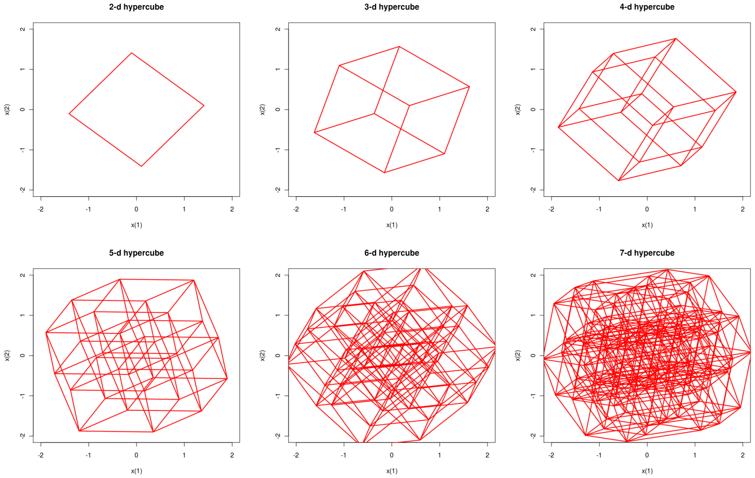
Muito Além de 3 Dimensões

Luciano Rocha

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

São Carlos, 2017

Perdendo a intuição



Dimensão de Espaços Vetoriais

- Exemplos de Espaços Vetoriais: R^n e C^n
- Dimensão: Cardinalidade da base.
- Número de parâmetros necessários para distinguir pontos no espaço vetorial.

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $R^n = f(x_1; x_2; :::; x_n); x_1; :::; x_n \ 2 \ Rg$
  Logo $dim R^n = n$

Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathrm{R}^n = f(x_1; x_2; :::; x_n); x_1; :::; x_n \; 2 \; \mathrm{R}g$
  Logo $dim\mathrm{R}^n = n$
- Seja $V = f(x; y) \; 2 \; \mathrm{R}^2; x \quad y = 0g$
  Então $dimV = 1$

- $\mathrm{R}^n = f(x_1; x_2; :::; x_n); x_1; :::; x_n \ 2 \ \mathrm{R}g$
  Logo $dim\mathrm{R}^n = n$
- Seja $V = f(x; y) \ 2 \ \mathrm{R}^2; x \quad y = 0g$
  Então $dimV = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t.
  Por exemplo, $1 + 2t = (1; 2; :::; 0; :::) \ 2 \ V[t]$ e
  $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7; 0; 0; 4; 0; :::; 0; :::) \ 2 \ V[t]$

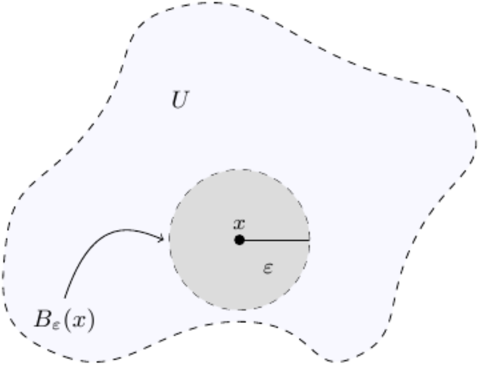
Dimensão de Espaços Vetoriais

- $\mathrm{R}^n = f(x_1; x_2; :::; x_n); x_1; :::; x_n \; 2 \; \mathrm{R}g$
  Logo $dim\mathrm{R}^n = n$
- Seja $V = f(x; y) \; 2 \; \mathrm{R}^2; x \quad y = 0g$
  Então $dimV = 1$
- Seja $V[t]$ o espaço dos polinômios reais em t.
  Por exemplo, $1 + 2t = (1; 2; :::; 0; :::) \; 2 \; V[t]$ e
  $7 + 0t + 0t^2 + 4t^3 = (7; 0; 0; 4; 0; :::; 0; :::) \; 2 \; V[t]$
  Temos $dimV[t] = \; 1$

Conjuntos abertos

"Definição"

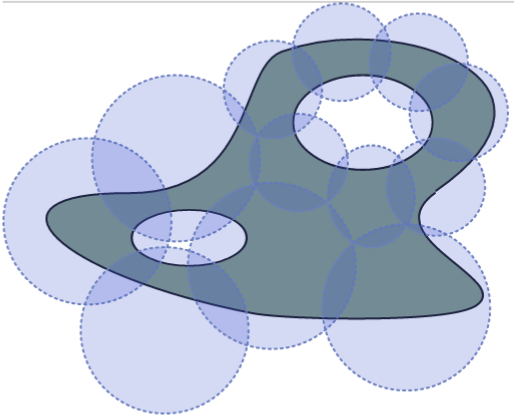
Conjuntos aonde todo ponto "cabe com folga". Ou seja, dado um ponto *x* no conjunto, existe uma bola com centro em *x* inteiramente contida no conjunto. Em R, os abertos são os intervalos abertos e união de intervalos abertos.



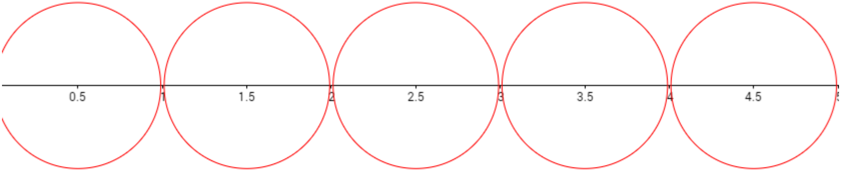
Cobertura por abertos de X

Definição

Família de conjuntos abertos que contém X.



- Considere $X = \mathbb{R}$
- Seja $F = \{(a, a+1); \forall a \in \mathbb{Z}\}$ e $G = \{(b + \frac{1}{2}, b + \frac{3}{2}); \forall b \in \mathbb{Z}\}$
- Então $U = F \cup G$ é cobertura de X



Exemplo de cobertura por abertos

Considere $X = \mathbb{R}$

Seja $F = \{(a, a+1), \forall a \in \mathbb{Z}\}$ e $G = \{(b + \frac{1}{2}, b + \frac{3}{2}), \forall b \in \mathbb{Z}\}$

Então $U = F \cup G$ é cobertura de X

Dimensão topológica

De nição

Re namento de uma cobertura : Um re namento de uma cobertura de um espaço X uma nova cobertura do mesmo espaço tal que cada conjunto da nova cobertura um subconjunto de algum elemento da anti cobertura

Dimensão topológica

Definição

Ordem de uma cobertura: Número máximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definição

Ordem de uma cobertura: Número máximo de abertos que intersectam um mesmo ponto.

Definição

Dimensão topológica de X: Seja X subconjunto de um espaço topológico. Suponha que exista um natural n tal que toda cobertura aberta C de X possui um refinamento C' de ordem $n+1$. Se n é o menor natural com essa propriedade, então $\dim_T(X) = n$. Se tal n não existir, diremos que X possui dimensão infinita.

Exemplo: Dimensão de $\mathbb{R}$

Considere $X = \mathbb{R}$ com a cobertura definida anteriormente

Ordem = 2

$\mathrm{Dim}_T\, \mathbb{R} = 1$

Dimensão de auto-similaridade

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{2}$
$s^{2} = 2^{2}$ quadrados

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
$s^{2} = 3^{2}$ quadrados

lado original: 1
lado menor: $s = \frac{1}{3}$
$s^{3} = 3^{3}$ cubos

Dimensão de auto-similaridade

Definição

Em geral: Se um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ pode ser dividido em um número finito $N(s)$ de subconjuntos, todos congruentes, reescalado por um fator linear s, então a dimensão de auto-similaridade de X é o único d que satisfaz $N(s) = s^{-d}$.

$$\text{Ou seja, } d = \frac{\log(N(s))}{\log(\frac{1}{s})}$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

$$s = \frac{1}{3}$$
$$N(s) = 2$$

Dimensão de auto-similaridade (Cantor Set)

$s = \frac{1}{3}$

$N(s) = 2$

Queremos d tal que $3^d = 2$ logo $d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \quad 0.63092975\ldots$

Dimensão de auto-similaridade (Koch Snowflake)

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \quad 1.2618$$

Box-counting dimension

A m de expandir para conjuntos mais gerais, de nimos a Box-counting dimension:

De nicao

Seja $X \quad R^n$ limitado e $N(\, ; X)$ o numero mnimo de bolas de tamanho no maximo   que cobrem X. Entao

$$\dim_B X = \lim_{\ ! \ 0} \frac{\log(N(\, ; X))}{\log \frac{1}{\ }}$$

Box-counting Dimension (computando)

Seja X R^n limitado

Particione R^n em cubos de lado

Seja $N(; X)$ o número de cubos que intersecta X

$$d = \lim_{\ \to 0} \frac{\log(N(; X))}{\log \frac{1}{\ }}$$

Box-counting Dimension (computando)

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ limitado

Particione $\mathbb{R}^n$ em cubos de lado ϵ

Seja $N(\epsilon; X)$ o número de cubos que intersecta X

$$d = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log(N(\epsilon; X))}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

Para ϵ entre 20m e 200km, $d \approx 1.21$

Para efeitos de comparação:

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

Box-counting Dimension (computando)

Para efeitos de comparação:

d   1:02

Medida de Hausdorff

Definição

Seja $d > 0$ e $X \quad (Y;\ )$ um espaço métrico. A medida d-dimensional de Hausdorff é definida por

$$_d(X) = \lim_{\to 0} \inf_{U_i} \sum_i (\mathrm{diam}(U_i))^d$$

Aonde U_i é cobertura por abertos de X com diâmetro menor que

Medida de Hausdor

Medida de Hausdor

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se ${}_d(X) < 1$, então ${}_{d^0}(X) = 0$ e, se ${}_{d^0}(X) > 0$, então ${}_d(X) = 1$.

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d^0}(X) = 0$ e, se $_{d^0}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Dem.: Se $_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f\, B_j\, g_{j\,2\,N}$ com $X \quad [\; {}^{1}_{j=1} B_j$; $\mathrm{diam}(B_j)$, e

$$P\ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad {}_d(X) + 1$$

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d^0}(X) = 0$ e, se $_{d^0}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Dem.: Se $_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f B_j g_{j 2 N}$ com $X \; [\, ^1_{j=1} B_j ; \mathrm{diam}(B_j)$, e

$$P \, ^1_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad _d(X) + 1$$

Se $d^0 > d$,

$$(\mathrm{diam}(B_j))^{d^0 \; d} \qquad d^0 \; d \;) \quad (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad d^0 \; d (\mathrm{diam}(B_j))^d$$

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se ${}_d(X) < 1$, então ${}_{d^0}(X) = 0$ e, se ${}_{d^0}(X) > 0$, então ${}_d(X) = 1$.

Dem.: Se ${}_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f B_j g_{j 2 N}$ com $X \quad [\ {}^{1}_{j=1} B_j ; \mathrm{diam}(B_j)$, e

$$P \ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad {}_d(X) + 1$$

Se $d^0 > d$,

$$(\mathrm{diam}(B_j))^{d^0 \ d} \qquad {}^{d^0 \ d} \ ) \quad (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad {}^{d^0 \ d}(\mathrm{diam}(B_j))^d$$

$$P \ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad {}^{d^0 \ d} \ P \ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad {}^{d^0 \ d}[\ {}_d(X) + 1]$$

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja $d^0 > d > 0$. Se $_d(X) < 1$, então $_{d^0}(X) = 0$ e, se $_{d^0}(X) > 0$, então $_d(X) = 1$.

Dem.: Se $_d(X) < 1$, para todo > 0 su cientemente pequeno, existe $f B_j g_{j 2 N}$ com $X \quad [\ {}^{1}_{j=1} B_j$; $\mathrm{diam}(B_j)$, e

$$P \ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad {}_d(X) + 1$$

Se $d^0 > d$,

$$(\mathrm{diam}(B_j))^{d^0 \ \ d} \qquad {}^{d^0 \ \ d} \ ) \quad (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad {}^{d^0 \ \ d} (\mathrm{diam}(B_j))^d$$

$$P \ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^{d^0} \qquad {}^{d^0 \ \ d} \ P \ {}^{1}_{j=1} (\mathrm{diam}(B_j))^d \qquad {}^{d^0 \ \ d}[\ {}_d(X) + 1]$$

Logo $^{d^0}(X) \qquad {}^{d^0 \ \ d}[\ {}_d(X) + 1] \ ! \ {}^0 \ 0$ e

$$^{d^0}(X) = 0$$

Dimensão de Hausdor

De nição

Seja $X \quad (Y; \ )$. De nimos $\mathrm{Dim}_H(X)$ como o único $d \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ tal que $_{d'}(X) = 0$ se $d' > d$ e $_{d'}(X) = \infty$ se $d > d'$.

Proposição

Seja X $\mathbb{R}^n$ limitado, então $\mathrm{Dim}_T(X)$ $\mathrm{Dim}_H(X)$ $\mathrm{Dim}_B(X)$

Dimensão de Hausdor

Proposição

Seja X R^n limitado, então $\mathrm{Dim}_T(X)$ $\mathrm{Dim}_H(X)$ $\mathrm{Dim}_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdor é estritamente maior que a dimensão topológica"

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja $X \quad R^n$ limitado, então $Dim_T(X) \quad Dim_H(X) \quad Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = f0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; :::g$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Dimensão de Hausdorff

Proposição

Seja X R^n limitado, então $Dim_T(X)$ $Dim_H(X)$ $Dim_B(X)$

Benoit Mandelbrot: "Um fractal é um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é estritamente maior que a dimensão topológica"

Seja $X = f0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; :::g$. Então $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = \frac{1}{2}$

Existem conjuntos X tal que $Dim_H(X) = 0$ e $Dim_B(X) = 1$

Referências Bibliográficas I

K. Falconer.
Fractal Geometry.

A. N. Carvalho.
Sistemas dinâmicos não-lineares.

D. Schleicher.
Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises.