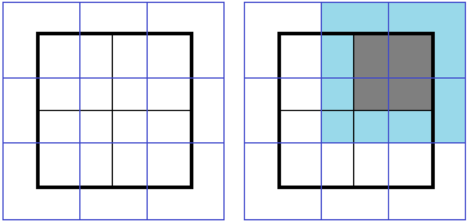
Agora sim, a solução

A solução do problema envolverá a construção de uma Curva de Peano por esse método de divisões em 4 quadrados e 7 intervalos de tempo.
Mas não vamos dividir cada quadrado em 4 que estão contidos nele; vamos recobrir cada quadrado por 4 quadrados menores, que cobrem seus quadrantes deixando uma certa margem.

Agora sim, a solução

A solução do problema envolverá a construção de uma Curva de Peano por esse método de divisões em 4 quadrados e 7 intervalos de tempo.

Mas não vamos dividir cada quadrado em 4 que estão contidos nele; vamos recobrir cada quadrado por 4 quadrados menores, que cobrem seus quadrantes deixando uma certa margem.



Solução

- Q_0: O quadrado inicial de $8km$ de comprimento.

Solução

- Q_0: O quadrado inicial de $8km$ de comprimento.
- Defina 4 quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ de comprimento $\alpha \cdot 8km < 8km$.

Solução

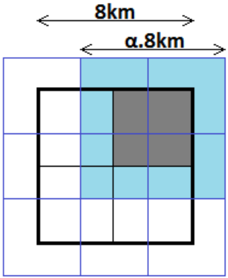
- Q_0: O quadrado inicial de $8km$ de comprimento.
- Defina 4 quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ de comprimento $\alpha \cdot 8km < 8km$. $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante de proporcionalidade

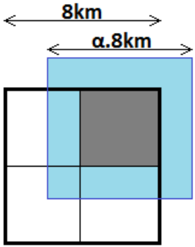
Solução

- Q_0: O quadrado inicial de $8km$ de comprimento.
- Defina 4 quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ de comprimento $\alpha \cdot 8km < 8km$. $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante de proporcionalidade que permite que os quatro quadrados, colocados sobre cada quadrante de Q_0, possam recobri-lo com margem de sobra.

Solução

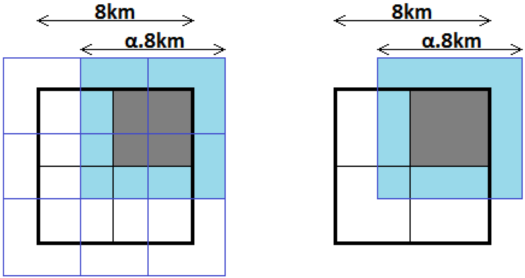
- Q_0: O quadrado inicial de $8km$ de comprimento.
- Defina 4 quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ de comprimento $\alpha \cdot 8km < 8km$. $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante de proporcionalidade que permite que os quatro quadrados, colocados sobre cada quadrante de Q_0, possam recobri-lo com margem de sobra.





Solução

- Q_0: O quadrado inicial de $8km$ de comprimento.
- Defina 4 quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ de comprimento $\alpha \cdot 8km < 8km$. $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante de proporcionalidade que permite que os quatro quadrados, colocados sobre cada quadrante de Q_0, possam recobri-lo com margem de sobra.



Portanto devemos ter $1/2 < \alpha < 1$.

Solução

Continue definindo quadrados Q_n^j da seguinte maneira:

Solução

Continue definindo quadrados Q_n^j da seguinte maneira:

- Fixado n, cada quadrado Q_n^j deve ter comprimento igual a α vezes o comprimento dos quadrados Q_{n-1}^j.

Solução

Continue definindo quadrados Q_n^j da seguinte maneira:

- Fixado n, cada quadrado Q_n^j deve ter comprimento igual a α vezes o comprimento dos quadrados Q_{n-1}^j.
- Cada quadrado Q_{n-1}^j deve ter cada um de seus 4 quadrantes recoberto (com margem) por um quadrado Q_n^j.

