

Salamandras Salafrárias: Como Sabotar Sufrágios

Seminário de Coisas Legais

Paulo Henrique Baratella Mattos

13 de junho de 2025

Divisão do Tio Sam

- ▶ **As eleições americanas tem algumas particularidades.**

Divisão do Tio Sam

- ▶ As eleições americanas tem algumas particularidades.
- ▶ **Peguemos a votação específica para o congresso.**

Divisão do Tio Sam

- ▶ As eleições americanas tem algumas particularidades.
- ▶ Peguemos a votação específica para o congresso.
- ▶ **Cada estado tem X cadeiras disponíveis.**

Divisão do Tio Sam

- ▶ As eleições americanas tem algumas particularidades.
- ▶ Peguemos a votação específica para o congresso.
- ▶ Cada estado tem X cadeiras disponíveis.
- ▶ **Cada cadeira representa um espaço físico / grupo populacional: o *distrito*.**

Exemplo da Carolina do Norte



**THE UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA SYSTEM**

North Carolina Congressional Delegation

119th Congress

INSTITUTIONS

- A Appalachian State University
- B East Carolina University
- C Elizabeth City State University
- D Fayetteville State University
- E North Carolina Agricultural and Technical State University
- F North Carolina Central University
- G North Carolina School of Science and Mathematics
- H NC State University
- I University of North Carolina at Greensboro
- J University of North Carolina at Pembroke
- K University of North Carolina Asheville
- L University of North Carolina at Chapel Hill
- M University of North Carolina at Charlotte
- N University of North Carolina School of the Arts
- O University of North Carolina Wilmington
- P Western Carolina University
- Q Winston-Salem State University

SENATE



Thom Tillis
US Senator (R)
113 Senate Dirksen OB*
Washington, DC 20510
(202) 224-6342



Ted Budd
US Senator (R)
407 Senate Russell OB*
Washington, DC 20510
(202) 224-3154



Donald Davis
US Representative (D)
1123 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-3101



Valerie Foushee
US Representative (D)
2452 Rayburn HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-1784



David Rouzer
US Representative (R)
2333 Rayburn HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-2731



Pat Harrigan
US Representative (R)
1283 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-2576



Brad Knott
US Representative (R)
1239 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-4531



Deborah Ross
US Representative (D)
1223 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-3092



Virginia Foxx
US Representative (R)
2462 Rayburn HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-2071



Mark Harris
US Representative (R)
1246 Cannon HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-1976



Chuck Edwards
US Representative (R)
1505 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-6405



Tim Moore
US Representative (R)
1434 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-5634



Gregory Murphy
US Representative (R)
407 Cannon HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-3415



Addison McDowell
US Representative (R)
1032 Longworth HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-3065



Richard Hudson
US Representative (R)
2112 Rayburn HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-3715



Alma Adams
US Representative (D)
2435 Rayburn HOB*
Washington, DC 20515
(202) 225-1510

Districts are current as of January 2025.
* HOB: House Office Building

Um Pouco de História

- ▶ O ano é 1812, na iminência de uma guerra de pós-secessão com o Reino Unido.

Um Pouco de História

- ▶ O ano é 1812, na iminência de uma guerra de pós-secessão com o Reino Unido.
- ▶ **O partido Republicano está com medo de outros partidos pró-Reino-Unido no governo.**

Um Pouco de História

- ▶ O ano é 1812, na iminência de uma guerra de pós-secessão com o Reino Unido.
- ▶ O partido Republicano está com medo de outros partidos pró-Reino-Unido no governo.
- ▶ **O recém-eleito governador de Massachusetts, Elbridge Gerry, tem uma ideia genial: vamos reformular os distritos de votos.**

Nasce a Primeira Salamandra



Figura: O Gerry-Mander.

E hoje em dia?

- ▶ A cada 10 anos, a corte Americana, por questões de censo e fronteiras, realiza o redistritamento.

E hoje em dia?

- ▶ A cada 10 anos, a corte Americana, por questões de censo e fronteiras, realiza o **redistritamento**.
- ▶ Quem realiza? Normalmente quem está em poder no dia e hora.

E hoje em dia?

- ▶ A cada 10 anos, a corte Americana, por questões de censo e fronteiras, realiza o **redistributamento**.
- ▶ Quem realiza? Normalmente quem está em poder no dia e hora.

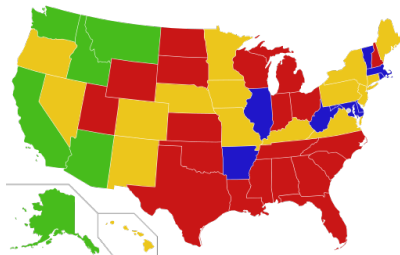


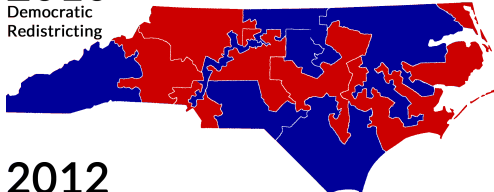
Figura: Que partido decidiu a divisão de cada distrito - 2010.

E hoje em dia?

- Veja a Carolina do Norte:

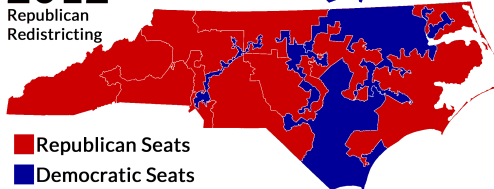
2010

Democratic
Redistricting



2012

Republican
Redistricting



■ Republican Seats

■ Democratic Seats

Figura: Divisão do congresso - 2010/2012

E hoje em dia?

- Veja a Carolina do Norte:

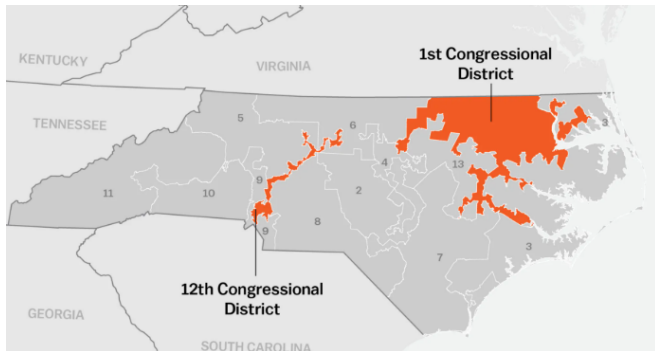


Figura: Divisão do congresso - 2012

E hoje em dia?

- Em áreas de alta densidade, fica ainda mais aparente:

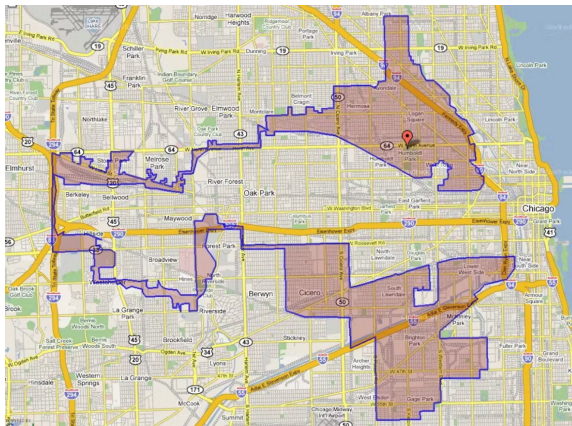


Figura: Distrito de Illinois - Atual

- Como permitem que isso ocorra?

Como criar sua Salamandra

As regras exigidas para qualquer redistritamento pela constituição americana são:

- ▶ **Cada estado terá um total específico de distritos.**

Como criar sua Salamandra

As regras exigidas para qualquer redistritamento pela constituição americana são:

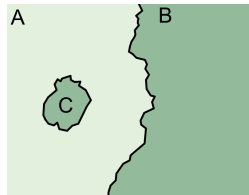
- ▶ Cada estado terá um total específico de distritos.
- ▶ **Cada distrito deve ter aproximadamente a mesma população.**



Como criar sua Salamandra

As regras exigidas para qualquer redistritamento pela constituição americana são:

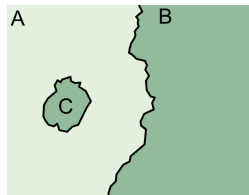
- ▶ Cada estado terá um total específico de distritos.
- ▶ Cada distrito deve ter aproximadamente a mesma população.
- ▶ **Cada distrito deve ser conexo, isso é, ele é todo conectado.**



Como criar sua Salamandra

As regras exigidas para qualquer redistritamento pela constituição americana são:

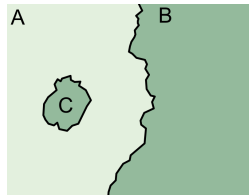
- ▶ Cada estado terá um total específico de distritos.
- ▶ Cada distrito deve ter aproximadamente a mesma população.
- ▶ Cada distrito deve ser conexo, isso é, ele é todo conectado.



