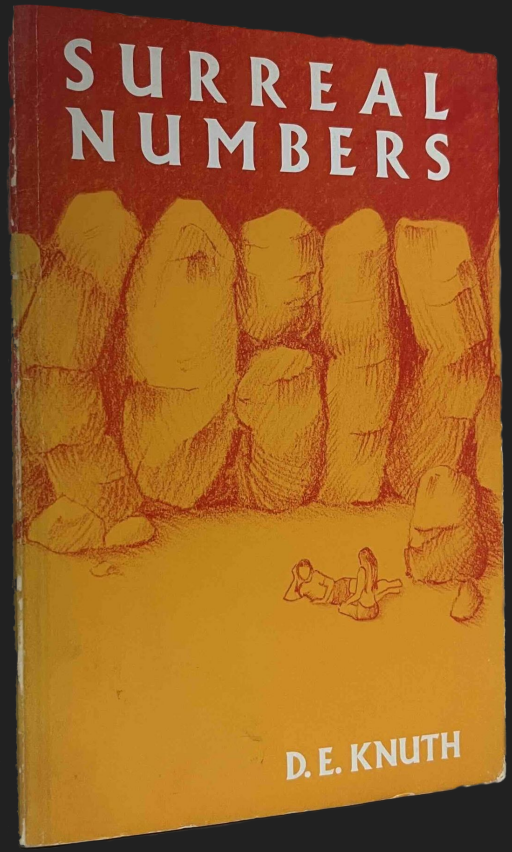
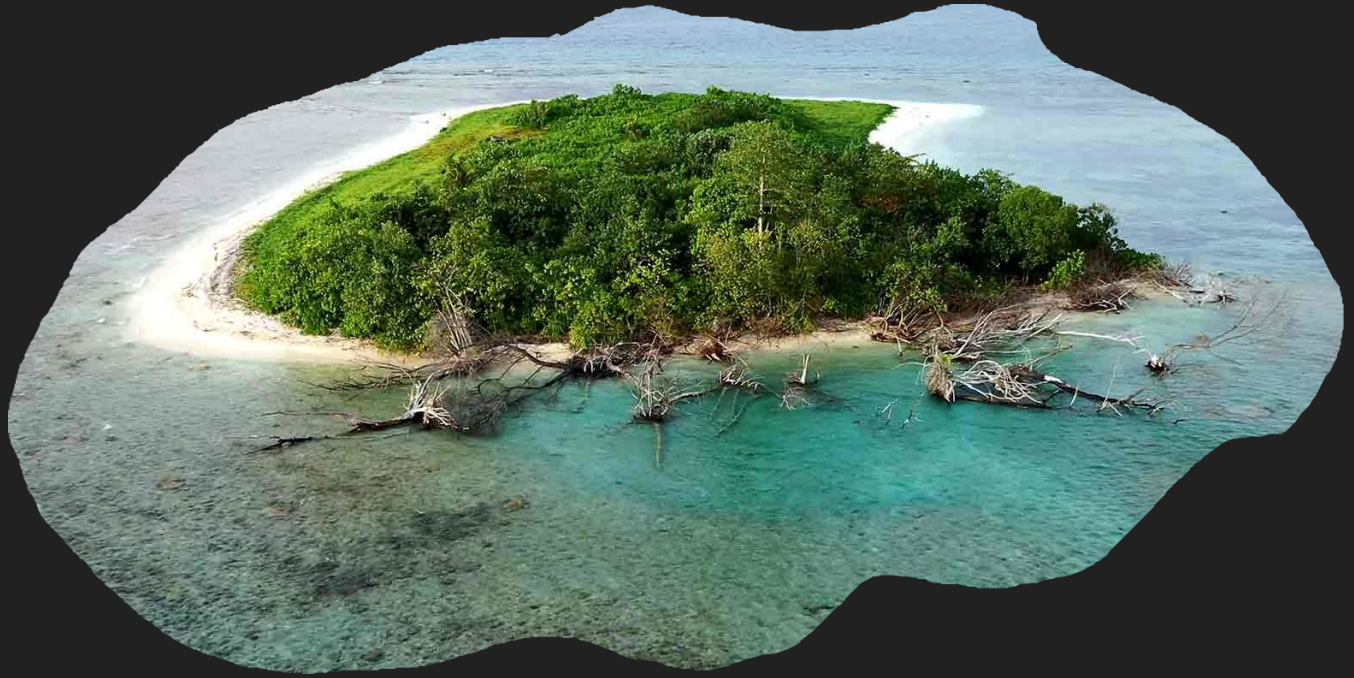
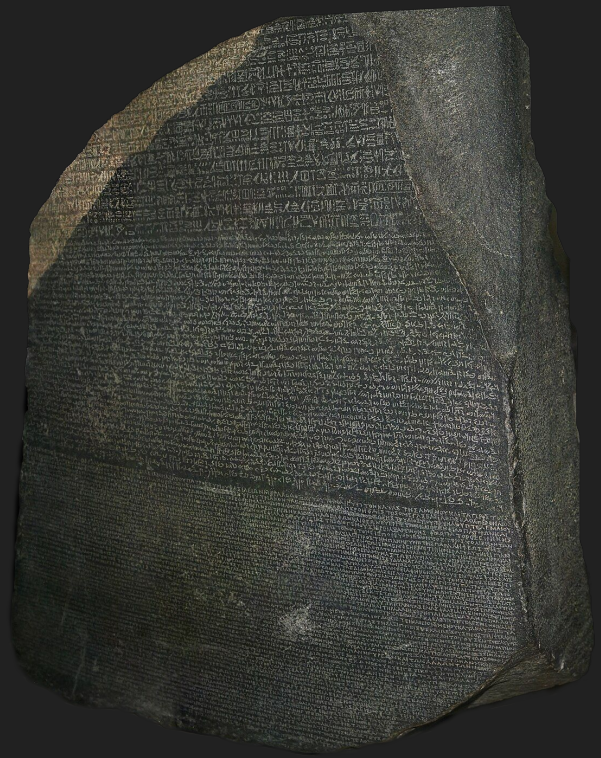
todos os números grandes e pequenos

como uma ex-estudante se
voltou a matemática pura
e encontrou (quase) total
felicidade


SURREAL
NUMBERS
D. E. KNUTH





No começo, tudo era vazio, e J.H.W.H. Conway começou a criar números. Conway disse: “Que se faça duas regras que tragam a existência todos os números, grandes e pequenos.

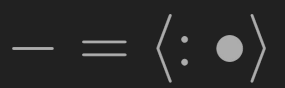
Esta será a primeira regra: Todo número corresponde a dois conjuntos de números previamente criados, tais que nenhum número do conjunto da esquerda é maior ou igual do que qualquer membro do conjunto da direita.

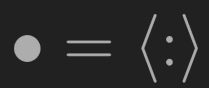
A segunda regra será esta: Um número é menor ou igual a outro número se e somente se nenhum membro do conjunto da esquerda do primeiro número é maior ou igual que o segundo número, e nenhum membro do conjunto da direita é menor ou igual ao primeiro número.

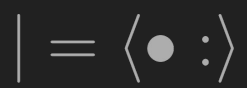
E Conway olhou para estas duas regras que fez, e contemplou: elas eram muito boas.

E o primeiro número foi criado com o conjunto da esquerda vazio, e o conjunto da direita vazio. Conway chamou este número de “zero”, e disse que este seria um sinal para separar os números positivos dos negativos. Conway provou que zero era menor ou igual que zero, e viu que isto era bom.

E este foi o primeiro dia do zero. No dia seguinte, mais dois números haviam sido criados, um com o zero como conjunto da esquerda e o outro com o zero como conjunto da direita. E Conway chamou o primeiro número de “um” e o segundo de “menos um”. E ele provou que menos um é menor ou igual a zero e que zero é menor ou igual que um.







A Primeira Regra

$$x = \langle X_E : X_D \rangle$$

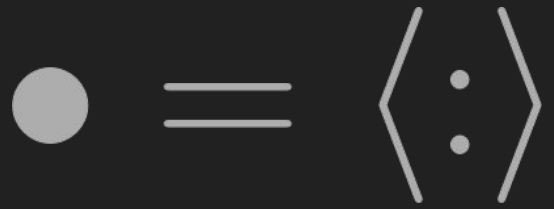
$$X_E \not\geq X_D$$

A Segunda Regra

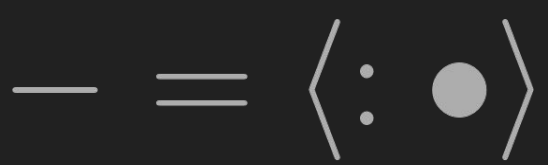
$$x \leq y$$

quando

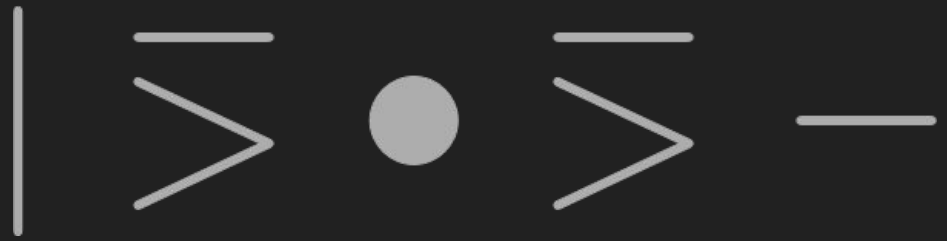
$$x \not\geq Y_D \qquad \text{e} \qquad X_E \not\geq y$$

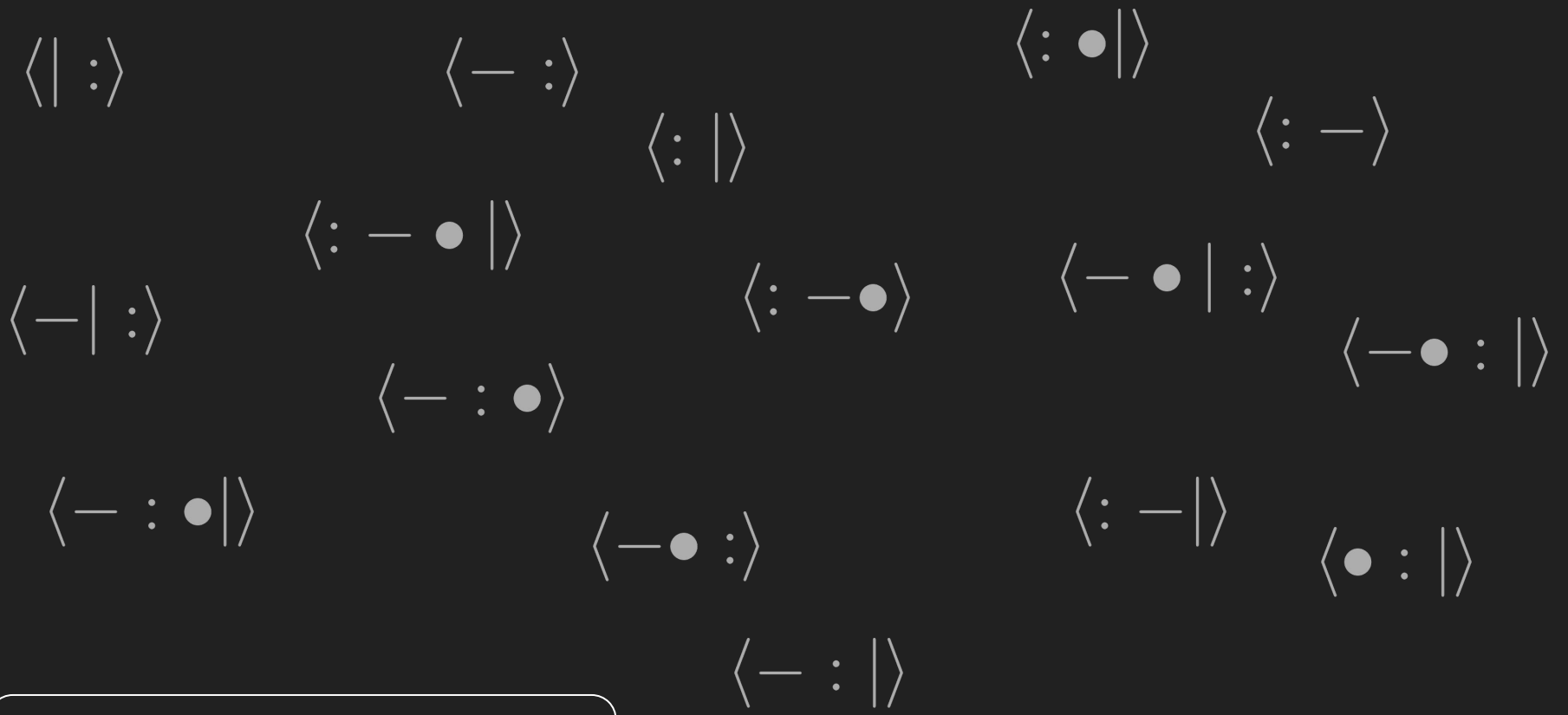


O Primeiro Dia



O Segundo Dia




O Terceiro Dia

Princípio da Indução nos Dias

Suponha que alguma propriedade valha pra todos os números criados até um certo dia. Se você consegue mostrar que isto implica que a propriedade vale para todos os números criados no dia seguinte, então você pode concluir que a propriedade vale para todos os números.

