

Um grupo de truques

Leandro F. Aurichi

ICMC-USP

Encontrar a carta certa

Encontrar a carta certa

- Alguém escolhe uma carta.

Encontrar a carta certa

- Alguém escolhe uma carta.
- A carta é colocada sobre o topo da pilha.

Encontrar a carta certa

- Alguém escolhe uma carta.
- A carta é colocada sobre o topo da pilha.
- A pilha é cortada diversas vezes (cortes simples).

Encontrar a carta certa

- Alguém escolhe uma carta.
- A carta é colocada sobre o topo da pilha.
- A pilha é cortada diversas vezes (cortes simples).
- A carta é encontrada depois.

Qual o truque?

Qual o truque?

- Eu olhei a última carta.

Qual o truque?

- Eu olhei a última carta.
- Repare que o ato de “cortar” a pilha pode ser decomposto em “passar a primeira carta para baixo” n vezes.

Qual o truque?

- Eu olhei a última carta.
- Repare que o ato de “cortar” a pilha pode ser decomposto em “passar a primeira carta para baixo” n vezes.
- Note que “passar a primeira para baixo” não altera adjacências

Qual o truque?

- Eu olhei a última carta.
- Repare que o ato de “cortar” a pilha pode ser decomposto em “passar a primeira carta para baixo” n vezes.
- Note que “passar a primeira para baixo” não altera adjacências
- Assim, ao saber qual era a última, podemos encontrar a que era a primeira

Qual o truque?

- Eu olhei a última carta.
- Repare que o ato de “cortar” a pilha pode ser decomposto em “passar a primeira carta para baixo” n vezes.
- Note que “passar a primeira para baixo” não altera adjacências
- Assim, ao saber qual era a última, podemos encontrar a que era a primeira (ou errar com chance de 50%).

Jogo de paciência

Jogo de paciência

- Abra um baralho em leque.

Jogo de paciência

- Abra um baralho em leque.
- Se encontrar duas cartas de mesma cor lado a lado, retire-as.

Jogo de paciência

- Abra um baralho em leque.
- Se encontrar duas cartas de mesma cor lado a lado, retire-as.
- Você vence se conseguir retirar todas as cartas.

Jogo de paciência para impacientes

Jogo de paciência para impacientes

- Antes de jogar separe o baralho em duas metades.

Jogo de paciência para impacientes

- Antes de jogar separe o baralho em duas metades.
- Deixe a mesma quantidade de cartas pretas em cada metade (ou seja, 13 em cada).

Jogo de paciência para impacientes

- Antes de jogar separe o baralho em duas metades.
- Deixe a mesma quantidade de cartas pretas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Deixe a mesma quantidade de cartas vermelhas em cada metade (ou seja, 13 em cada).

Jogo de paciência para impacientes

- Antes de jogar separe o baralho em duas metades.
- Deixe a mesma quantidade de cartas pretas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Deixe a mesma quantidade de cartas vermelhas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Embaralhe cada metade COMO VOCÊ QUISE.

Jogo de paciência para impacientes

- Antes de jogar separe o baralho em duas metades.
- Deixe a mesma quantidade de cartas pretas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Deixe a mesma quantidade de cartas vermelhas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Embaralhe cada metade COMO VOCÊ QUISER.
- Junte as duas metades, alternando as cartas de cada metade.

Jogo de paciência para impacientes

- Antes de jogar separe o baralho em duas metades.
- Deixe a mesma quantidade de cartas pretas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Deixe a mesma quantidade de cartas vermelhas em cada metade (ou seja, 13 em cada).
- Embaralhe cada metade COMO VOCÊ QUISE.
- Junte as duas metades, alternando as cartas de cada metade.
- Jogue seguindo as regras.

Jogo de paciência para impacientes

- Vamos mostrar que assim você sempre vence.