Como criar sua Salamandra

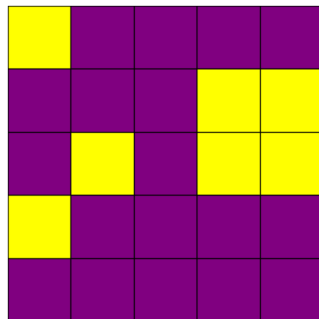
As regras exigidas para qualquer redistritamento pela constituição americana são:

- ▶ Cada estado terá um total específico de distritos.
 - ▶ Cada distrito deve ter aproximadamente a mesma população.
 - ▶ Cada distrito deve ser conexo, isso é, ele é todo conectado.
- ... e acabou.



Como dividir seu espaço

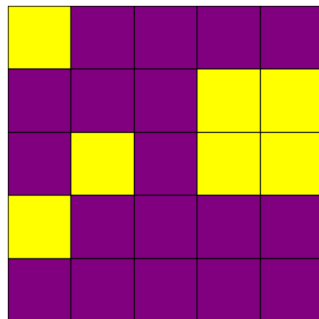
- O seu partido, o PDA, te dá Quadrachusetts para dividir;



Quadrachusetts

Como dividir seu espaço

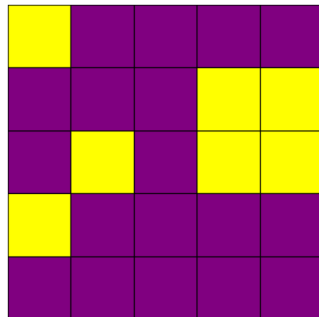
- ▶ O seu partido, o PDA, te dá Quadrachusetts para dividir;
- ▶ Cada posição vota ou para Amarelo, ou para o Roxo.



Quadrachusetts

Como dividir seu espaço

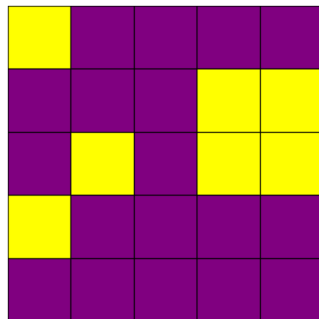
- ▶ O seu partido, o PDA, te dá Quadrachusetts para dividir;
- ▶ Cada posição vota ou para Amarelo, ou para o Roxo.
- ▶ **Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.**



Quadrachusetts

Como dividir seu espaço

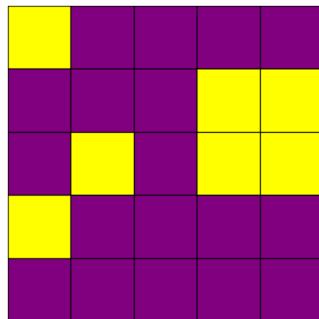
- ▶ O seu partido, o PDA, te dá Quadrachusetts para dividir;
- ▶ Cada posição vota ou para Amarelo, ou para o Roxo.
- ▶ Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.
- ▶ **Ganha-se a cadeira quando se é a maioria na divisão.**



Quadrachusetts

Como dividir seu espaço

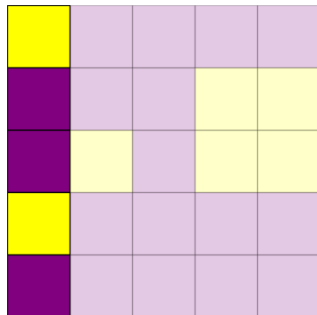
- ▶ O seu partido, o PDA, te dá Quadrachusetts para dividir;
- ▶ Cada posição vota ou para Amarelo, ou para o Roxo.
- ▶ Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.
- ▶ **Ganha-se a cadeira quando se é a maioria na divisão.**
- ▶ Por fim, queremos maximizar a quantidade de cadeiras.



Quadrachusetts

Vamos brincar um pouco

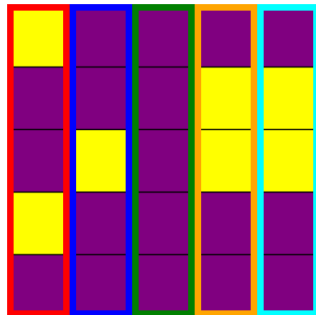
- ▶ Você pode pegar e construir rapidamente um distrito.



Primeiro distrito

Vamos brincar um pouco

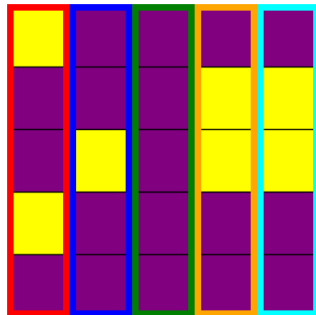
- ▶ Você pode pegar e construir rapidamente um distrito.
- ▶ **Dá para extendê-lo:**



Xii... não ficou muito bom...

Vamos brincar um pouco

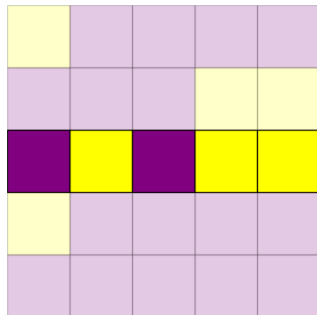
- ▶ Você pode pegar e construir rapidamente um distrito.
- ▶ Dá para extendê-lo:
- ▶ **Seu partido ganhou 0 distritos...**



Xii... não ficou muito bom...

Vamos brincar PENSANDO agora...

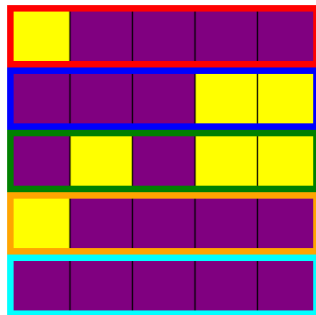
- ▶ **Você pode começar a partir de um distrito que você vai ganhar.**



É um começo.

Vamos brincar PENSANDO agora...

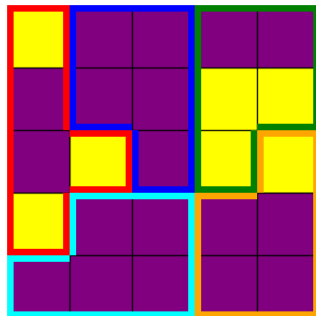
- ▶ Você pode começar a partir de um distrito que você vai ganhar.
- ▶ **Ufa... saímos com pelo menos 1 cadeira.**



É um começo.

Vamos brincar PENSANDO agora...

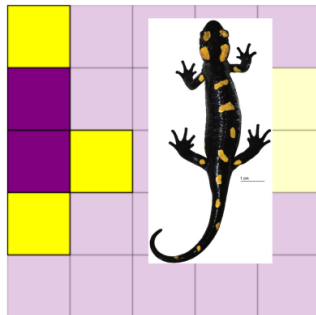
- ▶ Você pode começar a partir de um distrito que você vai ganhar.
- ▶ Ufa... saímos com pelo menos 1 cadeira.
- ▶ Mas... seria possível ganhar mais?



Ganhar 2 é melhor que 1.

Vamos brincar PENSANDO agora...

- ▶ Você pode começar a partir de um distrito que você vai ganhar.
- ▶ Ufa... saímos com pelo menos 1 cadeira.
- ▶ Mas... seria possível ganhar mais?
- ▶ **Olha a salamandra aparecendo:**



Como criar sua Salamandra

- ▶ Se você tiver que desenhar um mapa seguindo essas regras, como sabe qual é o melhor?

Como criar sua Salamandra

- ▶ Se você tiver que desenhar um mapa seguindo essas regras, como sabe qual é o melhor?
- ▶ **Otimização é uma área que busca computadorizar a busca por uma solução.**



Como criar sua Salamandra

- ▶ Se você tiver que desenhar um mapa seguindo essas regras, como sabe qual é o melhor?
- ▶ **Otimização** é uma área que busca computadorizar a busca por uma solução.
- ▶ Para iniciar uma busca, precisamos primeiro responder algumas questões fundamentais sobre ela.



O que estou buscando?

- ▶ Quem estou buscando?

O que estou buscando?

- ▶ Quem estou buscando?
- ▶ Sobre o que posso decidir?

O que estou buscando?

- ▶ Quem estou buscando?
- ▶ Sobre o que posso decidir?
- ▶ Quais são os elementos que posso mudar para obter uma solução diferente?

O que estou buscando?

- ▶ Quem estou buscando?
- ▶ Sobre o que posso decidir?
- ▶ Quais são os elementos que posso mudar para obter uma solução diferente?
- ▶ **Variáveis** - O X (literalmente) da questão.

O que estou buscando?

- ▶ Quem estou buscando?
- ▶ Sobre o que posso decidir?
- ▶ Quais são os elementos que posso mudar para obter uma solução diferente?
- ▶ **Variáveis** - O X (literalmente) da questão.

$$X, Y, Z \in \{0, 1\}$$

O que estou buscando?

► Onde estou buscando?

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ **Quais soluções são possíveis?**

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ Quais soluções são possíveis?
- ▶ **Quais soluções são impossíveis?**

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ Quais soluções são possíveis?
- ▶ Quais soluções são impossíveis?
- ▶ **Restrições - O espaço factível**

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ Quais soluções são possíveis?
- ▶ Quais soluções são impossíveis?
- ▶ **Restrições** - O espaço factível

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ Quais soluções são possíveis?
- ▶ Quais soluções são impossíveis?
- ▶ **Restrições** - O espaço factível

$$X + Y = 1$$

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ Quais soluções são possíveis?
- ▶ Quais soluções são impossíveis?
- ▶ **Restrições** - O espaço factível

$$X + Y = 1$$

$$X \geq Z$$

O que estou buscando?

- ▶ Onde estou buscando?
- ▶ Quais soluções são possíveis?
- ▶ Quais soluções são impossíveis?
- ▶ **Restrições** - O espaço factível

$$X + Y = 1$$

$$X \geq Z$$

$$X, Y, Z \in \{0, 1\}$$

O que estou buscando?

► Como estou buscando?

O que estou buscando?

- ▶ Como estou buscando?
- ▶ **Como sei que um resultado é bom ou ruim?**

O que estou buscando?

- ▶ Como estou buscando?
- ▶ Como sei que um resultado é bom ou ruim?
- ▶ **Função objetivo - o critério para comparar soluções.**

O que estou buscando?

- ▶ Como estou buscando?
- ▶ Como sei que um resultado é bom ou ruim?
- ▶ **Função objetivo** - o critério para comparar soluções.

$$\begin{array}{ll}\max & Y + 2 * Z \\ \text{s.t.} & X + Y = 1, \\ & X \geq Z, \\ & X, Y, Z \in \{0, 1\}\end{array} \quad (1)$$

O que estou buscando?

- ▶ Por fim, programamos isso no computador e um algoritmo específico resolve o problema.

O que estou buscando?

- ▶ Por fim, programamos isso no computador e um algoritmo específico resolve o problema.
- ▶ **Ele prova matematicamente que é a melhor solução!**

O que estou buscando?

- ▶ Por fim, programamos isso no computador e um algoritmo específico resolve o problema.
- ▶ Ele prova matematicamente que é a melhor solução!
- ▶ **NÃO vou explicar como funciona! Apenas acredite...**

O que estou buscando?

- ▶ Por fim, programamos isso no computador e um algoritmo específico resolve o problema.
- ▶ Ele prova matematicamente que é a melhor solução!
- ▶ NÃO vou explicar como funciona! Apenas acredite...
- ▶ **Faça Otimização Linear e Otimização Inteira (é legal!)**

Das variáveis

- ▶ *Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.*

Das variáveis

- ▶ *Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.*
- ▶ **Cada unidade, então, poderá pertencer à apenas um de 5 grupos.**

Das variáveis

- ▶ *Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.*
- ▶ Cada unidade, então, poderá pertencer à apenas um de 5 grupos.
- ▶ **Criemos a variável binária X_{pk} onde $p \in P$ é uma posição em Quadrachusetts e $k \in 1, \dots, 5$ cada uma das partições.**

Das variáveis

- ▶ *Esse estado tem 5 cadeiras para o congresso, ou seja, você tem que dar um mapa dividido em 5 partes.*
- ▶ Cada unidade, então, poderá pertencer à apenas um de 5 grupos.
- ▶ Criemos a variável binária X_{pk} onde $p \in P$ é uma posição em Quadrachusetts e $k \in 1, \dots, 5$ cada uma das partições.
- ▶ **Temos que $X_{pk} = 1$ caso a unidade p esteja na partição k . E 0 caso contrário.**

$$X_{pk} \in \{0, 1\} \quad \forall p \quad \forall k.$$

Das restrições

- ▶ Temos algumas implícitas.

Das restrições

- ▶ Temos algumas implícitas.
- ▶ **Uma mesma unidade pode estar em mais de uma partição? Não!**

Das restrições

- ▶ Temos algumas implícitas.
- ▶ Uma mesma unidade pode estar em mais de uma partição?
Não!
- ▶ **Uma mesma unidade pode não estar uma partição?**
Não!

Das restrições

- ▶ Temos algumas implícitas.
- ▶ Uma mesma unidade pode estar em mais de uma partição?
Não!
- ▶ Uma mesma unidade pode não estar uma partição? Não!

$$\sum_{k=1}^5 X_{pk} = 1 \quad \forall p \in P$$

Das restrições

- ▶ Cada parte deve ter aproximadamente a mesma quantidade de unidades.

Das restrições

- ▶ Cada parte deve ter aproximadamente a mesma quantidade de unidades.
- ▶ Estamos supondo que dá para dividir o espaço de maneira igual!

Das restrições

- ▶ Cada parte deve ter aproximadamente a mesma quantidade de unidades.
- ▶ Estamos supondo que dá para dividir o espaço de maneira igual!

$$\sum_{p \in P} X_{pk} = 5, \quad k \in K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Das restrições DIFÍCEIS

- ▶ *Cada partição deve ser conexa, sem partes isoladas.*

Das restrições DIFÍCEIS

- ▶ *Cada partição deve ser conexa, sem partes isoladas.*
- ▶ **É a parte difícil desse problema!**

Das restrições DIFÍCEIS

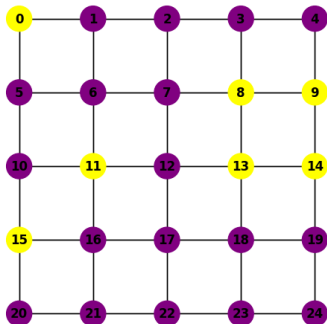
- ▶ *Cada partição deve ser conexa, sem partes isoladas.*
- ▶ É a parte difícil desse problema!
- ▶ **Mas o que significa algo estar conexo?**

Das restrições DIFÍCEIS

- ▶ *Cada partição deve ser conexa, sem partes isoladas.*
- ▶ É a parte difícil desse problema!
- ▶ Mas o que significa algo estar conexo?
- ▶ **Conexo significa que é possível chegar de um ponto até qualquer outro.**

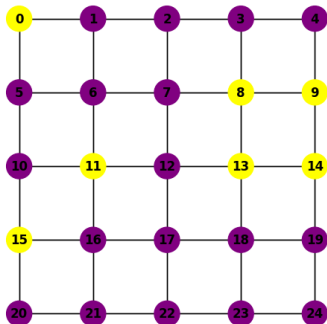
Representação em Grafo

- Queremos criar um caminho entre 2 pontos, vamos fazer isso usando arestas.



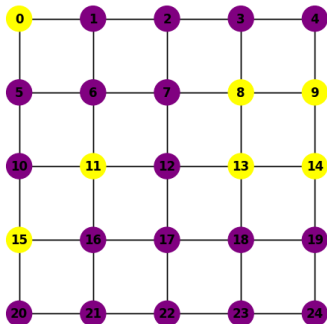
Representação em Grafo

- ▶ Queremos criar um caminho entre 2 pontos, vamos fazer isso usando arestas.
- ▶ Criemos a variável $A_{uvk} \in \{0,1\}$.



Representação em Grafo

- ▶ Queremos criar um caminho entre 2 pontos, vamos fazer isso usando arestas.
- ▶ Criemos a variável $A_{uvk} \in \{0, 1\}$.
- ▶ Ela representa se usamos a aresta do ponto u para v na partição k .



