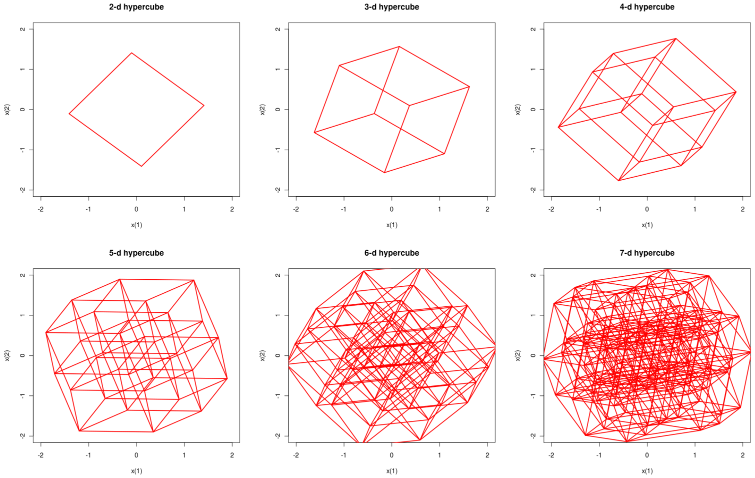
Muito Além de 3 Dimensões

Luciano Rocha

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

São Carlos, 2017

Perdendo a intuição



Dimensão de Espaços Vetoriais

- Exemplos de Espaços Vetoriais: R^n e C^n
- Dimensão: Cardinalidade da base.
- Número de parâmetros necessários para distinguir pontos no espaço vetorial.

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathrm{R}^n = f(x_1; x_2; :::; x_n); x_1; :::; x_n \ 2 \ \mathrm{R}g$
  Logo $dim\mathrm{R}^n = n$

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$
  Logo $dim \mathbb{R}^n = n$
- Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$
  Então $dim V = 1$

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $R^n = f(x_1; x_2; :::; x_n); x_1; :::; x_n \ 2 \ Rg$
  Logo $dim R^n = n$
- Seja $V = f(x; y) \ 2 \ R^2; x \quad y = 0g$
  Então $dim V = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t.
  Por exemplo, $1 + 2t = (1; 2; :::; 0; :::) \ 2 \ V[t]$ e
  $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7; 0; 0; 4; 0; :::; 0; :::) \ 2 \ V[t]$

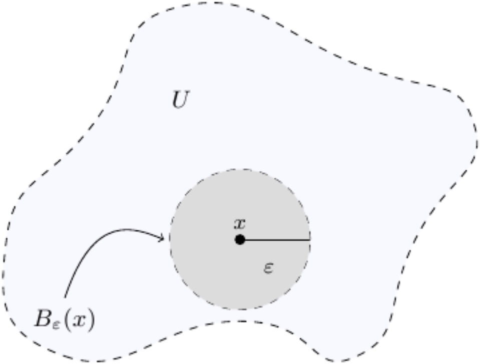
Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n); x_1; \ldots; x_n \in \mathbb{R}\}$
  Logo $dim \mathbb{R}^n = n$
- Seja $V = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$
  Então $dim V = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t.
  Por exemplo, $1 + 2t = (1; 2; \ldots; 0; \ldots) \in V[t]$ e
  $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7; 0; 0; 4; 0; \ldots; 0; \ldots) \in V[t]$
  Temos $dim V[t] = \infty$

Conjuntos abertos

"Definição"

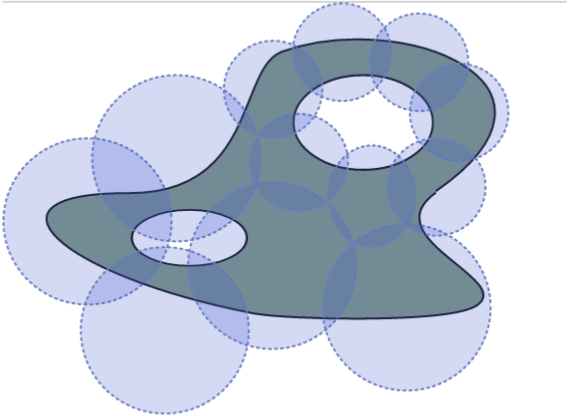
Conjuntos aonde todo ponto "cabe com folga". Ou seja, dado um ponto x no conjunto, existe uma bola com centro em x inteiramente contida no conjunto. Em R, os abertos são os intervalos abertos e união de intervalos abertos.