Teorema 1

$$x \leq x$$

Teorema 1

$$x \leq x$$

Suponha verdade para todos os números nascidos antes de x

Teorema 1

$$x \leq x$$

Suponha verdade para todos os números nascidos antes de x

$x \leq x$ a não ser que

$x_D \leq x$ ou $x \leq x_E$

Teorema 1

$$x \leq x$$

Suponha verdade para todos os números nascidos antes de x

$x \leq x$ a não ser que

$x_D \leq x$ ou $x \leq x_E$

Proibido pela testemunha $x_D \leq x_D$

Teorema 1

$$x \leq x$$

Suponha verdade para todos os números nascidos antes de x

$x \leq x$ a não ser que

$x_D \leq x$ ou $x \leq x_\epsilon$

Proibido pela testemunha $x_D \leq x_D$

Proibido pela testemunha $x_\epsilon \leq x_\epsilon$

Teorema 2

$$\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq z \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x \leq z$$

Teorema 2

$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad x \leq z$$

Suponha verdade para triplos de números mais simples que (x, y, z)

Teorema 2

$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \implies x \leq z$$

Suponha verdade para triplos de números mais simples que (x, y, z)

$x \leq z$ a não ser que

$z_0 \leq x$ ou $z \leq x_\epsilon$

Teorema 2

$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \implies x \leq z$$

Suponha verdade para triples de números mais simples que (x, y, z)

$x \leq z$ a não ser que

$z_D \leq x$ ou $z \leq x_E$

Se fosse o caso, $z_D \leq x \leq y$

Teorema 2

$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \implies x \leq z$$

Suponha verdade para triples de números mais simples que (x, y, z)

$x \leq z$ a não ser que

$z_0 \leq x$ ou $z \leq x_\epsilon$

Se fosse o caso, $z_0 \leq x \leq y \Rightarrow z_0 \leq y$

Teorema 2

$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \implies x \leq z$$

Suponha verdade para triples de números mais simples que (x, y, z)

$x \leq z$ a não ser que

$z_0 \leq x$ ou $z \leq x_\epsilon$

proibido por $y \leq z$

Se fosse o caso, $z_0 \leq x \leq y \Rightarrow z_0 \leq y$

Teorema 2

$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq z \end{matrix} \implies x \leq z$$

Suponha verdade para triples de números mais simples que (x, y, z)

$x \leq z$ a não ser que

$z_0 \leq x$ ou $z \leq x_\epsilon$ ← análogo

proibido por $y \leq z$

Se fosse o caso, $z_0 \leq x \leq y \Rightarrow z_0 \leq y$

Teorema 3

$$X_E < x < X_D$$

Teorema 4

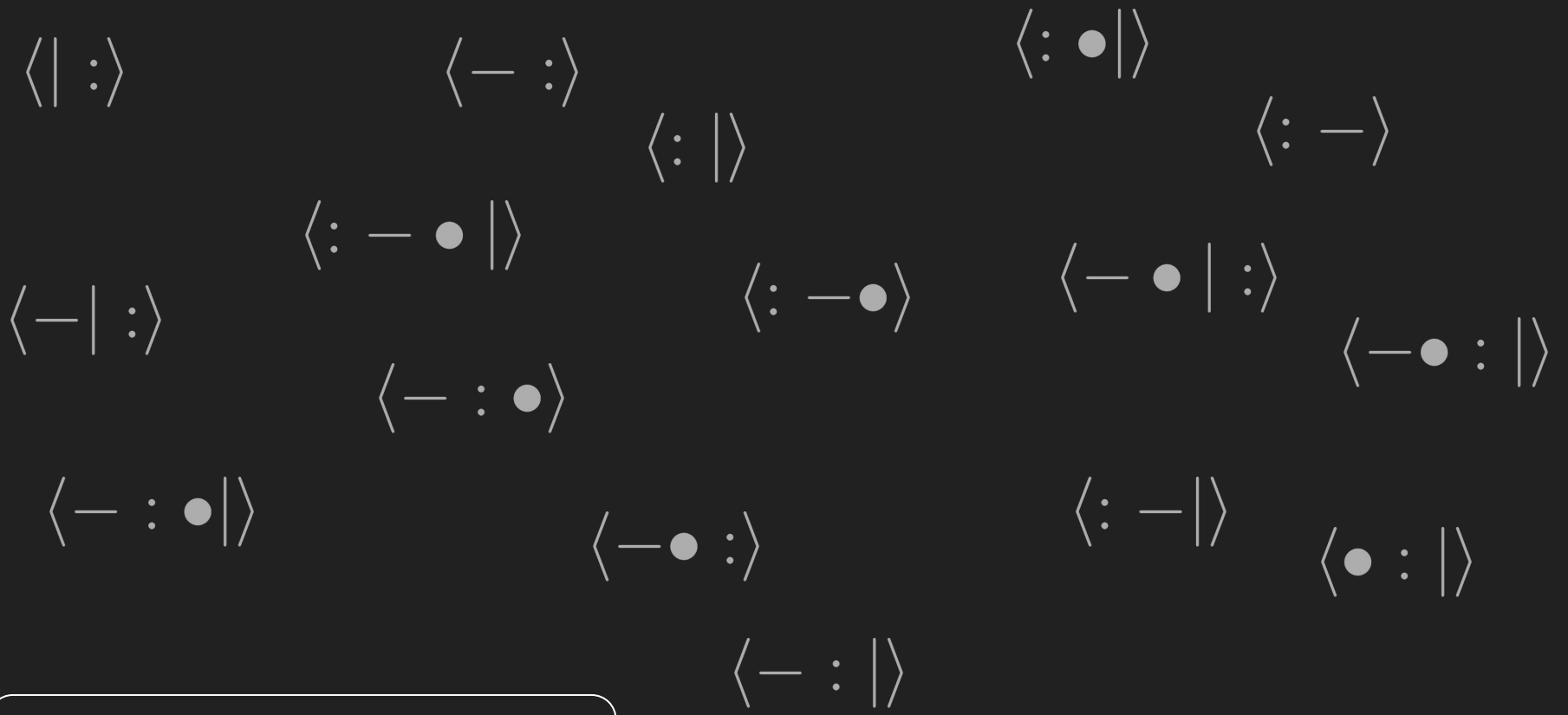
$$x \nleq y \implies y \leq x$$

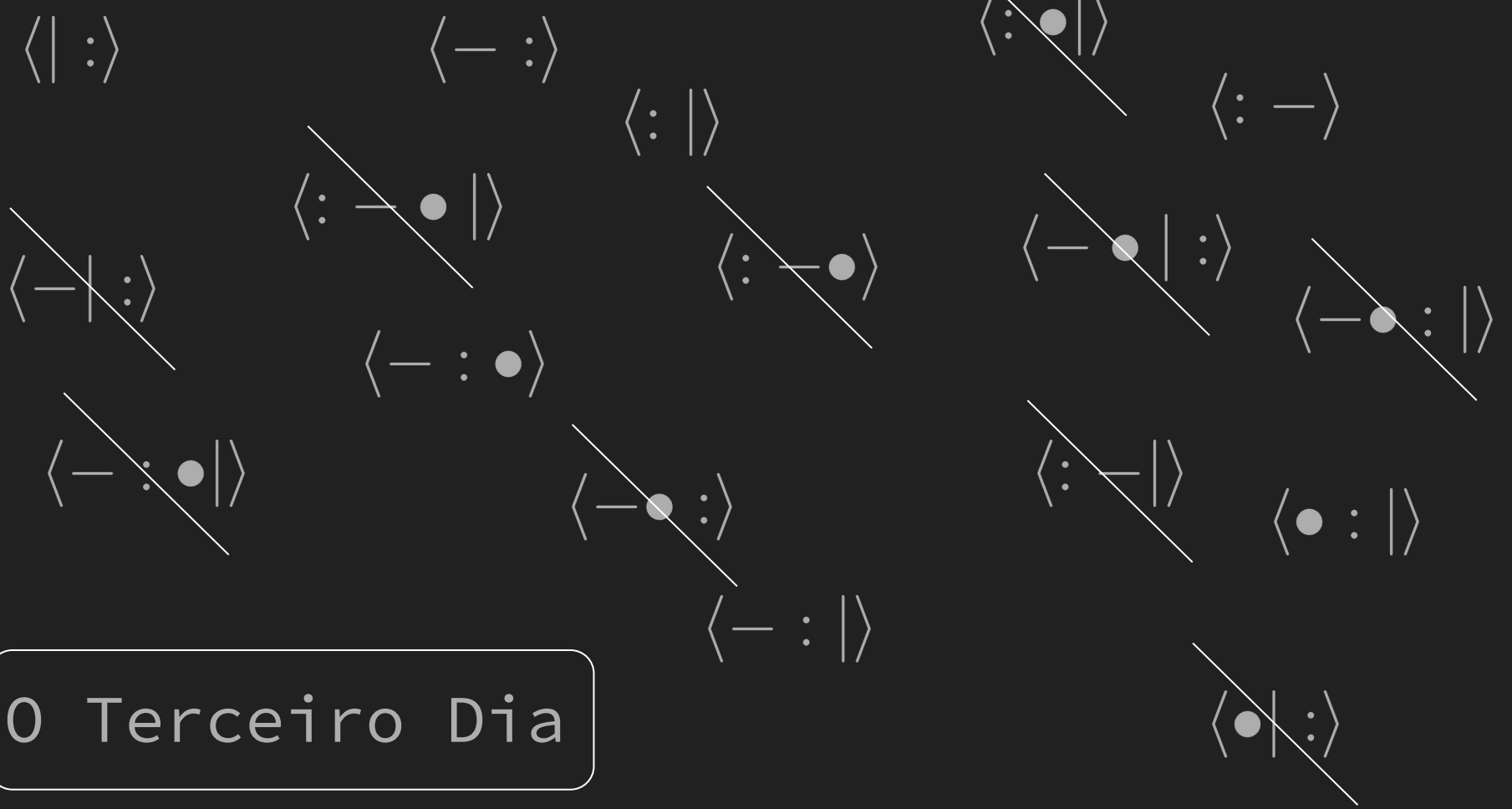
Teorema 5

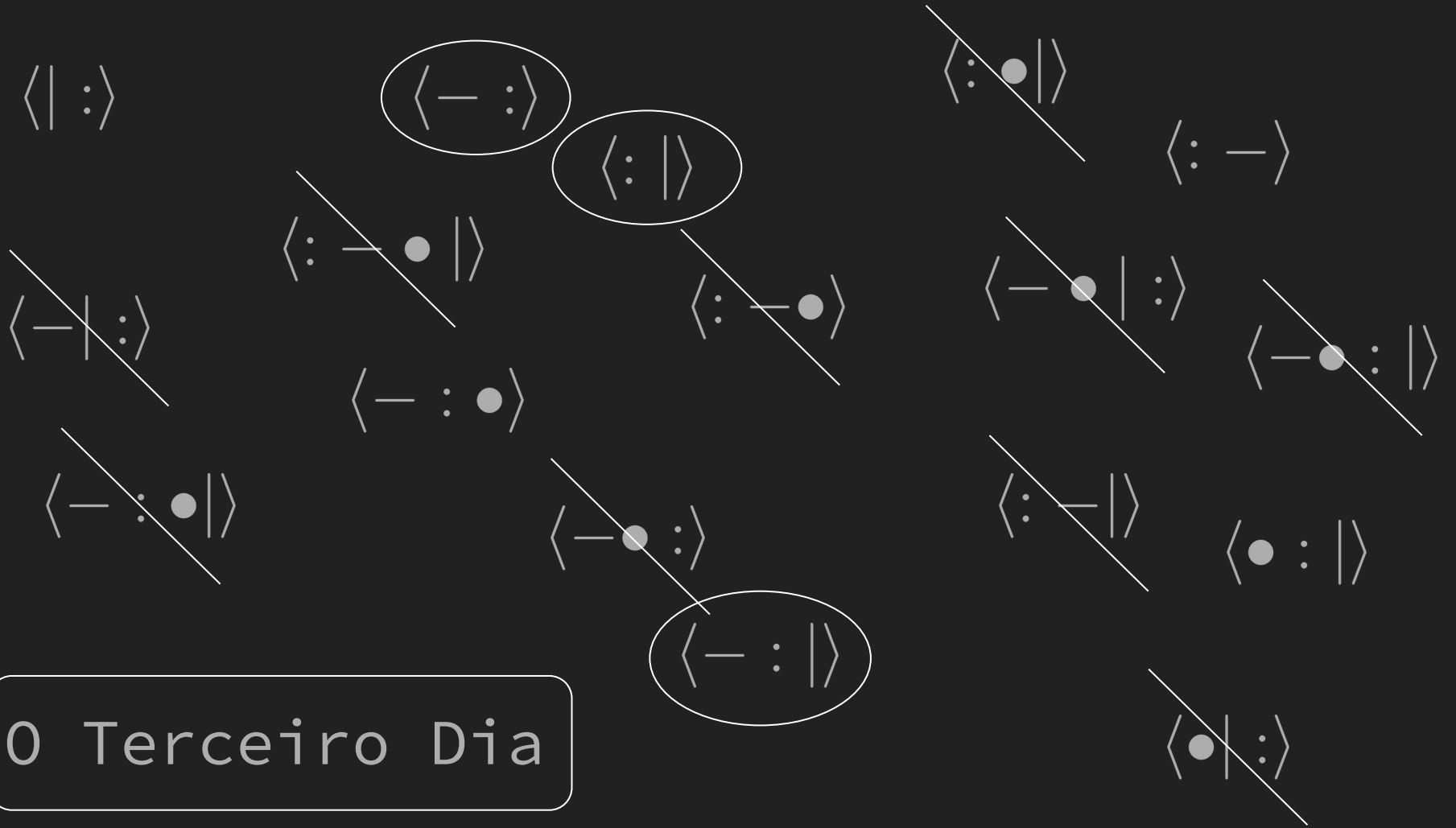
$$\begin{matrix} x \leq y \\ y \leq x \end{matrix} \implies x \cong y$$

Teorema 6

Aumentar o conjunto da esquerda com números menores e o conjunto da direita com números maiores cria um número efetivamente igual.


O Terceiro Dia

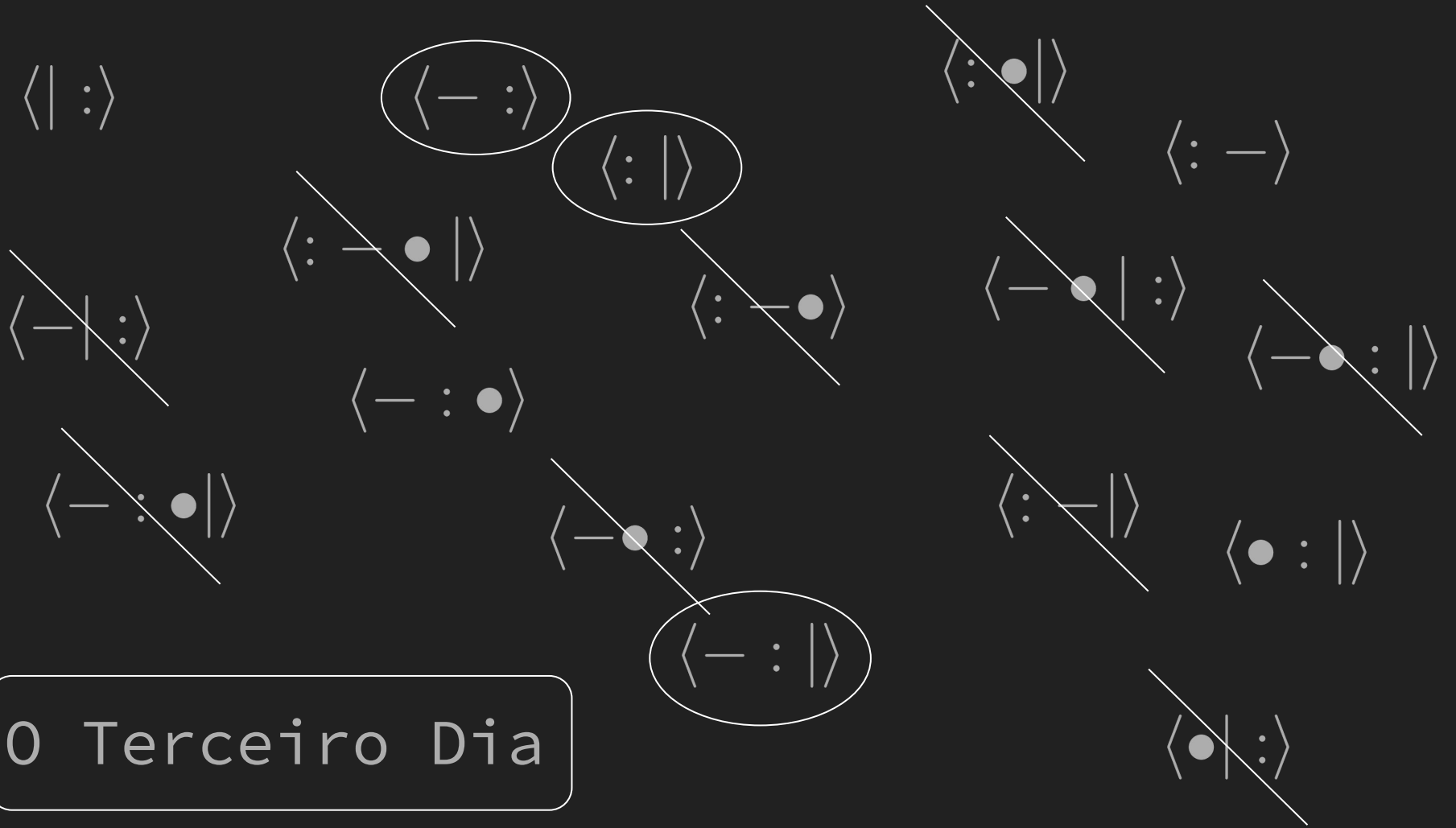

O Terceiro Dia

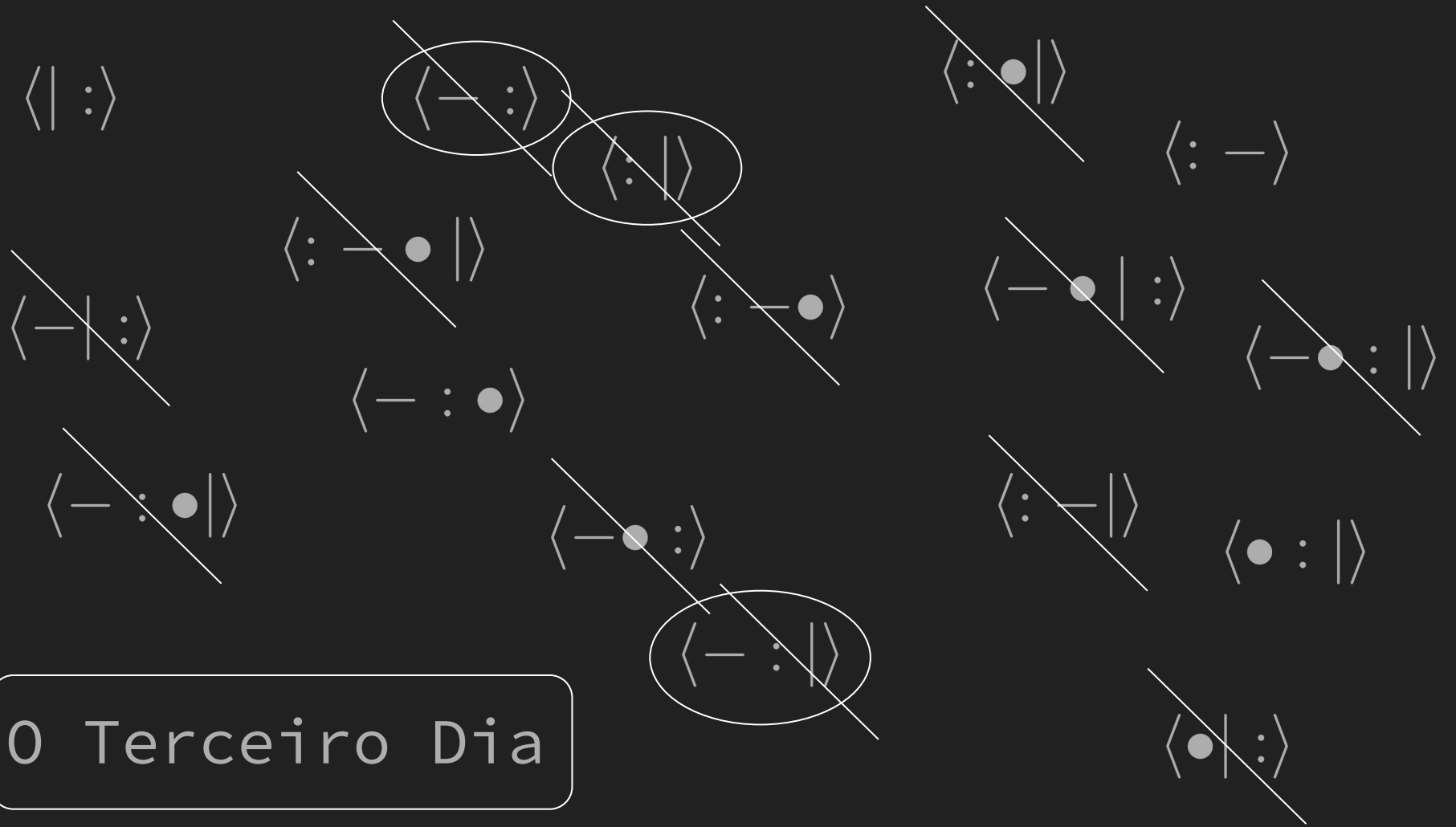

O Terceiro Dia

Teorema da Simplicidade

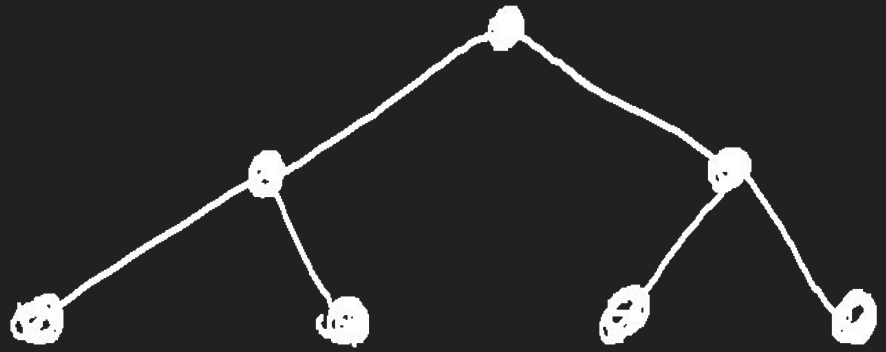
$$x \cong \langle X_E : X_D \rangle$$

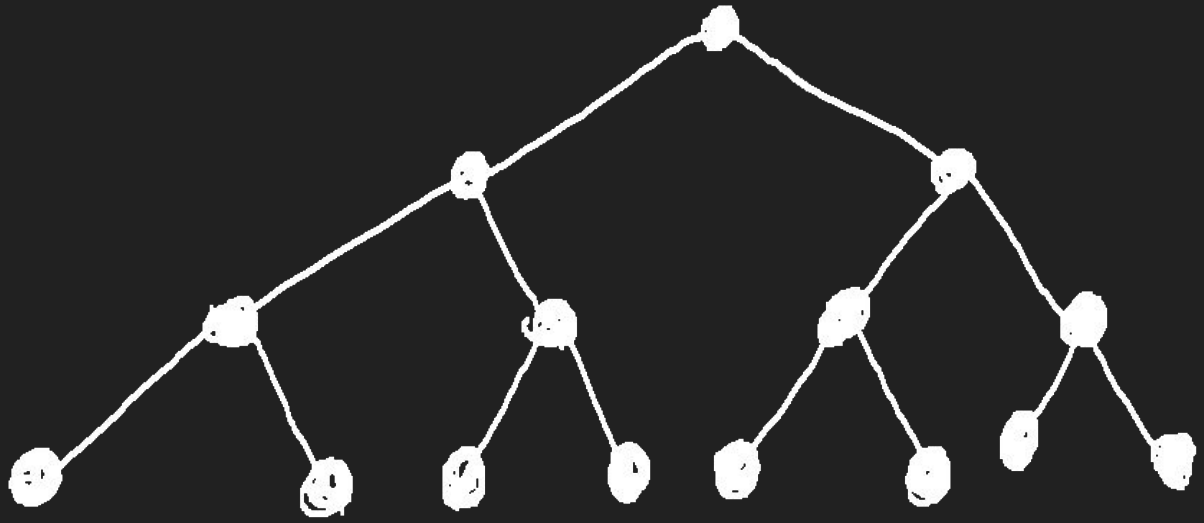
é o número mais simples (nascido mais cedo) entre seu conjunto da esquerda e seu conjunto da direita