Representação em Grafo

- ▶ Queremos criar um caminho entre 2 pontos, vamos fazer isso usando arestas.
- ▶ Criemos a variável $A_{uvk} \in \{0, 1\}$.
- ▶ Ela representa se usamos a aresta do ponto u para v na partição k .
- ▶ **Precisamos associar cada aresta com seus vértices.**

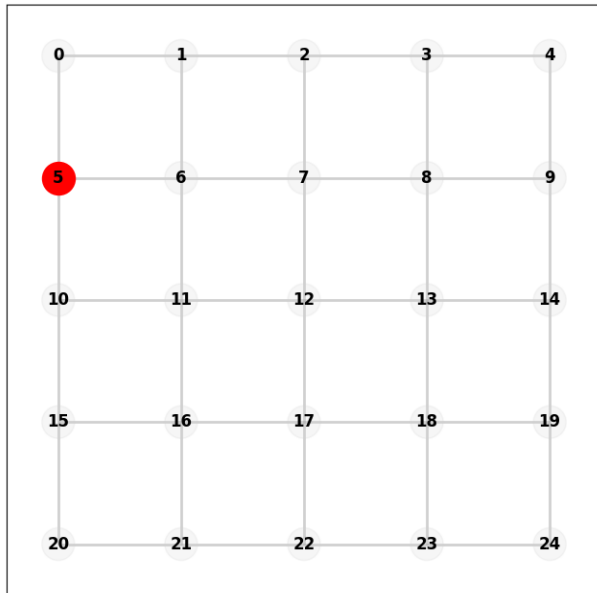
Representação em Grafo

- ▶ Queremos criar um caminho entre 2 pontos, vamos fazer isso usando arestas.
- ▶ Criemos a variável $A_{uvk} \in \{0, 1\}$.
- ▶ Ela representa se usamos a aresta do ponto u para v na partição k .
- ▶ Precisamos associar cada aresta com seus vértices.
- ▶ **É simples, para cada $k \in K$:**

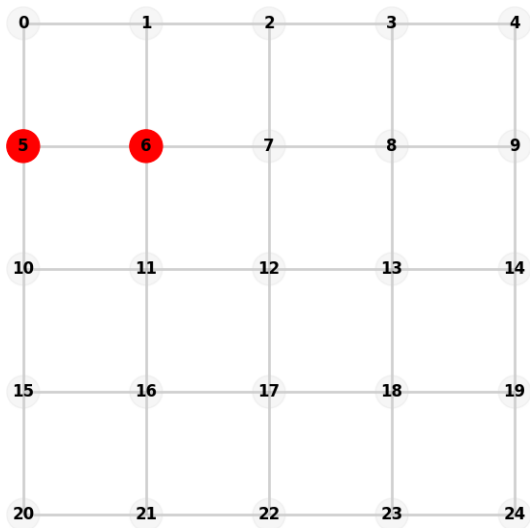
$$A_{uvk} \leq X_{uk} \quad \forall (u, v) \in \text{Arestas}$$

$$A_{uvk} \leq X_{vk} \quad \forall (u, v) \in \text{Arestas}$$

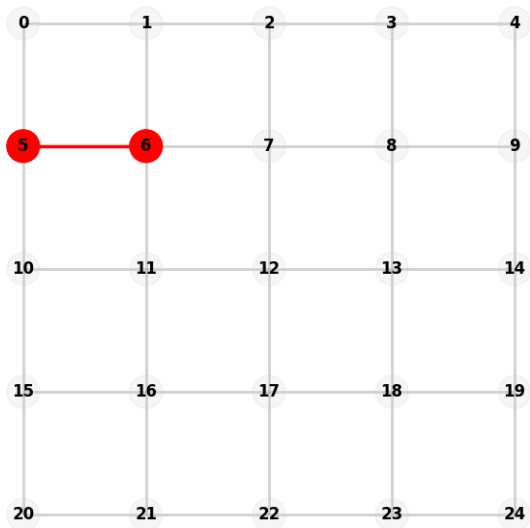
Representação em Grafo



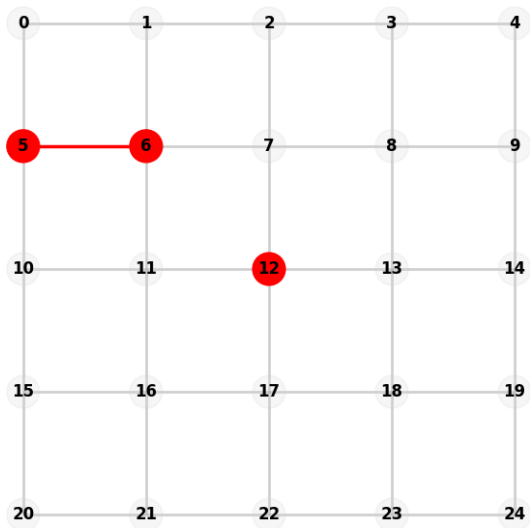
Representação em Grafo



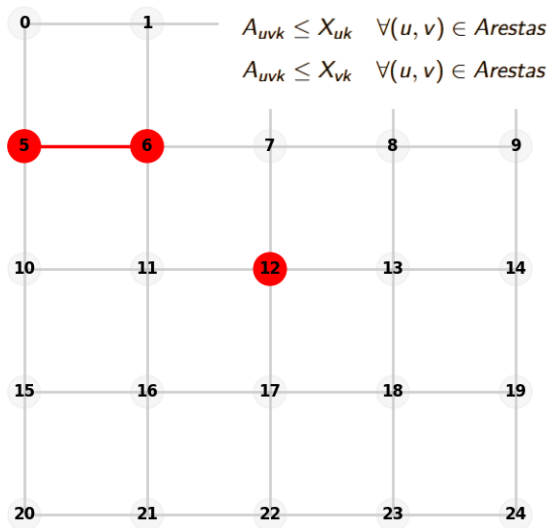
Representação em Grafo



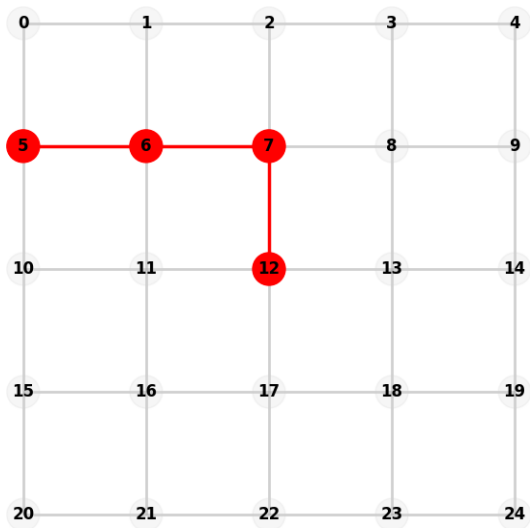
Representação em Grafo



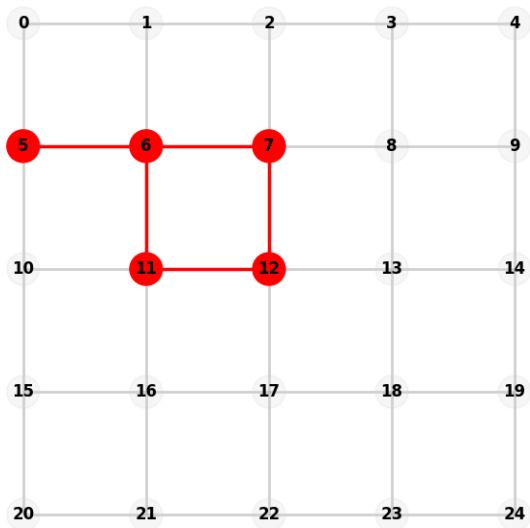
Representação em Grafo



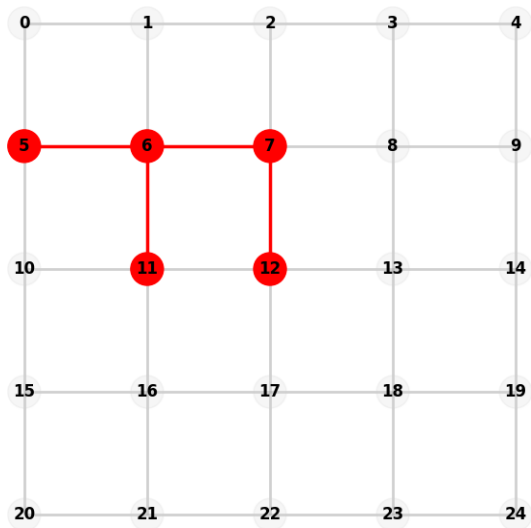
Representação em Grafo



Representação em Grafo



Representação em Grafo



Vamos plantar?

- ▶ Nesse exemplo, o grafo é conexo, mas como podemos *exigir* essa conexidade?

Vamos plantar?

- ▶ Nesse exemplo, o grafo é conexo, mas como podemos *exigir* essa conexidade?
- ▶ **Existe uma propriedade de grafo que, quando comprovada, garante a conexidade!**

Vamos plantar?