Cobertura por abertos de X

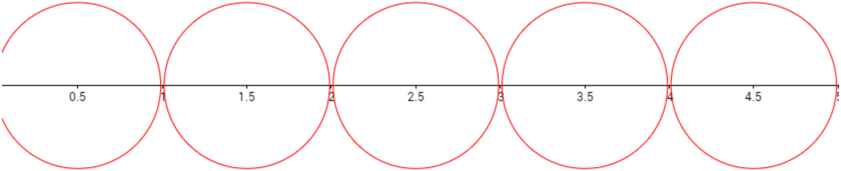
Definição

Família de conjuntos abertos que contém X.



Exemplo de cobertura por abertos

- Considere $X = \mathrm{R}$
- Seja $F = f(a; a+1); 8a\ 2\ Zg$ e $G = f(b+\frac{1}{2}; b+\frac{3}{2}); 8b\ 2\ Zg$
- Então $U = F\ [\ G$ é cobertura de X



Exemplo de cobertura por abertos

Considere $X = \mathbb{R}$

Seja $F = \{(a, a+1);\ \forall a \in \mathbb{Z}\}$ e $G = \{(b + \frac{1}{2}, b + \frac{3}{2});\ \forall b \in \mathbb{Z}\}$

Então $U = F \cup G$ é cobertura de X

Dimensão topobgica

De nicão

Re namento de uma cobertura : Um re namento de uma cobertura de um espaço X uma nova cobertura do mesmo espaço tal que cada conjunto da nova cobertura um subconjunto de algum elemento da anti cobertura

Definição

Ordem de uma cobertura: Número máximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definição

Ordem de uma cobertura: Número máximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definição

Dimensão topológica de X: Seja X subconjunto de um espaço topológico. Suponha que exista um natural n tal que toda cobertura aberta C de X possui um refinamento C^0 de ordem $n+1$. Se n é o menor natural com essa propriedade, então $\dim_T(X) = n$. Se tal n não existir, diremos que X possui dimensão infinita.

Exemplo: Dimensão de $\mathbb{R}$

Considere $X = \mathbb{R}$ com a cobertura definida anteriormente

$\text{Ordem} = 2$

$\text{Dim}_T \, \mathbb{R} = 1$

Dimensão de auto-similaridade

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{2}$
$s^{-2} = 2^2$ quadrados

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
$s^{-2} = 3^2$ quadrados

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
$s^{-3} = 3^3$ cubos

Definição

Em geral: Se um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ pode ser dividido em um número finito $N(s)$ de subconjuntos, todos congruentes, reescalado por um fator linear s, então a dimensão de auto-similaridade de X é o único d que satisfaz $N(s) = s^{-d}$.

$$\text{Ou seja, } d = \frac{\log(N(s))}{\log(\frac{1}{s})}$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$

$$N(s) = 2$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

$s = \frac{1}{3}$

$N(s) = 2$

Queremos d tal que $3^d = 2$ logo $d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \quad 0.63092975\ldots$

Dimensão de auto-similaridade (Koch Snow ake)

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \quad 1:2618$$

Box-counting dimension

A fim de expandir para conjuntos mais gerais, definimos a Box-counting dimension:

Definição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $N(\varepsilon; X)$ o número mínimo de bolas de tamanho no máximo ε que cobrem X. Então

$$\dim_B X = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N(\varepsilon; X))}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

Box-counting Dimension (computando)

Seja $X \quad \mathbb{R}^n$ limitado

Particione $\mathbb{R}^n$ em cubos de lado

Seja $N(\;;X)$ o número de cubos que intersecta X

$$d = \lim_{\ \to 0} \frac{\log(N(\;;X))}{\log\frac{1}{\ }}$$

Box-counting Dimension (computando)