Jogo de paciência para impacientes

- Vamos mostrar que assim você sempre vence.
- Imagine que pintamos o verso das cartas de cada metade com duas cores diferentes: Metade 1, pintamos com a cor 1. Metade 2, pintamos com a cor 2.

Jogo de paciência para impacientes

- Vamos mostrar que assim você sempre vence.
- Imagine que pintamos o verso das cartas de cada metade com duas cores diferentes: Metade 1, pintamos com a cor 1. Metade 2, pintamos com a cor 2.
- Note que temos 3 coisas ao juntar a metades:

Jogo de paciência para impacientes

- 1 A quantidade de cartas de cor 1 que são vermelhas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são vermelhas.

Jogo de paciência para impacientes

- 1 A quantidade de cartas de cor 1 que são vermelhas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são vermelhas.
- 2 A quantidade de cartas de cor 1 que são pretas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são pretas.

Jogo de paciência para impacientes

- 1 A quantidade de cartas de cor 1 que são vermelhas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são vermelhas.
- 2 A quantidade de cartas de cor 1 que são pretas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são pretas.
- 3 As cores 1 e 2 se alternam na pilha

Jogo de paciência para impacientes

- 1 A quantidade de cartas de cor 1 que são vermelhas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são vermelhas.
- 2 A quantidade de cartas de cor 1 que são pretas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são pretas.
- 3 As cores 1 e 2 se alternam na pilha
 - Note que essas 3 condições permanecem válidas ao longo de uma partida.

Jogo de paciência para impacientes

- 1 A quantidade de cartas de cor 1 que são vermelhas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são vermelhas.
- 2 A quantidade de cartas de cor 1 que são pretas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são pretas.
- 3 As cores 1 e 2 se alternam na pilha
 - Note que essas 3 condições permanecem válidas ao longo de uma partida.
 - Note que, se você perdeu, então teríamos cartas vermelhas e pretas alternadas no final.

Jogo de paciência para impacientes

- 1 A quantidade de cartas de cor 1 que são vermelhas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são vermelhas.
- 2 A quantidade de cartas de cor 1 que são pretas é igual a quantidade de cartas de cor 2 que são pretas.
- 3 As cores 1 e 2 se alternam na pilha
 - Note que essas 3 condições permanecem válidas ao longo de uma partida.
 - Note que, se você perdeu, então teríamos cartas vermelhas e pretas alternadas no final.
 - Mas isso quer dizer que todas as pretas tem a mesma cor de verso, contrariando as regras acima.

Truque de 4 cartas

Truque de 4 cartas

- Pegue uma carta de cada naipe.

Truque de 4 cartas

- Pegue uma carta de cada naipe.
- Coloque-as na seguinte ordem (de cima para baixo): ♠♥♣♦.

Truque de 4 cartas

- Pegue uma carta de cada naipe.
- Coloque-as na seguinte ordem (de cima para baixo): ♠♥♣♦.
- Deixe todas viradas para cima.

Truque de 4 cartas

- Pegue uma carta de cada naipe.
- Coloque-as na seguinte ordem (de cima para baixo): ♠♥♣♦.
- Deixe todas viradas para cima.
- Vire a primeira carta para baixo (mas deixando ela no mesmo lugar).

Truque de 4 cartas

- Pegue uma carta de cada naipe.
- Coloque-as na seguinte ordem (de cima para baixo): ♠♥♣♦.
- Deixe todas viradas para cima.
- Vire a primeira carta para baixo (mas deixando ela no mesmo lugar).
- Se não é só a carta de ♠ que está ao contrário, você já errou...

Faça qualquer um dos seguintes movimentos, na ordem que você quiser, quantas vezes você quiser:

Faça qualquer um dos seguintes movimentos, na ordem que você quiser, quantas vezes você quiser:

A Faça um corte simples;

Embaralhando

Faça qualquer um dos seguintes movimentos, na ordem que você quiser, quantas vezes você quiser:

- A Faça um corte simples;
- B Vire as duas primeira cartas como uma só.