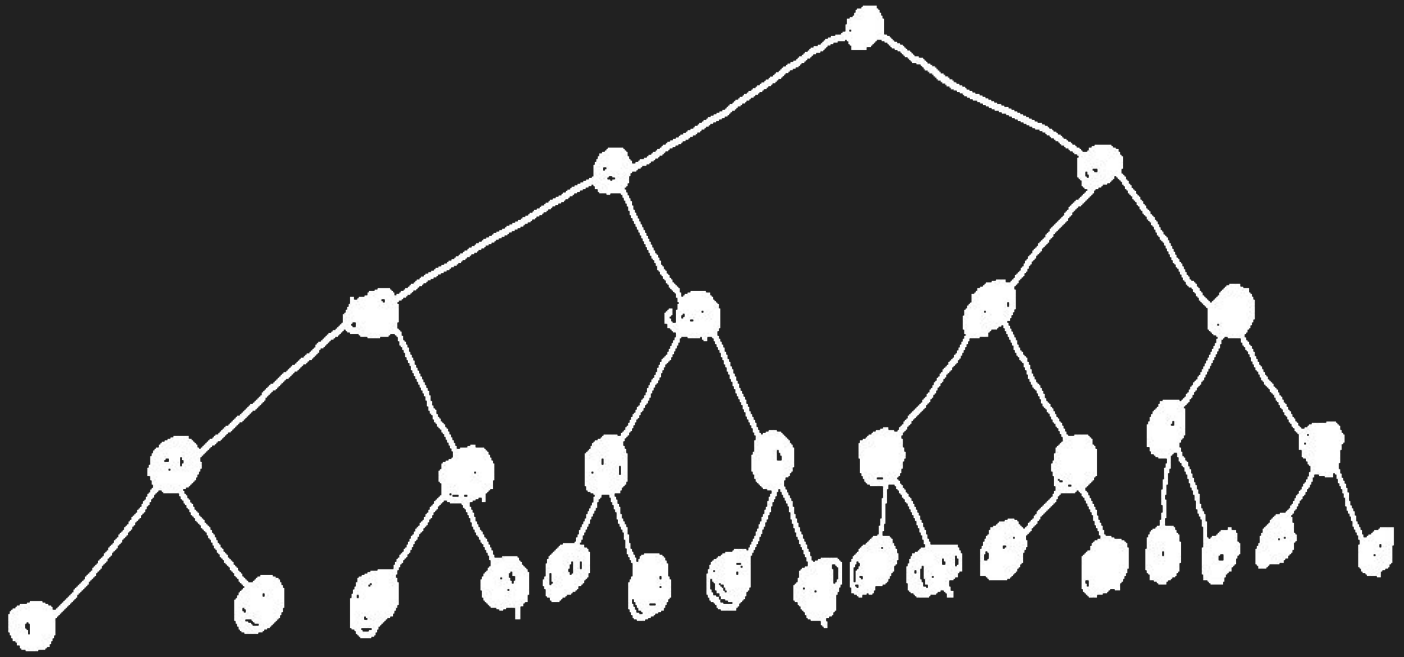

O Terceiro Dia

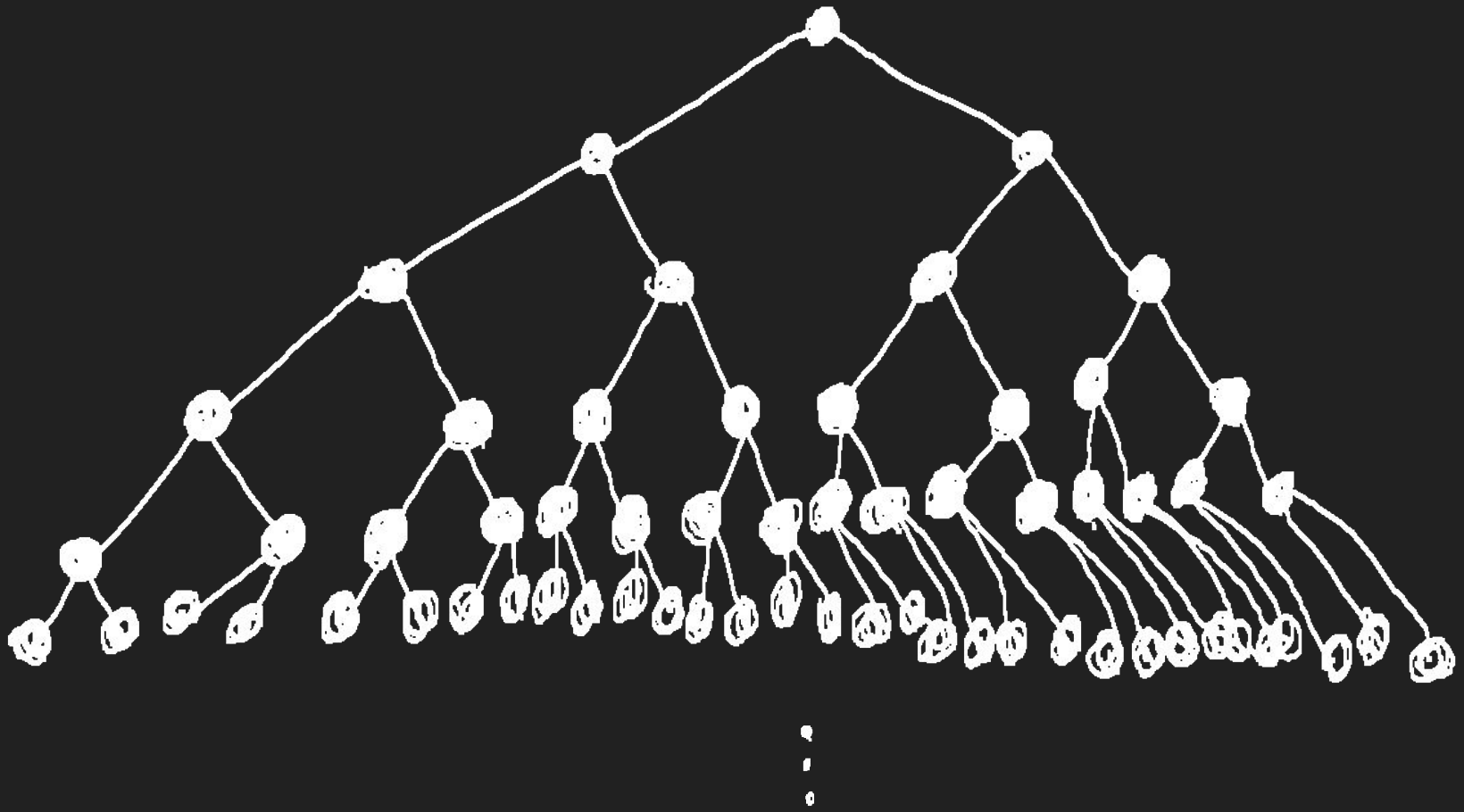

O Terceiro Dia

O Terceiro Dia









E o Conway disse: “Que os números sejam adicionados entre si da seguinte forma: o conjunto da esquerda da soma de dois números será as somas de todas as partes da esquerda de cada número com a do outro; e de forma similar o conjunto da direita será o das partes da direita, cada um de acordo com seu tipo. Conway provou que todo número mais zero não é mudado, e viu que a adição era boa. E este foi o terceiro dia.

E Conway disse: “Que o negativo de um número tenha como seus conjuntos os negativos dos opostos conjuntos dos números; e seja subtração a adição do negativo”. E assim se fez. Conway provou que subtração era o inverso da adição, e isto era muito bom. E este foi o quarto dia.

E Conway disse para os números: “Sejam frutíferos e se multipliquem. Que uma parte de um número seja multiplicado por outra e adicionada ao produto do primeiro número pela parte do outro, e que os produtos das partes sejam subtraídos. Isto será feito de todos os jeitos possíveis, dando um número no conjunto da esquerda do produto quando as partes são do mesmo tipo, mas no da direita quando são de tipos opostos.” Conway provou que todo número vezes um não é mudado. E este foi o quinto dia.

Contemplem! Quando os números foram criados por infinitos dias, o próprio universo apareceu. E este foi o dia $\aleph_0$

E Conway olhou para todas as regras que fez para números, e viu que elas eram muito, muito boas. Ele comandou que daí se tenha sinais, séries, quocientes e raízes.

E assim, nasceu um número infinito menor que o infinito. E uma infinitude de dias trouxe múltiplas ordens de infinidades.

Adição

$$x + y = \langle x + Y_E, y + X_E : x + Y_D, y + X_D \rangle$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$\bullet + \bullet = ?$$

$$\bullet + | = ?$$

$$| + | = ?$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$\bullet + \bullet = \bullet$$

$$\bullet + | = ?$$

$$| + | = ?$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$\bullet + \bullet = \bullet$$

$$\bullet + | = |$$

$$| + | = ?$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$\bullet + \bullet = \bullet$$

$$\bullet + | = |$$

$$| + | = \langle | : \rangle$$

Negação

$$-x = \langle -X_D : -X_E \rangle$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$- | = ?$$

$$- \langle | : \rangle = ?$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$-| = -$$

$$-\langle | : \rangle =?$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$-| = -$$

$$-\langle | : \rangle = \langle : - \rangle$$

$$\langle : - \rangle < - < \langle - : \bullet \rangle < \bullet < \langle \bullet : | \rangle < | < \langle | : \rangle$$

$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2$$

O Terceiro Dia

$$-d < -2 < -c < -1 < -b < -\frac{1}{2} < -a < 0 < a < \frac{1}{2} < b < 1 < c < 2 < d$$

O Quarto Dia

$$b = \frac{3}{4} \qquad d = 3$$

$$-d < -2 < -c < -1 < -b < -\frac{1}{2} < -a < 0 < a < \frac{1}{2} < b < 1 < c < 2 < d$$

$$a = \frac{1}{4} \qquad c = \frac{3}{2}$$

O Quarto Dia

E assim, de metade em metade, em todos os dias finitos, formamos os números diádicos…

$$\frac{k}{2^m}$$

Com essas técnicas, conseguimos provar que estes números esquisitos com a operação de adição satisfazem as propriedades que gostamos de números

(Grupo Abeliano Totalmente Ordenado)

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = 0.0101010101\ldots$$

$$\frac{1}{3} = \langle .01, .0101, .010101, \cdots : .1, .011, 01011, \ldots \rangle$$

E assim, com as expansões binárias, vemos que todas os números reais nascem no primeiro dia infinito!

O Dia $\aleph_0$

Mas também nascem números infinitamente grandes…

$$\omega = \langle 1, 2, 3, 4, \cdots : \rangle$$

E infinitamente pequenos…

$$\epsilon = \langle 0 : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \rangle$$

O Dia $\aleph_0$

Todos os ordinais eventualmente aparecem…

$$\omega + 1 = \langle \omega : \rangle$$

$$\omega + 2 = \langle \omega + 1 : \rangle$$

$$\omega + \omega = \langle \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \cdots : \rangle$$

E também coisas que não são ordinais!

$$\omega - 1 = \langle 0, 1, 2, \cdots : \omega \rangle$$

Os Dias Depois do Infinito

Multiplicação

$$xy = \langle X_E y + x Y_E - X_E Y_E, X_D y + x Y_D - X_D Y_D : X_E y + x Y_D - X_E Y_D, X_D Y + X Y_E - X_D Y_E \rangle$$

Magicamente, a multiplicação também se comporta como gostaríamos!

(Corpo Totalmente Ordenado)

$$\frac{\omega}{2} = \langle 1, 2, 3, \cdots : \omega - 1, \omega - 2, \omega - 3, \ldots \rangle$$

$$\epsilon\omega = 1$$

$$\sqrt{\omega} = \langle 0, 1, 2, \cdots : \omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \ldots \rangle$$

Os Dias Depois do Infinito

Tudo isso veio
da onde??

Nixismo

Nixismo

-> Matemática é um jogo

Nixismo

-> Matemática é um jogo

-> Consequências logicamente forçadas de axiomas arbitrários

Nixismo

-> Matemática é um jogo

-> Consequências logicamente forçadas de axiomas arbitrários

-> Liberdade infinita na criação de axiomas

Nixismo

-> Matemática é um jogo

-> Consequências logicamente forçadas de axiomas arbitrários

-> Liberdade infinita na criação de axiomas

-> Motivação principal: prazer visceral de resolução de um puzzle

Os números surreais não caíram do céu: Conway era uma pessoa brisando em teoria de jogos, especificamente endgames de Go

Os números surreais não caíram do céu: Conway era uma pessoa brisando em teoria de jogos, especificamente endgames de Go

Os números surreais não existem em isolamento do resto da matemática: limite dos hiperreais, o corpo totalmente ordenado universal, ordinais e cortes de Dedekind

Huguismo

Huguismo

-> Matemática é uma ciência natural

Huguismo

-> Matemática é uma ciência natural

-> Axiomas naturais emergindo da tentativa de se entender estruturas ideais

Huguismo

-> Matemática é uma ciência natural

-> Axiomas naturais emergindo da tentativa de se entender estruturas ideais

-> O fundamental a se entender é a estrutura por trás, e não o sistema axiomático específico usado

Huguismo

-> Matemática é uma ciência natural

-> Axiomas naturais emergindo da tentativa de se entender estruturas ideais

-> O fundamental a se entender é a estrutura por trás, e não o sistema axiomático específico usado

-> Motivação principal: fascínio naturalista

O Caminho do Meio

O Caminho do Meio

-> A aproximação do natural é mais frutífera, profunda e com significado.

O Caminho do Meio

-> A aproximação do natural é mais frutífera, profunda e com significado.

-> Sem o prazer visceral da resolução de puzzles, não existe matemática

O Caminho do Meio

-> A aproximação do natural é mais frutífera, profunda e com significado.

-> Sem o prazer visceral da resolução de puzzles, não existe matemática

-> “Tudo é natureza” - por que não explorar as infinitas consequências que emergem de arbitrários axiomas?

Eu

Eu

-> Eu saí da matemática em busca de sentido, do mundo “real”, natureza

Eu

-> Eu saí da matemática em busca de sentido, do mundo “real”, natureza

-> Me fechei ao olhar matemático que me privou do fascínio naturalista e prazer visceral do fazer matemático

Eu

-> Eu saí da matemática em busca de sentido, do mundo “real”, natureza

-> Me fechei ao olhar matemático que me privou do fascínio naturalista e prazer visceral do fazer matemático

-> Ler o “Surreal Numbers” do Knuth me relembrou destes prazeres e motivações

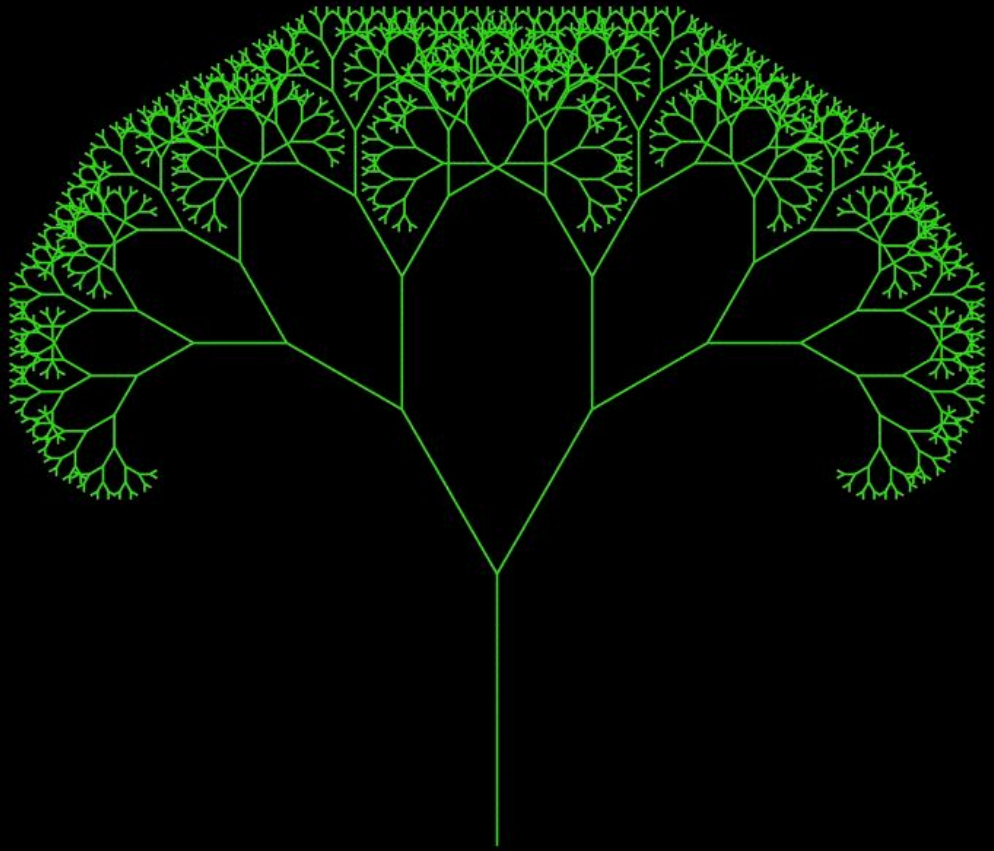
Eu

-> Eu saí da matemática em busca de sentido, do mundo “real”, natureza

-> Me fechei ao olhar matemático que me privou do fascínio naturalista e prazer visceral do fazer matemático

-> Ler o “Surreal Numbers” do Knuth me relembrou destes prazeres e motivações

-> O mundo tá pegando fogo, mas me convenci que fazer matemática é algo que vale a pena e que pretendo fazer minha vida toda, mesmo que em pequena escala



Valeu :)