- ▶ Nesse exemplo, o grafo é conexo, mas como podemos *exigir* essa conexidade?
- ▶ Existe uma propriedade de grafo que, quando comprovada, garante a conexidade!
- ▶ **Chama-se árvore.**

Vamos plantar?

- ▶ Nesse exemplo, o grafo é conexo, mas como podemos *exigir* essa conexidade?
- ▶ Existe uma propriedade de grafo que, quando comprovada, garante a conexidade!
- ▶ Chama-se **árvore**.
- ▶ **Quando um grafo é uma árvore, ele é conexo.**

Vamos plantar?

- ▶ Nesse exemplo, o grafo é conexo, mas como podemos *exigir* essa conexidade?
- ▶ Existe uma propriedade de grafo que, quando comprovada, garante a conexidade!
- ▶ Chama-se **árvore**.
- ▶ **Quando um grafo é uma árvore, ele é conexo.**
- ▶ **Vamos tentar construir nossa árvore.**

Vamos plantar?

- ▶ Começaremos com um nó, a raiz.



Vamos plantar?

- ▶ Começaremos com um nó, a **raiz**.
- ▶ Colocamos uma aresta, e conectamos à raiz com uma aresta.



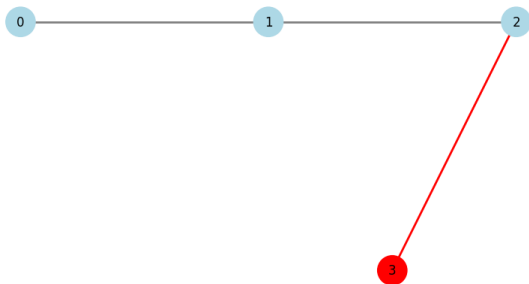
Vamos plantar?

- ▶ Começaremos com um nó, a **raiz**.
- ▶ Colocamos uma aresta, e conectamos à raiz com uma aresta.
- ▶ **Veja que, ao adicionar um nó, adicionamos uma aresta.**



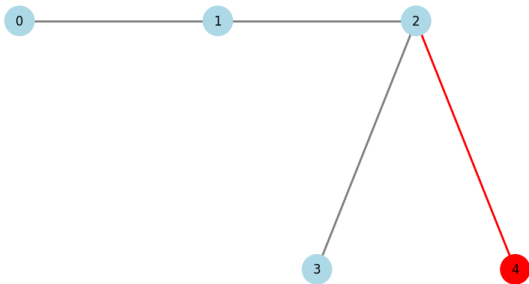
Vamos plantar?

- ▶ Começaremos com um nó, a **raiz**.
- ▶ Colocamos uma aresta, e conectamos à raiz com uma aresta.
- ▶ Veja que, ao adicionar um nó, adicionamos uma aresta.



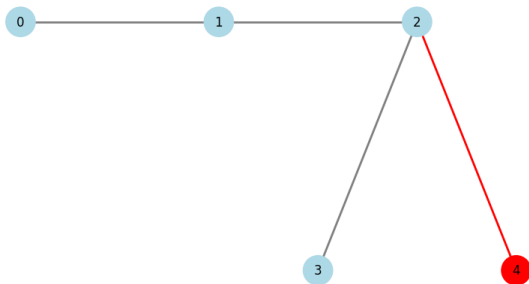
Vamos plantar?

- ▶ Começaremos com um nó, a **raiz**.
- ▶ Colocamos uma aresta, e conectamos à raiz com uma aresta.
- ▶ Veja que, ao adicionar um nó, adicionamos uma aresta.



Vamos plantar?

- ▶ Começaremos com um nó, a **raiz**.
- ▶ Colocamos uma aresta, e conectamos à raiz com uma aresta.
- ▶ Veja que, ao adicionar um nó, adicionamos uma aresta.
- ▶ Se for uma **Árvore** de n nós, ela terá $n - 1$ arestas.



Vamos plantar?

- ▶ Para nós, isso é fácil!

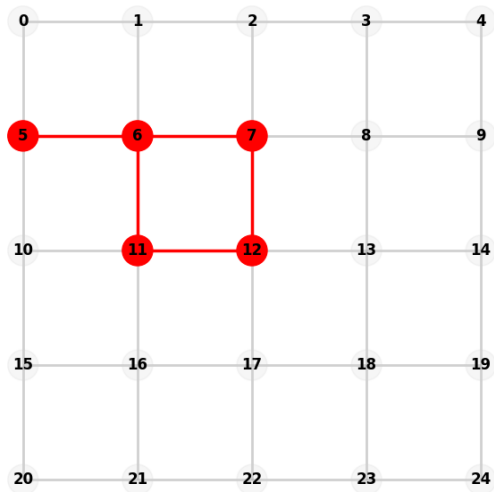
Vamos plantar?

- ▶ Para nós, isso é fácil!

$$\sum_{(u,v) \in Arestas} A_{uvk} = \sum_p X_{pk} - 1 \quad \forall k \in K$$

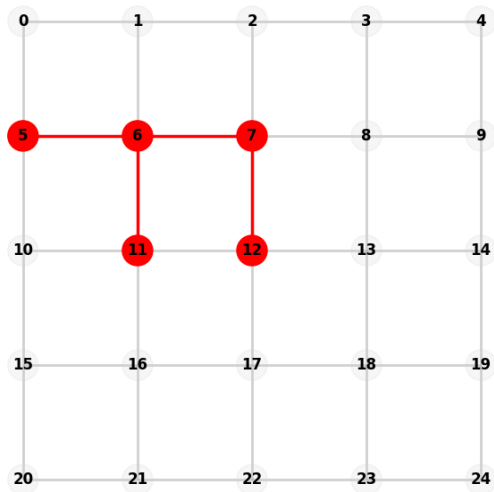
Vamos plantar?

- Para nós, isso é fácil!



Vamos plantar?

- Para nós, isso é fácil!

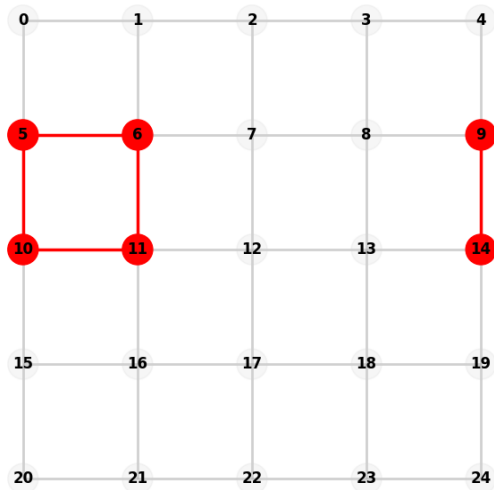


Vamos plantar?

► Ótimo! Vamos rodar:

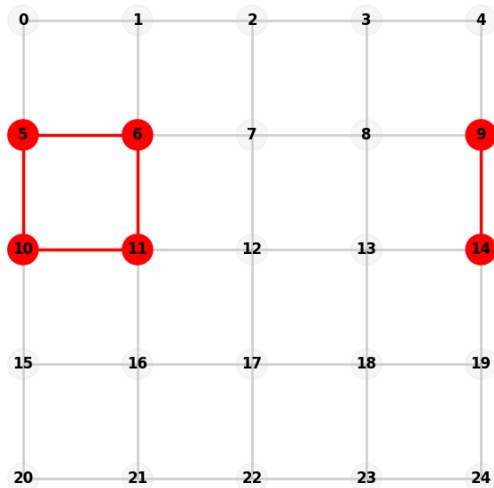
Vamos plantar?

- ▶ Ótimo! Vamos rodar:
- ▶ Oh não!...



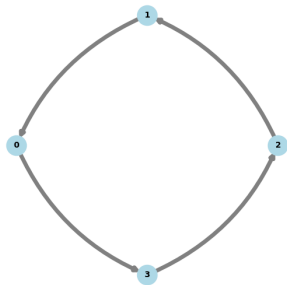
Vamos plantar?

- ▶ Ótimo! Vamos rodar:
- ▶ Oh não!...
- ▶ Temos n vertices e $n - 1$ arestas, mas não deu certo.



Ciclos

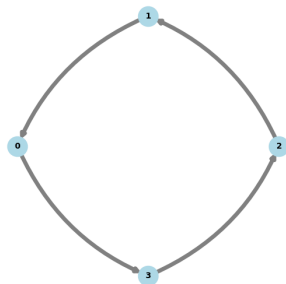
- O problema é termos ciclos!



Ciclo

Ciclos

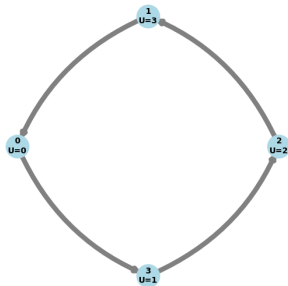
- ▶ O problema é termos ciclos!
- ▶ **Uma árvore é todo grafo de n vértices que tem $n - 1$ arestas e nenhum ciclo**



Ciclo

Ciclos

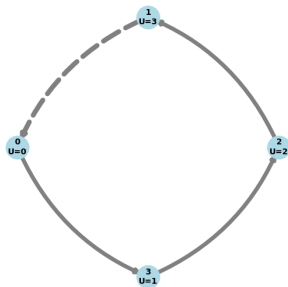
- ▶ O problema é termos ciclos!
- ▶ Uma árvore é todo grafo de n vértices que tem $n - 1$ arestas e **nenhum ciclo**
- ▶ Vamos fazer uma modelagem conhecida, chamada de MTZ (*Miller-Tucker-Zemlin*).



Agora há uma ordem e
uma direção.

Ciclos

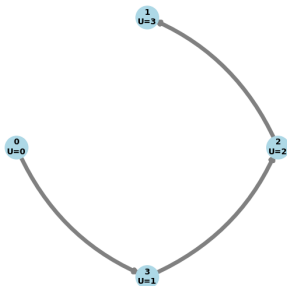
- ▶ O problema é termos ciclos!
- ▶ Uma árvore é todo grafo de n vértices que tem $n - 1$ arestas e **nenhum ciclo**
- ▶ Vamos fazer uma modelagem conhecida, chamada de MTZ (*Miller-Tucker-Zemlin*).



O vértice 0 é atendido primeiro, ou por último?

Ciclos

- ▶ O problema é termos ciclos!
- ▶ Uma árvore é todo grafo de n vértices que tem $n - 1$ arestas e **nenhum ciclo**
- ▶ Vamos fazer uma modelagem conhecida, chamada de MTZ (*Miller-Tucker-Zemlin*).



Pronto, não dá para ter
ciclo.

Visualizando...

- ▶ O que queremos é garantir que qualquer partição tenha uma representação em árvore

Visualizando...

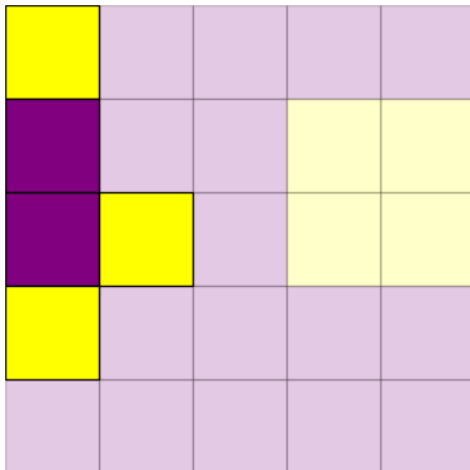
- ▶ O que queremos é garantir que qualquer partição tenha uma representação em árvore
- ▶ **Se garantimos isso, ganhamos que é conexo!**

Visualizando...

- ▶ O que queremos é garantir que qualquer partição tenha uma representação em árvore
- ▶ Se garantimos isso, ganhamos que é conexo!

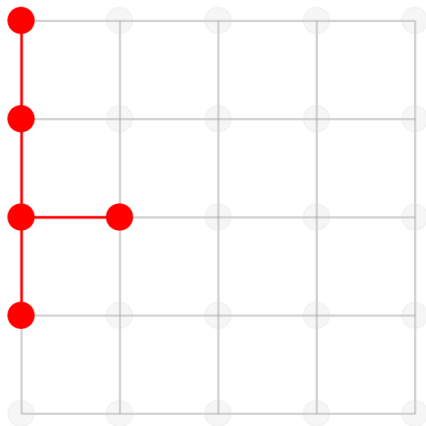
Visualizando...

- ▶ O que queremos é garantir que qualquer partição tenha uma representação em árvore
- ▶ Se garantimos isso, ganhamos que é conexo!



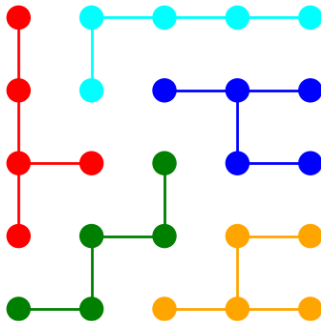
Visualizando...

- ▶ O que queremos é garantir que qualquer partição tenha uma representação em árvore
- ▶ Se garantimos isso, ganhamos que é conexo!



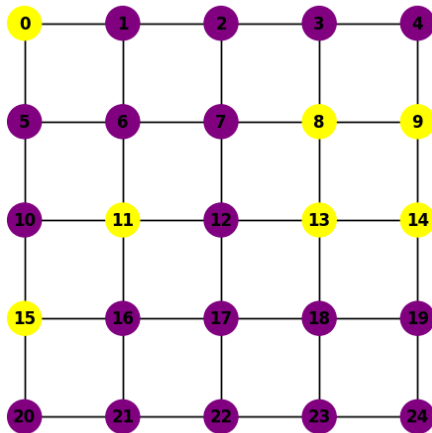
Visualizando...

- ▶ O que queremos é garantir que qualquer partição tenha uma representação em árvore
- ▶ Se garantimos isso, ganhamos que é conexo!



Representação

- O nosso problema vai ser assim, para cada k :



E quem ganha?

- ▶ Em cada partição, ou se perde ou se ganha, sem intermediários.

E quem ganha?

- ▶ Em cada partição, ou se perde ou se ganha, sem intermediários.
- ▶ **Criemos a variável binária Y_k onde $k \in 1, \dots, 5$ cada uma das partições.**

E quem ganha?

- ▶ Em cada partição, ou se perde ou se ganha, sem intermediários.
- ▶ Criemos a variável binária Y_k onde $k \in 1, \dots, 5$ cada uma das partições.
- ▶ **Temos que $Y_k = 1$ seu partido ganhe na partição k . E 0 caso contrário.**

E quem ganha?

- ▶ Em cada partição, ou se perde ou se ganha, sem intermediários.
- ▶ Criemos a variável binária Y_k onde $k \in 1, \dots, 5$ cada uma das partições.
- ▶ Temos que $Y_k = 1$ seu partido ganhe na partição k . E 0 caso contrário.

$$Y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k.$$

E quem ganha?

- Precisamos definir quem ganhou em cada partição.

E quem ganha?

- ▶ Precisamos definir quem ganhou em cada partição.
- ▶ **Sabemos exatamente quem vai votar em cada unidade.**

E quem ganha?

- ▶ Precisamos definir quem ganhou em cada partição.
- ▶ Sabemos exatamente quem vai votar em cada unidade.
- ▶ **Se $V_p = 1$, o voto vai para seu partido, se $V_p = -1$ vai para o outro.**

E quem ganha?

- ▶ Precisamos definir quem ganhou em cada partição.
- ▶ Sabemos exatamente quem vai votar em cada unidade.
- ▶ Se $V_p = 1$, o voto vai para seu partido, se $V_p = -1$ vai para o outro.
- ▶ Logo, se há mais unidades do seu partido, a soma de todas as unidades deve ser positiva:

$$\sum_{p \in P} V_p * X_{pk} \leq Y_k * |P| \quad \forall k \in K$$

E quem ganha?

- ▶ Precisamos definir quem ganhou em cada partição.
- ▶ Sabemos exatamente quem vai votar em cada unidade.
- ▶ Se $V_p = 1$, o voto vai para seu partido, se $V_p = -1$ vai para o outro.
- ▶ Logo, se há mais unidades do seu partido, a soma de todas as unidades deve ser positiva:

$$\sum_{p \in P} V_p * X_{pk} \leq Y_k * |P| \quad \forall k \in K$$

- ▶ De maneira contrária, caso você perca, a soma será negativa:

$$\sum_{p \in P} -V_p * X_{pk} \leq (1 - Y_k) * |P| \quad \forall k \in K$$

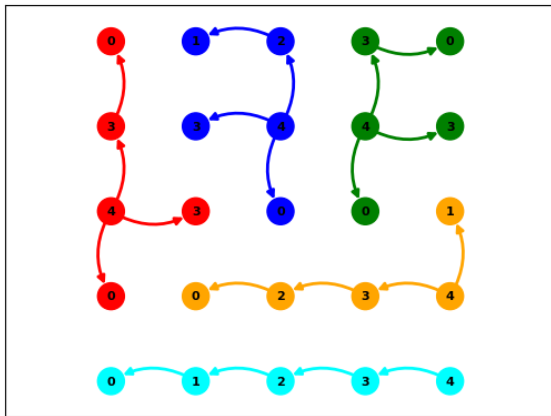
E quanto ganho?

- ▶ Queremos, por fim, maximizar as vitórias em partições:

$$\max \sum_{k \in K} Y_k$$

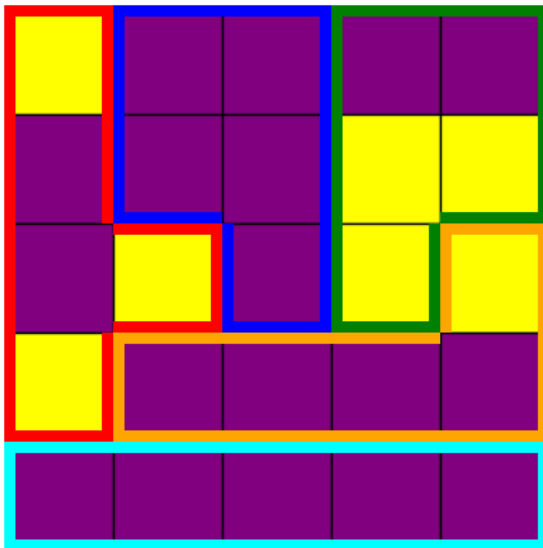
Resultados

- Rodei o modelo, e ele deu esse resultado aqui:



Resultados

- Rodei o modelo, e ele deu esse resultado aqui:



Resultados

- ▶ Rodei o modelo, e ele deu esse resultado aqui:



```
Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)  
Best objective 2.000000000000e+00, best bound 2.000000000000e+00, gap 0.0000%
```

A melhor solução é no máximo 2.

Reflexões

- ▶ **Veja que ninguém mudou seu voto, mas o resultado da eleição mudou drasticamente.**

Reflexões

- ▶ Veja que ninguém mudou seu voto, mas o resultado da eleição mudou drasticamente.
- ▶ **Se estivessemos do outro lado, poderia facilmente maximizar as vitórias sem mudar as restrições, basta:**

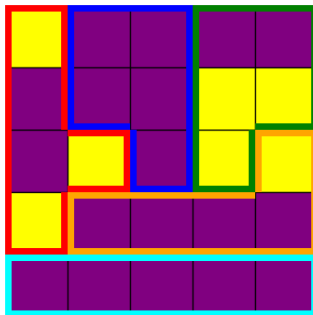
$$\min \sum_{k \in K} Y_k$$

Reflexões

- ▶ Veja que ninguém mudou seu voto, mas o resultado da eleição mudou drasticamente.
- ▶ Se estivessemos do outro lado, poderia facilmente maximizar as vitórias sem mudar as restrições, basta:

$$\min \sum_{k \in K} Y_k$$

- ▶ Seria possível identificar, também, onde cada partido deveria investir seus recursos para propaganda



Heurística

- ▶ *Heurística* é uma maneira *chic* de dizer que estamos construindo soluções aproximadas, porém boas.

Heurística

- ▶ *Heurística* é uma maneira *chic* de dizer que estamos construindo soluções aproximadas, porém boas.
- ▶ Uma técnica heurística utilizada pelos americanos é a dupla "*Packing and Cracking*" (Empacotar e Quebrar)

Heurística

- ▶ *Heurística* é uma maneira *chic* de dizer que estamos construindo soluções aproximadas, porém boas.
- ▶ Uma técnica heurística utilizada pelos americanos é a dupla "*Packing and Cracking*" (Empacotar e Quebrar)
- ▶ Essas usam fato de ser uma decisão ganha ou não ganha, em que essencialmente se "inutiliza" os votos do outro partido quando se obtém a maioria.

Heurística

- ▶ *Heurística* é uma maneira *chic* de dizer que estamos construindo soluções aproximadas, porém boas.
- ▶ Uma técnica heurística utilizada pelos americanos é a dupla "*Packing and Cracking*" (Empacotar e Quebrar)
- ▶ Essas usam fato de ser uma decisão ganha ou não ganha, em que essencialmente se "inutiliza" os votos do outro partido quando se obtém a maioria.
- ▶ Logo eles tentam Empacotar o máximo possível os votantes do partido oposto, garantindo que eles ganham e minimizando os votos "inúteis" do próprio partido.

Heurística

- ▶ *Heurística* é uma maneira *chic* de dizer que estamos construindo soluções aproximadas, porém boas.
- ▶ Uma técnica heurística utilizada pelos americanos é a dupla "*Packing and Cracking*" (Empacotar e Quebrar)
- ▶ Essas usam fato de ser uma decisão ganha ou não ganha, em que essencialmente se "inutiliza" os votos do outro partido quando se obtém a maioria.
- ▶ Logo eles tentam Empacotar o máximo possível os votantes do partido oposto, garantindo que eles ganham e minimizando os votos "inúteis" do próprio partido.
- ▶ Eles também Quebram as regiões de muita concentração de votantes do oposto, de maneira que eles ganhem marginalmente naquela partição, maximizando os votos "inúteis" do partido oposto.

Empacotar

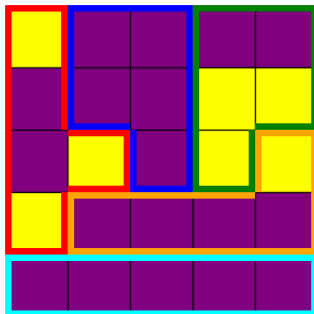
- ▶ Tentam empacotar o máximo possível os votantes do partido oposto, garantindo que eles ganham aquele lugar.

Empacotar

- ▶ Tentam **empacotar** o máximo possível os votantes do partido oposto, garantindo que eles ganham aquele lugar.
- ▶ **Minimizando os votos "inúteis" do próprio partido.**

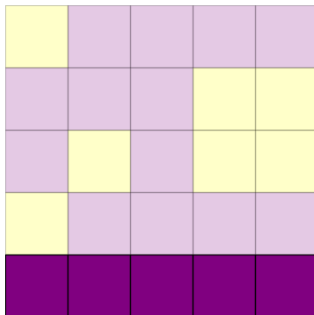
Empacotar

- ▶ Tentam **empacotar** o máximo possível os votantes do partido oposto, garantindo que eles ganham aquele lugar.
- ▶ Minimizando os votos "inúteis" do próprio partido.
- ▶ **Maximizam os votos "inúteis" do partido oposto.**



Empacotar

- ▶ Tentam **empacotar** o máximo possível os votantes do partido oposto, garantindo que eles ganham aquele lugar.
- ▶ Minimizando os votos "inúteis" do próprio partido.
- ▶ Maximizam os votos "inúteis" do partido oposto.
- ▶ **"Estamos garantido a participação desse grupo!"**



Exemplo prático de *Packing*

- ▶ Em Chicago, foi unido dois bairros majoritariamente hispânicos.
- ▶ Essencialmente, eles só precisam de pouco além da maioria para serem representados.

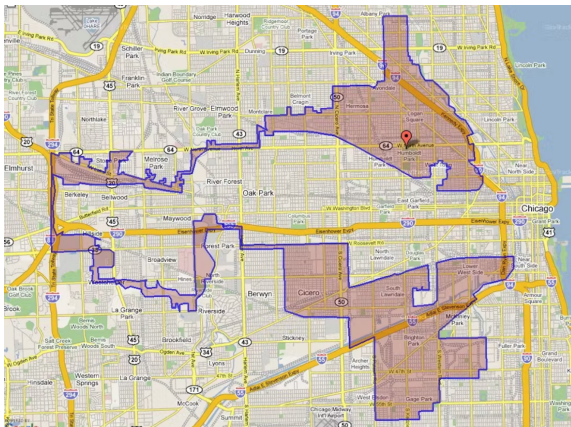


Figura: Distrito de Illinois - Atual

Quebrar

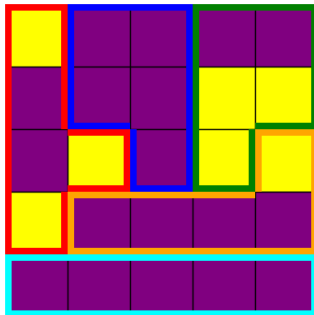
- ▶ Tentam quebrar regiões de muita concentração de votantes do partido oposto, tentando ganhar lá.

Quebrar

- ▶ Tentam **quebrar** regiões de muita concentração de votantes do partido oposto, tentando ganhar lá.
- ▶ Maximiza os votos "úteis" do próprio partido.

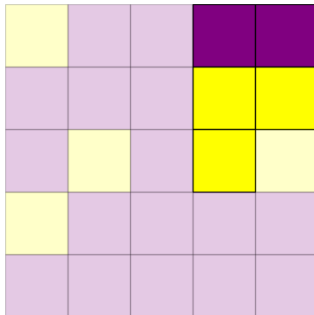
Quebrar

- ▶ Tentam **quebrar** regiões de muita concentração de votantes do partido oposto, tentando ganhar lá.
- ▶ Maximiza os votos "úteis" do próprio partido.
- ▶ Maximiza os votos "inúteis" do partido oposto.



Quebrar

- ▶ Tentam **quebrar** regiões de muita concentração de votantes do partido oposto, tentando ganhar lá.
- ▶ Maximiza os votos "úteis" do próprio partido.
- ▶ Maximiza os votos "inúteis" do partido oposto.



Resultados reais

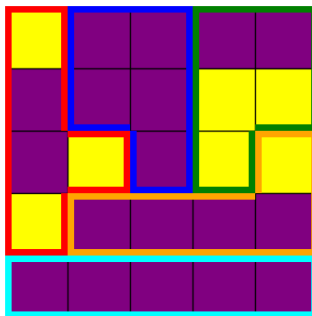
- ▶ Na prática é impossível de fato prever o voto de maneira específica..

Resultados reais

- ▶ Na prática é impossível de fato prever o voto de maneira específica..
- ▶ **Porém é possível definir grupos que se muito provavelmente votarão de forma específica.**

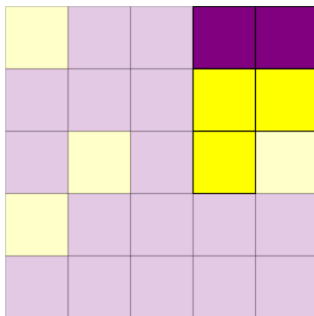
Resultados reais

- ▶ Na prática é impossível de fato prever o voto de maneira específica..
- ▶ Porém é possível definir grupos que se muito provavelmente votarão de forma específica.
- ▶ **É possível ainda tratar as incertezas, fazer varios mapas, e selecionar os mais prováveis.**



Resultados reais

- ▶ Na prática é impossível de fato prever o voto de maneira específica..
- ▶ Porém é possível definir grupos que se muito provavelmente votarão de forma específica.
- ▶ É possível ainda tratar as incertezas, fazer varios mapas, e selecionar os mais prováveis.



Onde vale o Investimento?

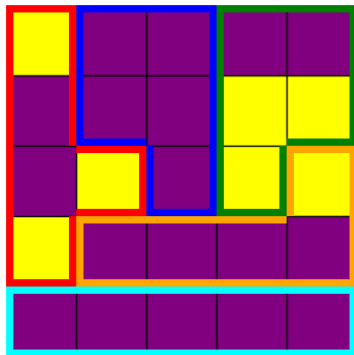
- ▶ Além de distritar da maneira, os políticos ainda podem te convencer.

Onde vale o Investimento?

- ▶ Além de distritar da maneira, os políticos ainda podem te convencer.
- ▶ **Podem, também, planejar o distrito já pensando em atacar os lugares mais impactantes.**

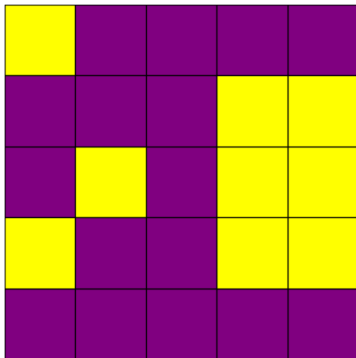
Onde vale o Investimento?

- ▶ Além de distritar da maneira, os políticos ainda podem te convencer.
- ▶ Podem, também, planejar o distrito já pensando em atacar os lugares mais impactantes.
- ▶ **Vamos analisar uma troca:**



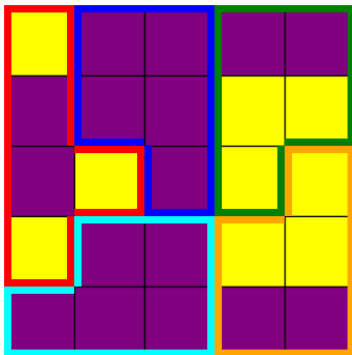
Onde vale o Investimento?

- ▶ Além de distritar da maneira, os políticos ainda podem te convencer.
- ▶ Podem, também, planejar o distrito já pensando em atacar os lugares mais impactantes.
- ▶ Vamos analisar uma troca:



Onde vale o Investimento?

- ▶ Além de distritar da maneira, os políticos ainda podem te convencer.
- ▶ Podem, também, planejar o distrito já pensando em atacar os lugares mais impactantes.
- ▶ Vamos analisar uma troca:



Caso Thomas Hoefeller

"Redistritamento é como uma eleição ao contrário. É um grande evento. Normalmente são os votantes que escolhem os políticos. No redistritamento, são os políticos que escolhem os votantes."

- Foi responsável pelos mapas das eleições americanas de 2010 à 2020.



Caso Thomas Hoefeller

"Redistritamento é como uma eleição ao contrário. É um grande evento. Normalmente são os votantes que escolhem os políticos. No redistritamento, são os políticos que escolhem os votantes."

- ▶ Foi responsável pelos mapas das eleições americanas de 2010 à 2020.
- ▶ **Após sua morte em 2018, sua filha divulgou seu HD para a imprensa.**



Caso Thomas Hoefeller

"Redistritamento é como uma eleição ao contrário. É um grande evento. Normalmente são os votantes que escolhem os políticos. No redistritamento, são os políticos que escolhem os votantes."

- ▶ Foi responsável pelos mapas das eleições americanas de 2010 à 2020.
- ▶ Após sua morte em 2018, sua filha divulgou seu HD para a imprensa.
- ▶ Seu mapa para o estado da Carolina do Norte foi colocado como inconstitucional.

Caso Thomas Hoefeller

"Redistritamento é como uma eleição ao contrário. É um grande evento. Normalmente são os votantes que escolhem os políticos. No redistritamento, são os políticos que escolhem os votantes."

- ▶ Foi responsável pelos mapas das eleições americanas de 2010 à 2020.
- ▶ Após sua morte em 2018, sua filha divulgou seu HD para a imprensa.
- ▶ Seu mapa para o estado da Carolina do Norte foi colocado como inconstitucional.
- ▶ Foi comprovado que ele usou a informação de quantidade de pessoas pretas nas regiões (e que são prováveis de votar pelos Democratas) para compor esse mapa.

Caso Thomas Hoefeller

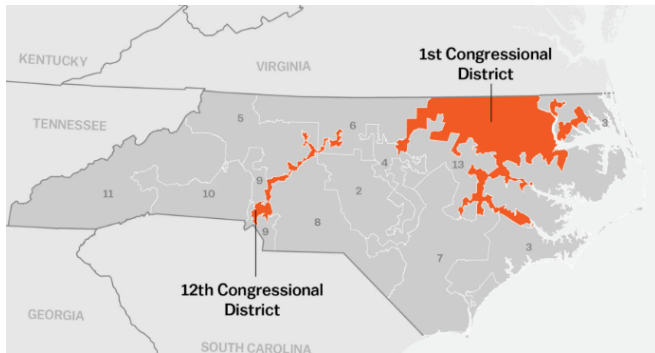


Figura: Divisão do congresso - 2012 - Feito por Hoefeller

E para o futuro?

- ▶ Após o escândalo de Hoefeller, esse tema ficou mais em voga.

E para o futuro?

- ▶ Após o escândalo de Hoefeller, esse tema ficou mais em voga.
- ▶ **Existe uma coletânea de artigos que tenta quantificar se um mapa é "justo" ou não.**

E para o futuro?

- ▶ Após o escândalo de Hoefeller, esse tema ficou mais em voga.
- ▶ Existe uma coletânea de artigos que tenta quantificar se um mapa é "justo" ou não.
- ▶ **Por enquanto, o Corte Suprema dos EUA continua com as mesmas regras.**

Referências

- [1] Charles Bethea. A father, a daughter, and the attempt to change the census, 2019.
- [2] Kiera W. Dobbs, Douglas M. King, and Sheldon H. Jacobson. Redistricting optimization with recombination: A local search case study. *Computers Operations Research*, 160:106369, 2023.
- [3] Ari J. Smith and Justin J. Boutilier. Gap-gradient methods for solving generalized mixed integer inverse optimization: an application to political gerrymandering, 2024.
- [4] Neely Tucker. Gerrymandering: The origin story, 2024.