Embaralhando

Faça qualquer um dos seguintes movimentos, na ordem que você quiser, quantas vezes você quiser:

- A Faça um corte simples;
- B Vire as duas primeira cartas como uma só.
- C Vire as quatro cartas como uma só.

Terminando

- Pegue a primeira carta e vire-a (mas a deixe no mesmo lugar)

Terminando

- Pegue a primeira carta e vire-a (mas a deixe no mesmo lugar)
- Vire as 2 primeiras cartas como uma só.

Terminando

- Pegue a primeira carta e vire-a (mas a deixe no mesmo lugar)
- Vire as 2 primeiras cartas como uma só.
- Vire as 3 primeiras cartas como uma só.

Mas e a mágica?

Mas e a mágica?

O truque é que a única carta que está ao contrário das outras é a carta de .

Mas e a mágica?

O truque é que a única carta que está ao contrário das outras é a carta de .
(se não for, você que errou alguma coisa no meio...)

Vejam os como isso aconteceu

Vejamos como isso aconteceu

Vamos denotar por *CERTO* o conjunto de todas as possibilidades de posições de forma que apenas uma única carta está ao contrário das outras e que tal carta está a uma distância de duas cartas da carta de .

Vejam os como isso aconteceu

Vamos denotar por *CERTO* o conjunto de todas as possibilidades de posições de forma que apenas uma única carta está ao contrário das outras e que tal carta está a uma distância de duas cartas da carta de \clubsuit .

Lembre que, logo no começo, deixamos as cartas numa posição de CERTO: $\overline{\spadesuit}\heartsuit\clubsuit\diamondsuit$. (o tracinho indica qual está invertida com relação às outras).

O que é CERTO permanece CERTO

O que é CERTO permanece CERTO

Durante a fase “livre”, podemos fazer 3 coisas.

O que é CERTO permanece CERTO

Durante a fase “livre”, podemos fazer 3 coisas.

Vejamos o que acontece se pegamos uma posição em CERTO e fazemos uma dessas 3 coisas.

O que é CERTO permanece CERTO

Durante a fase “livre”, podemos fazer 3 coisas.

Vejamos o que acontece se pegamos uma posição em CERTO e fazemos uma dessas 3 coisas.

Note que uma posição em CERTO é da forma

$\clubsuit XYZ$

O que é CERTO permanece CERTO

Durante a fase “livre”, podemos fazer 3 coisas.

Vejamos o que acontece se pegamos uma posição em CERTO e fazemos uma dessas 3 coisas.

Note que uma posição em CERTO é da forma

$$\begin{array}{l} \clubsuit X \bar{Y} Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} \end{array}$$

O que é CERTO permanece CERTO

Durante a fase “livre”, podemos fazer 3 coisas.

Vejam os que acontecem se pegamos uma posição em CERTO e fazemos uma dessas 3 coisas.

Note que uma posição em CERTO é da forma

$$\clubsuit X \bar{Y} Z$$
$$X \clubsuit Y \bar{Z}$$
$$\bar{X} Y \clubsuit Z$$

O que é CERTO permanece CERTO

Durante a fase “livre”, podemos fazer 3 coisas.

Vejamos o que acontece se pegamos uma posição em CERTO e fazemos uma dessas 3 coisas.

Note que uma posição em CERTO é da forma

$\clubsuit X \bar{Y} Z$

$X \clubsuit Y \bar{Z}$

$\bar{X} Y \clubsuit Z$

$X \bar{Y} Z \clubsuit$.

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte.

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte. Mas note que podemos pensar que sempre só passamos a primeira carta para baixo (qualquer outro corte é obtido se repetindo isso).

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte. Mas note que podemos pensar que sempre só passamos a primeira carta para baixo (qualquer outro corte é obtido se repetindo isso).

$$A(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \bar{Y} Z \clubsuit$$

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte. Mas note que podemos pensar que sempre só passamos a primeira carta para baixo (qualquer outro corte é obtido se repetindo isso).

$$A(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \bar{Y} Z \clubsuit$$

$$A(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit Y \bar{Z} X$$

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte. Mas note que podemos pensar que sempre só passamos a primeira carta para baixo (qualquer outro corte é obtido se repetindo isso).

$$A(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \bar{Y} Z \clubsuit$$

$$A(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit Y \bar{Z} X$$

$$A(\bar{X} Y \clubsuit Z) = Y \clubsuit Z \bar{X}$$

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte. Mas note que podemos pensar que sempre só passamos a primeira carta para baixo (qualquer outro corte é obtido se repetindo isso).

$$A(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \bar{Y} Z \clubsuit$$

$$A(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit Y \bar{Z} X$$

$$A(\bar{X} Y \clubsuit Z) = Y \clubsuit Z \bar{X}$$

$$A(X \bar{Y} Z \clubsuit) = \bar{Y} Z \clubsuit X$$

Cortes não atrapalham

A: Cortar o monte. Mas note que podemos pensar que sempre só passamos a primeira carta para baixo (qualquer outro corte é obtido se repetindo isso).

$$A(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \bar{Y} Z \clubsuit$$

$$A(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit Y \bar{Z} X$$

$$A(\bar{X} Y \clubsuit Z) = Y \clubsuit Z \bar{X}$$

$$A(X \bar{Y} Z \clubsuit) = \bar{Y} Z \clubsuit X$$

Ou seja, se começamos CERTO, terminamos CERTO.

Inverter duas não atrapalha

B: Inverter as duas primeiras.

Inverter duas não atrapalha

B : Inverter as duas primeiras.

$$B(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \clubsuit Y \bar{Z}$$

Inverter duas não atrapalha

B : Inverter as duas primeiras.

$$B(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \clubsuit Y \bar{Z}$$

$$B(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit X \bar{Y} Z$$

Inverter duas não atrapalha

B : Inverter as duas primeiras.

$$B(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \clubsuit Y \bar{Z}$$

$$B(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit X \bar{Y} Z$$

$$B(\bar{X} Y \clubsuit Z) = \bar{Y} X \clubsuit Z$$

Inverter duas não atrapalha

B : Inverter as duas primeiras.

$$B(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \clubsuit Y \bar{Z}$$

$$B(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit X \bar{Y} Z$$

$$B(\bar{X} Y \clubsuit Z) = \bar{Y} X \clubsuit Z$$

$$B(X \bar{Y} Z \clubsuit) = Y \bar{X} Z \clubsuit$$

Inverter duas não atrapalha

B : Inverter as duas primeiras.

$$B(\clubsuit X \bar{Y} Z) = X \clubsuit Y \bar{Z}$$

$$B(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \clubsuit X \bar{Y} Z$$

$$B(\bar{X} Y \clubsuit Z) = \bar{Y} X \clubsuit Z$$

$$B(X \bar{Y} Z \clubsuit) = Y \bar{X} Z \clubsuit$$

Ou seja, se começamos CERTO, terminamos CERTO.

Inverter todas não artrapalha

C: Inverter todas.

Inverter todas não artrapalha

C: Inverter todas.

$$C(\clubsuit X \bar{Y} Z) = Z \bar{Y} X \clubsuit$$

Inverter todas não artrapalha

C: Inverter todas.

$$C(\clubsuit X \bar{Y} Z) = Z \bar{Y} X \clubsuit$$

$$C(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \bar{Z} Y \clubsuit X$$

Inverter todas não artrapalha

C: Inverter todas.

$$C(\clubsuit X \bar{Y} Z) = Z \bar{Y} X \clubsuit$$

$$C(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \bar{Z} Y \clubsuit X$$

$$C(\bar{X} Y \clubsuit Z) = Z \clubsuit Y \bar{X}$$

Inverter todas não artrapalha

C: Inverter todas.