Seja $X \quad \mathbb{R}^n$ limitado

Particione $\mathbb{R}^n$ em cubos de lado

Seja $N(\; ; X)$ o número de cubos que intersecta X

$$d = \lim_{\ ! \ 0} \frac{\log(N(\; ; X))}{\log \frac{1}{\ }}$$

Para entre 20m e 200km, d 1:21

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

$$d \quad 1{:}02$$

Medida de Hausdor

De nição

Seja $d > 0$ e $X \quad (Y; \ )$ um espaço métrico. A medida d-dimensional de Hausdor é de nida por

$$_d(X) = \lim_{\ \to 0} \inf_{U_i} \sum_i (\mathrm{diam}(U_i))^d$$

Aonde U_i é cobertura por abertos de X com diâmetro menor que

Medida de Hausdor

Medida de Hausdor

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d^0}(X) = 0$ e, se $_{d^0}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d^0}(X) = 0$ e, se $_{d^0}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Dem.: Se $_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f B_j g_{j 2 N}$ com $X \quad [\quad {}_{j=1}^{1} B_j \, ; \, \mathrm{diam}(B_j) \qquad$, e

$$P \, {}_{j=1}^{1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad {}_d(X) + 1$$

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d'}(X) = 0$ e, se $_{d'}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Dem.: Se $_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f B_j g_{j 2 N}$ com $X \quad [\ _{j=1}^{1} B_j ; \text{diam}(B_j)$, e

$$P_{j=1}^{1} (\text{diam}(B_j))^d \qquad _d(X) + 1$$

Se $d' > d$,

$$(\text{diam}(B_j))^{d' \ d} \qquad d' \ d \ ) \quad (\text{diam}(B_j))^{d'} \qquad d' \ d (\text{diam}(B_j))^d$$

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d^0}(X) = 0$ e, se $_{d^0}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Dem.: Se $_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f B_j g_{j 2 N}$ com $X \quad [\ ^1_{j=1} B_j ; \mathrm{diam}(B_j)$, e

$$P \ ^1_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad _d(X) + 1$$

Se $d^0 > d$,

$$(\mathrm{diam}(B_j))^{d^0 \ d} \qquad ^{d^0 \ d}) \quad (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad ^{d^0 \ d}(\mathrm{diam}(B_j))^d$$

$$P \ ^1_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad ^{d^0 \ d} P \ ^1_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad ^{d^0 \ d}[\ _d(X) + 1]$$

Proposição

Seja $d' > d > 0$. Se $\mathcal{H}_d(X) < \infty$, então $\mathcal{H}_{d'}(X) = 0$ e, se $\mathcal{H}_{d'}(X) > 0$, então $\mathcal{H}_d(X) = \infty$.

Dem.: Se $\mathcal{H}_d(X) < \infty$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$; $\mathrm{diam}(B_j) \le \delta$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^d \le \mathcal{H}_d(X) + 1$$

Se $d' > d$,

$$(\mathrm{diam}(B_j))^{d'-d} \le \delta^{d'-d} \Rightarrow (\mathrm{diam}(B_j))^{d'} \le \delta^{d'-d}(\mathrm{diam}(B_j))^d$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^{d'} \le \delta^{d'-d} \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(B_j))^d \le \delta^{d'-d}[\mathcal{H}_d(X)+1]$$

Logo $\mathcal{H}^{\delta}_{d'}(X) \le \delta^{d'-d}[\mathcal{H}_d(X)+1] \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ e $\mathcal{H}_{d'}(X) = 0$

Denição

Seja X $(Y;\ )$. Denimos $\mathrm{Dim}_H(X)$ como o único $d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ tal que $_{d'}(X) = 0$ se $d' > d$ e $_{d'}(X) = \infty$ se $d > d'$.

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja X $\quad \mathbb{R}^n$ limitado, então $\mathrm{Dim}_T(X) \quad \mathrm{Dim}_H(X) \quad \mathrm{Dim}_B(X)$

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja $X \quad \mathrm{R}^n$ limitado, então $\mathrm{Dim}_T(X) \quad \mathrm{Dim}_H(X) \quad \mathrm{Dim}_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdor é estritamente maior que a dimensão topológica"

Proposição

Seja X R^n limitado, então $Dim_T(X)$ $Dim_H(X)$ $Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = f0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; :::g$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja X R^n limitado, então $Dim_T(X)$ $Dim_H(X)$ $Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = f0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; :::g$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Existem conjuntos X tal que $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = 1$

Referências Bibliográficas I

K. Falconer.
Fractal Geometry.

A. N. Carvalho.
Sistemas dinâmicos não-lineares.

D. Schleicher.
Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises.