

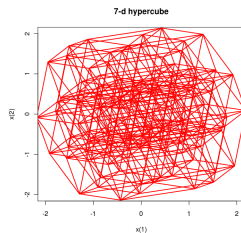
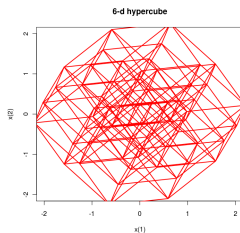
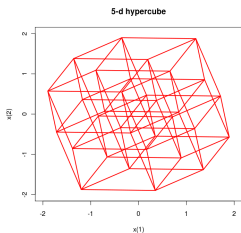
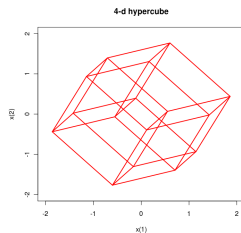
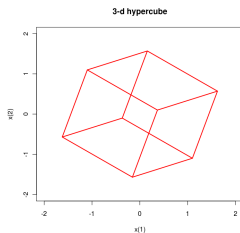
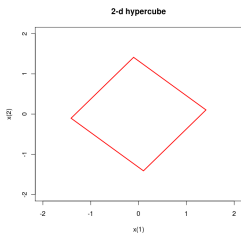
Muito Além de 3 Dimensões

Luciano Rocha

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

São Carlos, 2017

Perdendo a intuição



Dimensão de Espaços Vetoriais

- Exemplos de Espaços Vetoriais: \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n
- Dimensão: Cardinalidade da base.
- Número de parâmetros necessários para distinguir pontos no espaço vetorial.

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $R^n = \{f(x_1; x_2; \dots; x_n); x_1; \dots; x_n \in R\}$
Logo $\dim R^n = n$

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $R^n = \{f(x_1; x_2; \dots; x_n); x_1; \dots; x_n \in R\}$
Logo $\dim R^n = n$
- Seja $V = \{f(x; y) \in R^2; x^2 + y^2 = 0\}$
Então $\dim V = 1$

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $R^n = \{f(x_1; x_2; \dots; x_n); x_1; \dots; x_n \in R\}$
Logo $\dim R^n = n$
- Seja $V = \{f(x; y) \in R^2; x^2 + y^2 = 0\}$
Então $\dim V = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t .
Por exemplo, $1 + 2t = (1; 2; \dots; 0; \dots) \in V[t]$ e
 $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7; 0; 0; 4; 0; \dots; 0; \dots) \in V[t]$

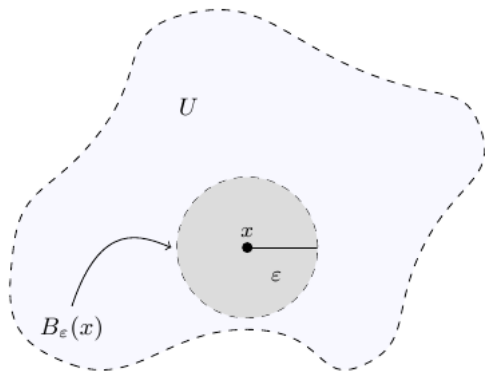
Dimensão de Espaços Vetoriais

- $R^n = \{f(x_1; x_2; \dots; x_n); x_1; \dots; x_n \in R\}$
Logo $\dim R^n = n$
- Seja $V = \{f(x; y) \in R^2; x^2 + y^2 = 0\}$
Então $\dim V = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t .
Por exemplo, $1 + 2t = (1; 2; \dots; 0; \dots) \in V[t]$ e
 $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7; 0; 0; 4; 0; \dots; 0; \dots) \in V[t]$
Temos $\dim V[t] = \infty$

Conjuntos abertos

"Definição"

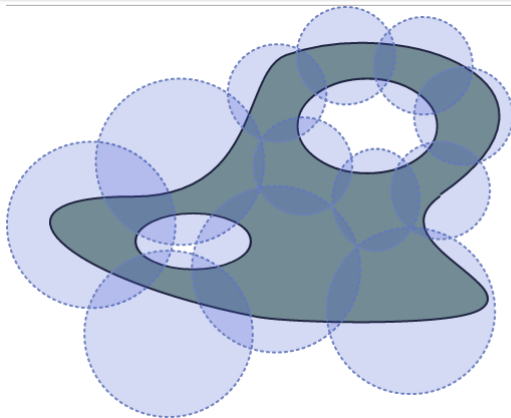
Conjuntos aonde todo ponto "cabe com folga". Ou seja, dado um ponto x no conjunto, existe uma bola com centro em x inteiramente contida no conjunto. Em \mathbb{R} , os abertos são os intervalos abertos e união de intervalos abertos.