$$C(\clubsuit X \bar{Y} Z) = Z \bar{Y} X \clubsuit$$

$$C(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \bar{Z} Y \clubsuit X$$

$$C(\bar{X} Y \clubsuit Z) = Z \clubsuit Y \bar{X}$$

$$C(X \bar{Y} Z \clubsuit) = \clubsuit Z \bar{Y} X$$

Inverter todas não artrapalha

C: Inverter todas.

$$C(\clubsuit X \bar{Y} Z) = Z \bar{Y} X \clubsuit$$

$$C(X \clubsuit Y \bar{Z}) = \bar{Z} Y \clubsuit X$$

$$C(\bar{X} Y \clubsuit Z) = Z \clubsuit Y \bar{X}$$

$$C(X \bar{Y} Z \clubsuit) = \clubsuit Z \bar{Y} X$$

Ou seja, se começamos CERTO, terminamos CERTO.

Vejamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações

Terminando

Vejamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

Terminando

Vejamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$\clubsuit X\bar{Y}Z$

Terminando

Vejamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\clubsuit X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z$$

Terminando

Vejamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\clubsuit X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z$$

Terminando

Vejamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\clubsuit X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z$$

Terminando

Veamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\clubsuit X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z$$
$$X \clubsuit Y \bar{Z}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \end{aligned}$$

Terminando

Veamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \end{aligned}$$

Veamos o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{array}{l} \clubsuit X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \end{array}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z & \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \bar{\clubsuit} Z \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow Y X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \bar{\clubsuit} Z \rightarrow \bar{X} Y \bar{\bar{\clubsuit}} Z \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \bar{\clubsuit} Z \rightarrow \bar{X} Y \bar{\clubsuit} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} Y X Z \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{X} Y \bar{\clubsuit} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} Y X Z \\ X \bar{Y} Z \clubsuit & \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{X} Y \bar{\clubsuit} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} Y X Z \\ X \bar{Y} Z \clubsuit &\rightarrow \bar{X} \bar{Y} Z \clubsuit \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\clubsuit X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z$$

$$X \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z$$

$$\bar{X} Y \clubsuit Z \rightarrow X Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{X} Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{\clubsuit} Y X Z$$

$$X \bar{Y} Z \clubsuit \rightarrow \bar{X} \bar{Y} Z \clubsuit \rightarrow Y X Z \clubsuit$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow \bar{Y} X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{X} Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{\clubsuit} Y X Z \\ X \bar{Y} Z \clubsuit &\rightarrow \bar{X} \bar{Y} Z \clubsuit \rightarrow Y X Z \clubsuit \rightarrow \bar{Z} X Y \clubsuit \end{aligned}$$

Terminando

Vejam os o que acontece com uma posição em CERTO, quando fazemos as últimas operações (inverter a primeira \rightarrow inverter as 2 primeiras \rightarrow inverter as 3 primeiras):

$$\begin{aligned} \clubsuit X \bar{Y} Z &\rightarrow \bar{\clubsuit} X \bar{Y} Z \rightarrow \bar{X} \clubsuit \bar{Y} Z \rightarrow Y \bar{\clubsuit} X Z \\ X \clubsuit Y \bar{Z} &\rightarrow \bar{X} \clubsuit Y \bar{Z} \rightarrow \bar{\clubsuit} X Y \bar{Z} \rightarrow Y X \bar{\clubsuit} Z \\ \bar{X} Y \clubsuit Z &\rightarrow X Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{X} Y \clubsuit Z \rightarrow \bar{\clubsuit} Y X Z \\ X \bar{Y} Z \clubsuit &\rightarrow \bar{X} \bar{Y} Z \clubsuit \rightarrow Y X Z \clubsuit \rightarrow \bar{Z} X Y \clubsuit \end{aligned}$$

TA-DA.

Ensley, D. E., Invariants under group actions to amaze your friends, Mathematics Magazine, v. 72 (5), 1999.