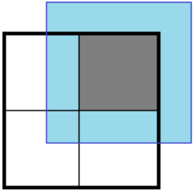
Solução

Continue definindo quadrados Q_n^j da seguinte maneira:

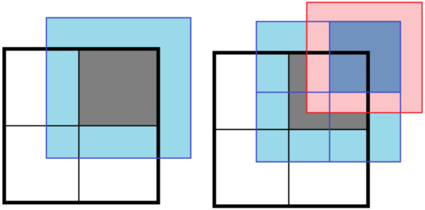
- Fixado n, cada quadrado Q_n^j deve ter comprimento igual a α vezes o comprimento dos quadrados Q_{n-1}^j.
- Cada quadrado Q_{n-1}^j deve ter cada um de seus 4 quadrantes recoberto (com margem) por um quadrado Q_n^j.

Portanto no n-ésimo passo existem 4^n quadrados: $Q_n^1, \ldots, Q_n^{4^n}$.

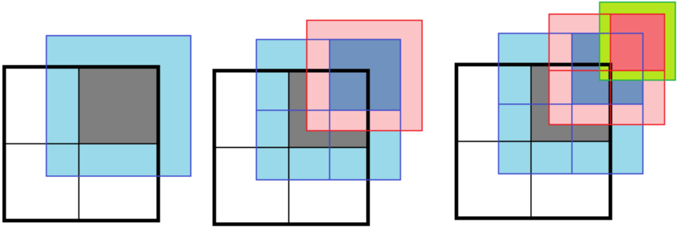
Solução



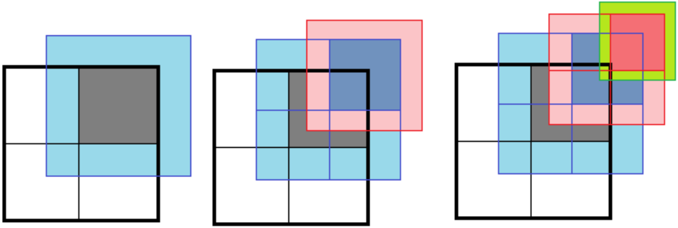
Solução



Solução

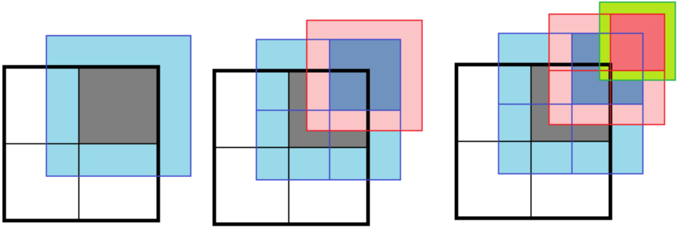


Solução



- A curva γ do problema (curva de Taz©) será a Curva de Peano construída com base nos Q_n^j.

Solução



- A curva γ do problema (curva de Taz©) será a Curva de Peano construída com base nos Q_n^j. Essa curva pode exigir trechos muito rápidos (viagem de um quadrado a outro), mas Taz© tem velocidade tão rápida quanto quiser!

Solução

Agora devemos escolher $\alpha \in (1/2, 1)$ que permita que ocorra o seguinte para qualquer n:

Solução

Agora devemos escolher $\alpha \in (1/2, 1)$ que permita que ocorra o seguinte para qualquer n:

Pulo do gato

No começo de qualquer intervalo do tipo $[k/7^n, (k+1)/7^n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o porco deverá se encontrar dentro de alguns quadrados Q^j_{n+1}. Queremos que ele não tenha tempo suficiente para sair de pelo menos um deles nesse intervalo de tempo.

Exemplo

- No começo de $[0, 1]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ (isso já é verdade).

Exemplo

- No começo de $[0, 1]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ (isso já é verdade). Ele não deve conseguir sair de algum deles durante o tempo $[0, 1]$.

Exemplo

- No começo de $[0, 1]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ (isso já é verdade). Ele não deve conseguir sair de algum deles durante o tempo $[0, 1]$.
- No começo de $[k/7, (k+1)/7]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_2^1, \ldots, Q_2^{16}$ (por enquanto não sabemos se isso é verdade).

Exemplo

- No começo de $[0,1]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ (isso já é verdade). Ele não deve conseguir sair de algum deles durante o tempo $[0,1]$.
- No começo de $[k/7,(k+1)/7]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_2^1, \ldots, Q_2^{16}$ (por enquanto não sabemos se isso é verdade). Ele não deve conseguir sair de algum deles durante o tempo $[k/7,(k+1)/7]$.

Exemplo

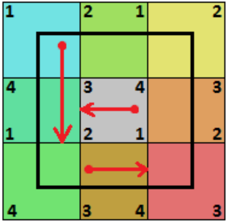
- No começo de $[0, 1]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$ (isso já é verdade). Ele não deve conseguir sair de algum deles durante o tempo $[0, 1]$.
- No começo de $[k/7, (k+1)/7]$, o porco deverá estar em alguns dos quadrados $Q_2^1, \ldots, Q_2^{16}$ (por enquanto não sabemos se isso é verdade). Ele não deve conseguir sair de algum deles durante o tempo $[k/7, (k+1)/7]$.
- Repetir infinitamente...

Por que o pulo do gato é razoável

É razoável pedir isso por causa das margens de sobra.

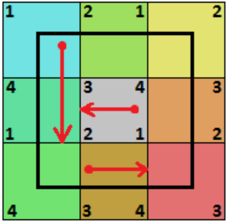
Por que o pulo do gato é razoável

É razoável pedir isso por causa das margens de sobra.



Por que o pulo do gato é razoável

É razoável pedir isso por causa das margens de sobra.



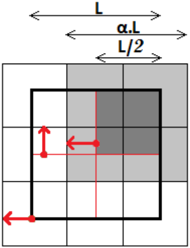
Não importa em que parte de um quadrado o porco está. Ele estará em algum quadrante, e portanto a uma distância positiva da fronteira do quadrado menor que recobre esse quadrante, já que esse recobrimento deixa margens!

Por que o pulo do gato é possível

Imagine que o quadrado inicial Q_0 tem lado L, o porco tem velocidade máxima V e o tempo de duração da perseguição é T.

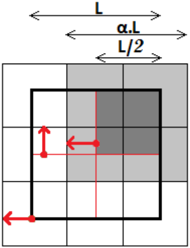
Por que o pulo do gato é possível

Imagine que o quadrado inicial Q_0 tem lado L, o porco tem velocidade máxima V e o tempo de duração da perseguição é T.



Por que o pulo do gato é possível

Imagine que o quadrado inicial Q_0 tem lado L, o porco tem velocidade máxima V e o tempo de duração da perseguição é T.

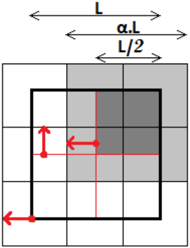


No início, o porco está em algum Q_1^j, $j = 1, 2, 3, 4$, a uma distância de sua margem maior ou igual a

$$\frac{1}{2}(\alpha L - L/2) =$$

Por que o pulo do gato é possível

Imagine que o quadrado inicial Q_0 tem lado L, o porco tem velocidade máxima V e o tempo de duração da perseguição é T.



No início, o porco está em algum Q_1^j, $j = 1, 2, 3, 4$, a uma distância de sua margem maior ou igual a

$$\frac{1}{2}(\alpha L - L/2) = (2\alpha - 1)\frac{L}{4}$$

Por que o pulo do gato é possível

Distância mínima: $(2\alpha - 1)\dfrac{L}{4}$

Por que o pulo do gato é possível

Distância mínima: $(2\alpha - 1)\dfrac{L}{4}$

Velocidade máxima: V

Por que o pulo do gato é possível

$$\text{Distância mínima:} \quad (2\alpha - 1)\frac{L}{4}$$

$$\text{Velocidade máxima:} \quad V$$

Teorema de Cálculo Avançado:

Por que o pulo do gato é possível

Distância mínima: $(2\alpha - 1)\frac{L}{4}$

Velocidade máxima: V

Teorema de Cálculo Avançado: $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

Por que o pulo do gato é possível

Distância mínima: $(2\alpha - 1)\dfrac{L}{4}$

Velocidade máxima: V

Teorema de Cálculo Avançado: $V = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

$\therefore$ Tempo mínimo para o porco sair do quadrado: $(2\alpha - 1)\dfrac{L}{4V}$

Por que o pulo do gato é possível

Tempo mínimo para o porco sair do quadrado: $(2\alpha - 1)\dfrac{L}{4V}$

Por que o pulo do gato é possível

Tempo mínimo para o porco sair do quadrado: $(2\alpha - 1)\dfrac{L}{4V}$

Queríamos que esse tempo fosse maior do que T.

Por que o pulo do gato é possível

Tempo mínimo para o porco sair do quadrado: $(2\alpha - 1)\frac{L}{4V}$

Queríamos que esse tempo fosse maior do que T.

$$(2\alpha - 1)\frac{L}{4V} > T \Rightarrow \alpha > \frac{1}{2} + \frac{2VT}{L}$$

Por que o pulo do gato é possível

$$\alpha > \frac{1}{2} + \frac{2VT}{L}$$

Por que o pulo do gato é possível

$$\alpha > \frac{1}{2} + \frac{2VT}{L}$$

Mas existia a restrição $1/2 < \alpha < 1$.

Por que o pulo do gato é possível

$$\alpha > \frac{1}{2} + \frac{2VT}{L}$$

Mas existia a restrição $1/2 < \alpha < 1$. Logo devemos ter

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

e bastará escolher qualquer α entre $1/2 + 2VT/L$ e 1.

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!
Isso resolve o primeiro quadrado.

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!
Isso resolve o primeiro quadrado.

Mas resolve também todos os outros!

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!
Isso resolve o primeiro quadrado.

Mas resolve também todos os outros! Porque

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{2} < \alpha$$

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!
Isso resolve o primeiro quadrado.

Mas resolve também todos os outros! Porque

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{2} < \alpha$$

No próximo passo, a distância que queremos que o porco não seja capaz de percorrer é multiplicada por α.

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!
Isso resolve o primeiro quadrado.

Mas resolve também todos os outros! Porque

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{2} < \alpha$$

No próximo passo, a distância que queremos que o porco não seja capaz de percorrer é multiplicada por α. Mas o tempo em que queremos que ele não consiga percorrê-la é multiplicado por $1/7$.

Por que o pulo do gato é possível

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Com os dados originais $V = 1$, $T = 1$ e $L = 8$, é possível!
Isso resolve o primeiro quadrado.

Mas resolve também todos os outros! Porque

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{2} < \alpha$$

No próximo passo, a distância que queremos que o porco não seja capaz de percorrer é multiplicada por α. Mas o tempo em que queremos que ele não consiga percorrê-la é multiplicado por $1/7$. Com a mesma velocidade máxima, ele não consegue!

Por que o pulo do gato funciona

Vamos começar a perseguição:

Por que o pulo do gato funciona

Vamos começar a perseguição:

- Em $t = 0$, o porco está em Q_0, logo em alguns dos $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$.

Por que o pulo do gato funciona

Vamos começar a perseguição:

- Em $t = 0$, o porco está em Q_0, logo em alguns dos $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[0, 1]$.

Por que o pulo do gato funciona

Vamos começar a perseguição:

- Em $t = 0$, o porco está em Q_0, logo em alguns dos $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[0, 1]$. Suponha que seja Q_1^2.

Por que o pulo do gato funciona

Vamos começar a perseguição:

- Em $t = 0$, o porco está em Q_0, logo em alguns dos $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[0, 1]$. Suponha que seja Q_1^2.
- Taz© chega em Q_1^2 em $t = 2/7$ e sai dali em $t = 3/7$.

Por que o pulo do gato funciona

Vamos começar a perseguição:

- Em $t = 0$, o porco está em Q_0, logo em alguns dos $Q_1^1, Q_1^2, Q_1^3, Q_1^4$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[0, 1]$. Suponha que seja Q_1^2.
- Taz© chega em Q_1^2 em $t = 2/7$ e sai dali em $t = 3/7$. Durante esse intervalo, o porco continua em Q_1^2.

Por que o pulo do gato funciona

- Em $t = 2/7$, o porco está em Q_1^2, logo em alguns dos $Q_2^5, Q_2^6, Q_2^7, Q_2^8$.

Por que o pulo do gato funciona

- Em $t = 2/7$, o porco está em Q_1^2, logo em alguns dos $Q_2^5, Q_2^6, Q_2^7, Q_2^8$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[2/7, 3/7]$.

Por que o pulo do gato funciona

- Em $t = 2/7$, o porco está em Q_1^2, logo em alguns dos $Q_2^5, Q_2^6, Q_2^7, Q_2^8$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[2/7, 3/7]$. Suponha que seja Q_2^8.

Por que o pulo do gato funciona

- Em $t = 2/7$, o porco está em Q_1^2, logo em alguns dos $Q_2^5, Q_2^6, Q_2^7, Q_2^8$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[2/7, 3/7]$. Suponha que seja Q_2^8.
- Taz© chega em Q_2^8 em $t = 20/49$ e sai dali em $t = 21/49$.

Por que o pulo do gato funciona

- Em $t = 2/7$, o porco está em Q_1^2, logo em alguns dos $Q_2^5, Q_2^6, Q_2^7, Q_2^8$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[2/7, 3/7]$. Suponha que seja Q_2^8.
- Taz© chega em Q_2^8 em $t = 20/49$ e sai dali em $t = 21/49$. Durante esse intervalo, o porco continua em Q_2^8.

Por que o pulo do gato funciona

- Em $t = 2/7$, o porco está em Q_1^2, logo em alguns dos $Q_2^5, Q_2^6, Q_2^7, Q_2^8$.
- Pulo do gato $\Rightarrow$ Existe um quadrado dentre esses quatro de onde ele não consegue sair em $[2/7, 3/7]$. Suponha que seja Q_2^8.
- Taz© chega em Q_2^8 em $t = 20/49$ e sai dali em $t = 21/49$. Durante esse intervalo, o porco continua em Q_2^8.
- Repetir ∞mente.

Por que o pulo do gato funciona

Por indução: para cada n, sempre existe um quadrado Q_n^j de onde o porco não sai durante todo o tempo em que Taz© o percorre.

Por que o pulo do gato funciona

Por indução: para cada n, sempre existe um quadrado Q_n^j de onde o porco não sai durante todo o tempo em que Taz© o percorre. Mas os lados dos quadrados Q_n^j vão tendendo a zero quando n cresce.

Por que o pulo do gato funciona

Por indução: para cada n, sempre existe um quadrado Q_n^j de onde o porco não sai durante todo o tempo em que Taz© o percorre. Mas os lados dos quadrados Q_n^j vão tendendo a zero quando n cresce. Portanto,

Para cada $\varepsilon > 0$, existe um instante em $[0, 1]$ em que a distância entre Taz© e o porco é menor que ε!

Por que o pulo do gato funciona

Por indução: para cada n, sempre existe um quadrado Q_n^j de onde o porco não sai durante todo o tempo em que Taz© o percorre. Mas os lados dos quadrados Q_n^j vão tendendo a zero quando n cresce. Portanto,

Para cada $\varepsilon > 0$, existe um instante em $[0, 1]$ em que a distância entre Taz© e o porco é menor que ε!

Agora devemos usar compacidade para concluir que isso prova que as duas curvas se encontram!

E o porco virou almoço!

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale.

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale. Mas podemos fazer valer, diminuindo T.

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale. Mas podemos fazer valer, diminuindo T. Isso faz sentido: dando ao porco menos tempo para fugir, é mais fácil capturá-lo!

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale. Mas podemos fazer valer, diminuindo T.
Isso faz sentido: dando ao porco menos tempo para fugir, é mais fácil capturá-lo!
Se o problema for enunciado com L, V, T quaisquer, escolha $T' < T$ pequeno o bastante para que esse método funcione.

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale. Mas podemos fazer valer, diminuindo T. Isso faz sentido: dando ao porco menos tempo para fugir, é mais fácil capturá-lo!
Se o problema for enunciado com L, V, T quaisquer, escolha $T' < T$ pequeno o bastante para que esse método funcione. Defina a curva γ de Taz© como a curva de Peano desse método construída para T'.

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale. Mas podemos fazer valer, diminuindo T.
Isso faz sentido: dando ao porco menos tempo para fugir, é mais fácil capturá-lo!
Se o problema for enunciado com L, V, T quaisquer, escolha $T' < T$ pequeno o bastante para que esse método funcione.
Defina a curva γ de Taz© como a curva de Peano desse método construída para T'. Então Taz© captura o porco antes de T',

E se fossem outros dados iniciais?

Voltando aos dados literais L, V, T, vimos que essa construção toda só é possível quando

$$\frac{2VT}{L} < 1/2$$

Em geral isso não vale. Mas podemos fazer valer, diminuindo T. Isso faz sentido: dando ao porco menos tempo para fugir, é mais fácil capturá-lo!
Se o problema for enunciado com L, V, T quaisquer, escolha $T' < T$ pequeno o bastante para que esse método funcione. Defina a curva γ de Taz© como a curva de Peano desse método construída para T'. Então Taz© captura o porco antes de T', que é antes de T. Logo, o problema tem solução mesmo nesse caso geral!

Teorema

Só para parecer mais com um seminário de matemática, enunciaremos o teorema que foi demonstrado com tudo isso:

Teorema

Só para parecer mais com um seminário de matemática, enunciaremos o teorema que foi demonstrado com tudo isso:

Teorema

Sejam $V, L > 0$ fixados. Então existem $T > 0$ e uma curva contínua $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ é qualquer curva diferenciável tal que

- $|\lambda'(t)| < V \quad \forall t \in [0, T]$
- $|\lambda(0) - \gamma(0)| < L$

então existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $\gamma(t_0) = \lambda(t_0)$. Ainda, T pode ser tomado tão pequeno quanto se queira.

Exercício

Exercício:

Exercício

Exercício: O teorema seguinte vale?

Exercício

Exercício: O teorema seguinte vale?

Teorema

Dado $T > 0$, existe uma curva contínua $\gamma : [0, T) \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $\lambda : R \to \mathbb{R}^2$ é qualquer curva diferenciável com $|\lambda'(t)|$ limitado para $t \in \mathbb{R}$, então existe $t_0 \in [0, T)$ tal que $\gamma(t_0) = \lambda(t_0)$.

Exercício

Exercício: O teorema seguinte vale?

Teorema

Dado $T > 0$, existe uma curva contínua $\gamma : [0, T) \to \mathbb{R}^2$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $\lambda : R \to \mathbb{R}^2$ é qualquer curva diferenciável com $|\lambda'(t)|$ limitado para $t \in \mathbb{R}$, então existe $t_0 \in [0, T)$ tal que $\gamma(t_0) = \lambda(t_0)$.

Isto é, Taz© consegue capturar qualquer porco no plano, mesmo sem saber sua velocidade e sua distância até ele, desde que esse porco não tenha velocidade infinita?


"Thats all Folks!"