Cobertura por abertos de X

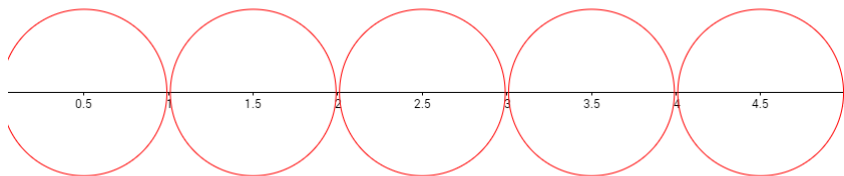
Definição

Família de conjuntos abertos que contém X .



Exemplo de cobertura por abertos

- Considere $X = \mathbb{R}$
- Seja $F = f(a; a + 1); 8a \in \mathbb{Z}$ e $G = f(b + \frac{1}{2}; b + \frac{3}{2}); 8b \in \mathbb{Z}$
- Então $U = F \cup G$ é cobertura de X



Exemplo de cobertura por abertos

Considere $X = \mathbb{R}$

Seja $F = f(a; a + 1); 8a \in \mathbb{Z}$ e $G = f(b + \frac{1}{2}; b + \frac{3}{2}); 8b \in \mathbb{Z}$

Então $U = F \cup G$ cobertura de X

Definicao

Refinamento de uma cobertura : Um refinamento de uma cobertura de um espaço X é uma nova cobertura do mesmo espaço tal que cada conjunto da nova cobertura é um subconjunto de algum elemento da antiga cobertura

Definicao

Ordem de uma cobertura: Numero maximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definicao

Ordem de uma cobertura: Numero maximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definicao

Dimensao topologica de X : Seja X subconjunto de um espaco topologico. Suponha que exista um natural n tal que toda cobertura aberta \mathcal{C} de X possui um refinamento \mathcal{C}^0 de ordem $n + 1$. Se n e o menor natural com essa propriedade, entao $\dim_T(X) = n$. Se tal n nao existir, diremos que X possui dimensao infinita.

Exemplo: Dimensão de R

Considere $X = \mathbb{R}$ com a cobertura de nida anteriormente

Ordem = 2

$\dim_{\mathbb{T}} R = 1$

Dimensao de auto-similaridade

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{2}$
 $s^2 = 2^2$ quadrados

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
 $s^2 = 3^2$ quadrados

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
 $s^3 = 3^3$ cubos

Definicao

Em geral: Se um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ pode ser dividido em um numero finito $N(s)$ de subconjuntos, todos congruentes, reescalado por um fator linear s , entao a dimensao de auto-similaridade de X e o unico d que satisfaz $N(s) = s^{-d}$.

$$\text{Ou seja, } d = \frac{\log(N(s))}{\log(\frac{1}{s})}$$

Dimensao de auto-similaridade (Cantor Set)

Dimensao de auto-similaridade (Cantor Set)

Dimensao de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$

Dimensao de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$

$$N(s) = 2$$

Dimensao de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$

$$N(s) = 2$$

Queremos tal que $3^d = 2$ logo $d = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ 0:63092975:

Dimensao de auto-similaridade (Koch Snow ake)

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \quad 1.2618$$

Box-counting dimension

Aim to expand for sets more general, define the Box-counting dimension:

Definition

Let $X \subset \mathbb{R}^n$ be bounded and $N(\epsilon; X)$ the minimum number of balls of radius ϵ that cover X . Then

$$\dim_B X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon; X))}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

Box-counting Dimension (computando)

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado

Particione \mathbb{R}^n em cubos de lado

Seja $N(\epsilon; X)$ o número de cubos que intersectam X

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon; X))}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

Box-counting Dimension (computando)

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado

Particione \mathbb{R}^n em cubos de lado

Seja $N(\epsilon; X)$ o número de cubos que intersectam X

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon; X))}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

Para ϵ entre 20m e 200km, $d \approx 1.21$

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

d 1:02

Definição

Seja $\delta > 0$ e X (em Y) um espaço métrico. A medida d -dimensional de Hausdorff é definida por

$$H^d_\delta(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \sum_i (\text{diam}(U_i))^d$$

Onde $\{U_i\}$ é cobertura por abertos de X com diâmetro menor que δ .

Medida de Hausdor

Medida de Hausdor

Proposicao

Seja $d^0 > d > 0$. Se $d_d(X) < 1$, entao $d_{d^0}(X) = 0$ e, se $d_{d^0}(X) > 0$, entao $d_d(X) = 1$.

Proposicao

Seja $d^0 > d > 0$. Se $d_d(X) < 1$, entao $d_{d^0}(X) = 0$ e, se $d_{d^0}(X) > 0$, entao $d_d(X) = 1$.

Dem.: Se $d_d(X) < 1$, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^d < d_d(X) + 1$$

Proposicao

Seja $d^0 > d > 0$. Se $d_d(X) < 1$, entao $d_{d^0}(X) = 0$ e, se $d_{d^0}(X) > 0$, entao $d_d(X) = 1$.

Dem.: Se $d_d(X) < 1$, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^d < \epsilon$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^{d^0} < \epsilon^{d^0/d} < \epsilon$$

Seja $d^0 > d$,

$$(\text{diam}(B_j))^{d^0} < \epsilon^{d^0/d} < \epsilon \implies \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^{d^0} < \epsilon$$

Proposicao

Seja $d^0 > d > 0$. Se $d_d(X) < 1$, entao $d_{d^0}(X) = 0$ e, se $d_{d^0}(X) > 0$, entao $d_d(X) = 1$.

Dem.: Se $d_d(X) < 1$, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $f B_j; g \in \mathbb{N}$ com $X \subset \bigcup_{j=1}^g B_j; \text{diam}(B_j) < \epsilon$, e

$$\sum_{j=1}^g (\text{diam}(B_j))^d < d_d(X) + 1$$

Seja $d^0 > d$,

$$\sum_{j=1}^g (\text{diam}(B_j))^{d^0} < (d^0 - d) \sum_{j=1}^g (\text{diam}(B_j))^d < (d^0 - d) [d_d(X) + 1]$$

Proposicao

Seja $d^0 > d > 0$. Se $d_d(X) < 1$, entao $d_{d^0}(X) = 0$ e, se $d_{d^0}(X) > 0$, entao $d_d(X) = 1$.

Dem.: Se $d_d(X) < 1$, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$; $\text{diam}(B_j) < \epsilon$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^d < d_d(X) + 1$$

Seja $d^0 > d$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^{d^0} < (d_d(X) + 1)^{d^0/d} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(B_j))^d < (d_d(X) + 1)^{d^0/d} [d_d(X) + 1]$$

Logo $d_{d^0}(X) < (d_d(X) + 1)^{d^0/d} < 1$ e
 $d_{d^0}(X) = 0$

Definicao

Seja $X \subset (Y; d)$. Definimos $\text{Dim}_H(X)$ como o unico $d \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $d^d(X) = 0$ se $d > d^0$ e $d^d(X) = \infty$ se $d < d^0$.

Proposicao

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, entao $\text{Dim}_T(X) = \text{Dim}_H(X) = \text{Dim}_B(X)$

Proposicao

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, entao $\text{Dim}_T(X) = \text{Dim}_H(X) = \text{Dim}_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractale um conjunto cuja dimensao de Hausdor e estritamente maior que a dimensao topologica"

Proposição

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, então $\dim_T(X) \leq \dim_H(X) \leq \dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = \{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; g\}$. Então $\dim_H(X) = 0$ e $\dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Proposição




Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado, então $Dim_T(X) \leq Dim_H(X) \leq Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = \{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; g\}$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Existem conjuntos X tal que $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = 1$

Referências Bibliográficas I

-  K. Falconer.
Fractal Geometry.
-  A. N. Carvalho.
Sistemas dinâmicos não-lineares.
-  D. Schleicher.
Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises.